

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ
«ОСОБЕННОСТИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ И МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В СИСТЕМАХ С ПОЛОСТЬЮ»

Выполнил студент
205М группы
Савин Владимир Петрович

подпись студента

Научный руководитель:
профессор
Кокшаров Юрий Алексеевич

подпись научного руководителя

Допущена к защите
Заведующий кафедрой:
профессор Салецкий А.М.

подпись зав. кафедрой

Москва

2023

Содержание

Введение.....	3
1. Обзор литературы.....	6
1.1. Основные уравнения электростатики и магнитостатики.....	6
1.2. Применение теоремы Гельмгольца в электростатике и магнитостатике.....	7
1.3. Способы решения краевых задач.....	8
1.4. Проводник в поле точечного заряда.....	10
1.5. Эффект отталкивания.....	11
2. Методика.....	14
2.1. Построение физической модели аксиально-симметричных тел: проводников, магнетиков, диэлектриков.....	14
2.2. Физические модели описания равновесного состояния тел во внешнем электрическом или магнитном поле.....	17
2.3. Модели эквивалентных зарядов.....	22
2.4. Аналогия уравнений электро- и магнитостатики. Формализм фиктивных магнитных зарядов.....	25
3. Электростатика проводников с полостью различной формы во внешнем электрическом поле.....	26
3.1. Сфера и полусфера.....	26
3.2. Полуэллипсоид вращения.....	28
3.3. Сфера с отверстием.....	32
3.4. Цилиндр, конус.....	34
3.5. Цилиндрический сегмент.....	38
3.6. Заряженная полусфера.....	40
3.7. Полусфера конечной толщины.....	43
3.8. Полусфера в поле диполя.....	44
3.9. Модель эквивалентных зарядов. Поиск локального минимума.....	46
4. Магнитная полусфера в магнитном поле диполя.....	49
Заключение.....	53
Выводы.....	55
Список литературы.....	56

Введение

В литературе представлено большое число решений задач электростатики о взаимодействии проводников [Smythe, 1989; Durand, 1966; Griffiths, 1999]. Зачастую при решении разных задач требуется обращаться к специфическим математическим методам, подходящим только для ограниченного числа задач. К некоторым задачам можно применить метод изображений, который дает аналитическое решение. Решение может быть довольно простым и компактным [Griffiths, 1999], как в случае задачи о взаимодействии проводящей сферы с точечным зарядом, так и довольно сложным, включающим в себя специальные функции и бесконечные ряды, как в случае задачи о взаимодействии двух сферических проводников [Smythe, 1989; Kolikov, 2012; Lindgren, 2016]. Встречаются и такие задачи, решение которых может противоречить физической интуиции, например задача о проводящей электронеutralной полусфере в поле точечного заряда [Levin, 2011]. Левин и Джонсон в результате изучения воздействий точечного заряда на электронеutralную проводящую полусферу и диполя на электронеutralную проводящую плоскость с круглым отверстием обнаружили необычный «эффект отталкивания». Сила отталкивания в этих системах наблюдается, когда точечный заряд и диполь находятся в некоторой области вблизи полости и отверстия, соответственно. Лекнер в своей работе обосновал противоречащее интуиции притяжение двух одноименно заряженных цилиндров [Lekner, 2022]. Все эти примеры указывают на важность геометрии проводников при определении характера их взаимодействия.

Существование отталкивания между нейтральным и заряженным проводником получила интересное продолжение в дискуссии о квантовомеханических силах Казимира [Fulling, 2007; Levin, 2010; Grushin, 2011; Wilson, 2015; Kenneth, 2006; Vachas, 2007]. Одни авторы признают возможность существования отталкивающей силы Казимира [Fulling, 2007; Levin, 2010; Grushin, 2011; Wilson, 2015], которую предполагается, что возможно обнаружить в системе с удлиненной металлической частицей вблизи металлической

плоскости с отверстием [Levin, 2010]. При определенных условиях отталкивание может также происходить между некоторыми диэлектриками [Grushin, 2011], и между полуметаллами Вейля [Wilson, 2015]. Тем не менее есть работы, в которых отрицается возможность существования отталкивающей силы Казимира [Vachas 2007, Kenneth 2006] независимо от геометрии системы и электрических свойств материалов [Kenneth, 2006]. Экспериментальная проверка могла бы разрешить эти противоречия, однако величина силы Казимира настолько мала, что точность современных методов измерений все ещё не достаточна для их обнаружения [Levin, 2010; Klimchitskaya, 2009; Munday, 2009]. Тем не менее, можно показать потенциально возможные схемы измерения. Например, в работе [Wilson 2015] предлагается по меньшей мере четыре способа, позволяющих реализовать систему с отталкивающей силой Казимира. Один из них - использовать системы обладающих особой геометрией.

Предположительно, наличие отверстия в нейтральном проводнике способствует появлению силы отталкивания между заряженным и электронейтральным проводниками. Для проверки этого предположения, в данной работе были численно исследованы незаряженные проводники различной формы, такие как полусфера, усеченная сфера, вытянутые и сплюснутые полуэллипсоиды вращения, цилиндрический сегмент в электрическом поле точечного заряда. Вызывает также интерес наблюдение подобного электростатического эффекта в магнитостатике, где вместо проводника используется магнетик, при этом для случая с магнетиком вместо электрического точечного заряда используется постоянный магнит.

Расчет равновесного распределения заряда даже для простейших тел является одной из самых сложных задач в теории электромагнитных явлений [Griffiths, 1996; Good, 1997]. Задача с проводящим круглым диском хорошо демонстрирует, всю её сложность [Jackson, 1962]. По этой причине многие авторы упрощают задачу, считая равновесное распределение заряда равномерным [Ciftja, 2019; Ciftja, 2020; Ciftja, 2021], которое обычно таким не

является. В данной работе подобные предположения не делаются и равновесное распределение заряда определяется численно.

Алгоритм численного расчета основан на представлении проводников, магнетиков или диэлектриков в виде большого числа параллельных равномерно заряженных тонких колец, если исследуемая система характеризуется свойством аксиальной симметрии, или в виде большого числа точечных зарядов, если нет аксиальной симметрии. В данной работе для расчета равновесного распределения зарядов (фиктивных магнитных зарядов в случае магнетиков) предлагается три метода: два для проводников и один для магнетиков и диэлектриков. Первый заключается в минимизации отклонений электростатического потенциала на поверхности проводника от постоянного значения. Второй метод основывается на теореме Томсона для проводников и заключается в минимизации электростатической энергии. Третий метод, для магнетиков или диэлектриков, основывается на использовании граничных условий для векторов электрического или магнитного поля на поверхности магнетика или диэлектрика.

В целом, можно сказать, что в работе используется интегро-дифференциальный подход к решению электростатических и магнитостатических задач, в котором находятся не потенциалы полей, подчиняющиеся дифференциальным уравнениям Пуассона или Лапласа, а полевые вектора, вычисляемые с помощью интегральных законов Кулона или Био-Савара-Лапласа, источники для которых находятся самосогласованно благодаря удовлетворению локальных (дифференциальных) граничных условий [Steele, 1987; Binns and Lawrenson, 1973]. Большая часть результатов, представленных в данной работе, была опубликована в статье [Savin, 2022].

1. Обзор литературы

1.1 Основные уравнения электростатики и магнитостатики

Электромагнитные процессы и явления в непрерывных средах описываются системой уравнений Максвелла, которая в системе СИ имеет следующий вид [Алешкевич, 2014]:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_f, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (4)$$

где \vec{E} и \vec{D} - напряжённость и индукция электрического поля, \vec{H} и \vec{B} - напряжённость и индукция магнитного поля, ρ_f - объёмная плотность свободного электрического заряда, \vec{j}_c - плотность тока проводимости.

Для однозначного определения электромагнитного поля необходимо также учесть свойства среды, добавив к системе (1.1) - (1.4) материальные уравнения:

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{H}), \quad (5)$$

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{E}, \vec{H}). \quad (6)$$

Мы же будем рассматривать однородные и изотропные диэлектрики и магнетики, для которых уравнения (1.5) и (1.6) имеют наиболее компактный вид:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad (7)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (8)$$

где ε_0 и μ_0 электрическая и магнитная постоянные, соответственно; ε и μ диэлектрическая и магнитная проницаемости.

В случае статики, при отсутствии какой-либо зависимости от времени, уравнения Максвелла (1)-(4) упрощаются:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad (9)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_c, \quad (10)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_f, \quad (11)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (12)$$

Существует несколько различных способов решения данной системы уравнений. Рассмотрим некоторые из них.

1.2 Применение теоремы Гельмгольца в электростатике и магнитостатике

Если все источники полей сосредоточены в ограниченной области пространства, то для нахождения полей можно воспользоваться теоремой Гельмгольца [Griffiths,1999; Jefimenko,1983], которая утверждает о возможности представить любое регулярное на бесконечности, дифференцируемое векторное поле \vec{K} в виде интегралов по всему пространству от его дивергенции и ротора.

$$\vec{K}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \nabla \times \int_{\infty} \frac{\nabla' \times \vec{K}}{r} dV' - \nabla \int_{\infty} \frac{(\nabla' \vec{K})}{r} dV' \right\}, \quad (13)$$

где $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ – расстояния от элемента интегрирования dV' , имеющего координаты (x', y', z') , до точки с координатами (x, y, z) . Операторы ∇ и ∇' применяются к координатам (x, y, z) и (x', y', z') , соответственно.

Для использования подобного представления необходимо дополнить уравнения (9)-(12) недостающими соотношениями с дивергенцией и ротором:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (14)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = -\operatorname{div} \vec{M}, \quad (15)$$

$$\operatorname{rot} \vec{D} = -\operatorname{rot} \vec{P}, \quad (16)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad (17)$$

где ρ – объемная плотность полного электрического заряда, \vec{j} – плотность полного тока, \vec{P} – вектор поляризации, \vec{M} – вектор намагниченности.

Таким образом, исходя из уравнений (9) - (12) и (14) - (17), согласно формуле (13) выражения для векторов \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} , \vec{B} можно записать в виде:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty} \frac{\rho(x', y', z') \vec{r}}{r^3} dV' \quad (18)$$

$$\vec{H}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{\infty} \frac{\rho'(x', y', z') \vec{r}}{r^3} dV' + \frac{1}{4\pi} \int_{\infty} \frac{\vec{j}_c(x', y', z') \times \vec{r}}{r^3} dV' \quad (19)$$

$$\vec{D}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{\infty} \frac{\rho_f(x', y', z') \vec{r}}{r^3} dV' + \frac{1}{4\pi} \int_{\infty} \frac{\vec{j}_p(x', y', z') \times \vec{r}}{r^3} dV' \quad (20)$$

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\infty} \frac{\vec{j}(x', y', z') \times \vec{r}}{r^3} dV' \quad (21)$$

где $\rho'(x', y', z') = -\operatorname{div}(\vec{M})$ – объемной плотность «фиктивного магнитного заряда»; $\vec{j}_p = \operatorname{rot}(\vec{P})$ – плотность «фиктивного поляризационного тока». Эти величины носят вспомогательный характер, позволяя использовать математические аналогии между уравнениями электро- и магнитостатики.

С помощью выражений (18)-(21) особенно удобно находить поля \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} , \vec{B} в том случае, если заданные источники распределены дискретно или непрерывно и пространство неограниченно.

1.3. Решение краевых задач

Для нахождения полей в ограниченных областях, где необходимо учитывать граничные условия, в некоторых случаях более предпочтительным оказывается решение краевых задач, задачи Пуассона (Лапласа).

Например, в электростатике ($rot \vec{E} = 0; div \vec{D} = \rho_f$) в случае однородного диэлектрика ($\epsilon = const$) уравнение Пуассона для скалярного потенциала электромагнитного поля φ ($\vec{E} = -grad \varphi$) имеет вид:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho_f}{\epsilon_0\epsilon} \quad (22)$$

При отсутствии объемных свободных зарядов ρ_f потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0 \quad (23)$$

В магнитостатике при отсутствии токов проводимости ($rot \vec{H} = 0; div \vec{B} = 0$) можно ввести магнитный потенциал ψ ($\vec{H} = -grad \psi$) и по аналогии с электростатикой записать уравнение Лапласа:

$$\Delta\psi = 0 \quad (24)$$

Решение уравнений (22)-(24) - задача математической физики [Тихонов 1977]. В каждом отдельном случае при решении уравнения Лапласа требуется использовать специальные математические приемы, подходящие для ограниченного числа задач [Гринберг, 1948]. Важное значение имеет выбор системы координат, которая должна отражать особенности геометрии системы. Для большинства задач поиск аналитических решений весьма затруднителен, поэтому приходится обращаться к численным методам. Более того, при корректной постановке краевых задач должно быть известно распределение свободных зарядов и токов в пространстве и на границах раздела, что не всегда является доступным.

В задачах с неизвестным распределением зарядов требуемые граничные условия могут быть удовлетворены с помощью специально подобранного распределения зарядов или «фиктивных магнитных зарядов», если речь идет о магнитных средах при отсутствии токов проводимости, при этом подобранные распределения должны отвечать свойствам сред, которые они представляют. Например, в проводниках и однородных диэлектриках, где объемные плотности

зарядов равны нулю, все заряды должны быть распределены на поверхностях. Выражения для искомых полей, согласно теореме Гельмгольца (см. раздел 1.2), могут быть записаны в виде интегралов по заданным источникам. Данное представление позволяет свести краевую задачу к решению интегральных или интегро-дифференциальных уравнений [Steele, 1987; Binns and Lawrenson, 1973]. Особенностью подхода, используемого в данной работе, является выбор равномерно заряженных кольцевых элементов (в случае аксиально симметричных систем) и релаксационный метод решения интегро-дифференциальных уравнений (см. раздел 2).

Некоторые задачи электростатики допускают переход к эквивалентным системам, имеющим более простое решение, например с помощью метода изображений [Джексон, 1962]. Основная идея данного метода состоит в подборе системы дополнительных зарядов (зарядов-изображений), которая обеспечит выполнение требуемых граничных условий, при этом указанные «заряды-изображения» должны находиться вне рассматриваемой области.

1.4 Проводник в поле точечного заряда

Рассмотрим основные особенности данного метода на примере хорошо известной задачи о проводящей сфере в поле точечного заряда q . Q – величина полного заряда сферы. Пусть центр сферы находится в начале координат, а точечный заряд находится вне проводника на оси z в точке с координатой z_q (рис.1а). В данном случае поле проводящей сферы может быть представлено в виде двух точечных зарядов-изображений q_0 и q_a , лежащих на оси z (см. рис.1а): один в начале координат, другой в точке $z = a$. Величины q_a , a , q_0 подбираются таким образом, чтобы одна из эквипотенциальных поверхностей поля совпадала со сферой. Кроме того, должен выполняться закон сохранения заряда ($q_0 + q_a = Q$). В результате решения данной задачи можно получить выражение для силы взаимодействия сферы с точечным зарядом q , действующей вдоль оси z :

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Qq}{z_q^2} + \frac{q^2 R}{z_q^3} - \frac{q^2 R z_q}{(z_q^2 - R^2)^2} \right) \quad (25)$$

На рисунке 1б представлена зависимость силы F взаимодействия сферы с точечным зарядом для случая, когда тела имеют заряды одного знака ($Q/q = 1$). Видно, что при малых расстояниях между телами происходит притяжение ($F < 0$). На расстояниях сравнимых с размером проводника притяжение переходит в отталкивание ($F > 0$).

1.4 Эффект отталкивания

При рассмотрении других подобного рода простейших задач, например, задачи о заряженной проводящей плоскости в поле точечного заряда [Алешкевич 2014], где одноименно заряженные тела взаимодействуют аналогичным образом (на малых расстояниях притягиваются, на больших – отталкиваются), может сложиться впечатление, что сила отталкивания возникает только между одноименно заряженными телами, если расстояние между ними не слишком маленькое.

Однако, в работе [Levin, 2011] впервые были показаны примеры систем, в которых отталкивание может происходить между электронейтральным проводником и заряженным телом. Принято считать, что электронейтральный проводник всегда притягивает заряженные тела. Это легко объясняется большей пространственной близостью разноименных зарядов на соседних телах. Известно, что при поднесении положительного заряда к электронейтральному проводнику, на последнем будут индуцироваться заряды: на ближней к заряду области отрицательные (вызывающие притяжение), а на дальней положительные (вызывающие отталкивание). Поскольку сила кулоновского взаимодействия обратно пропорциональна квадрату расстояния между заряженными телами, притяжение будет преобладать над отталкиванием.

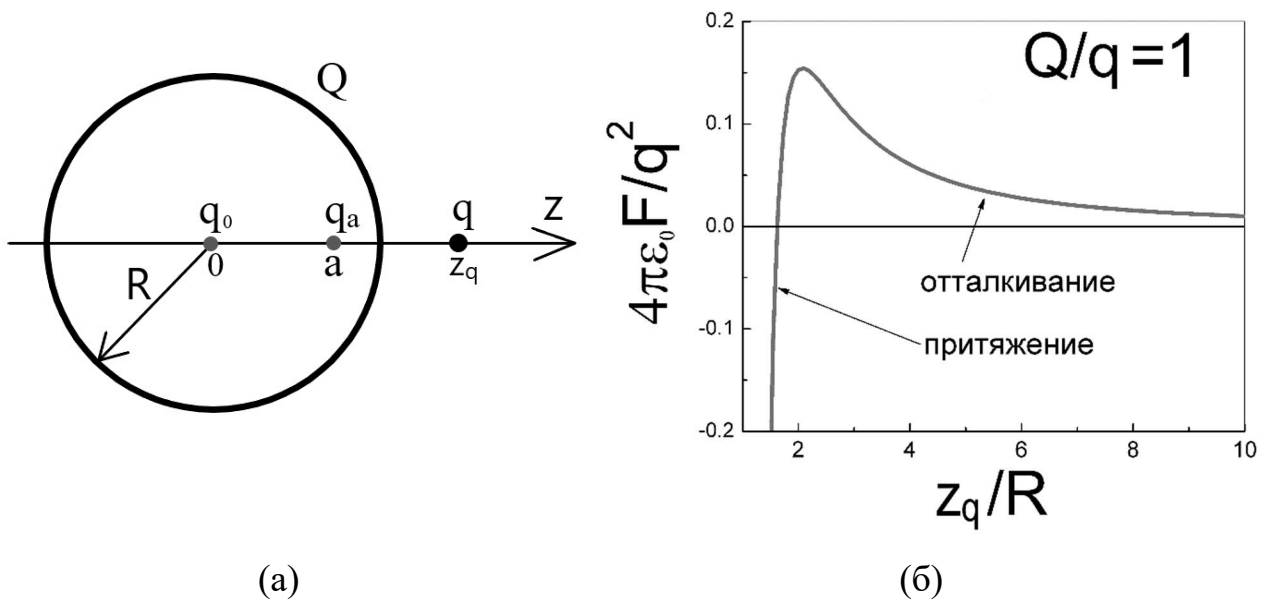


Рисунок 1. (а) Схема, поясняющая применение метода изображений для системы, состоящей из проводящей сферы радиуса R и точечного заряда q . Q – величина полного заряда проводника; q и z_q – заряд и координата точечного заряда, соответственно; q_0 и q_a – «заряды-изображения», имеющие координаты 0 и a , соответственно. (б) Сила F взаимодействия сферы с точечным зарядом q как функция координаты точечного заряда z_q при $Q/q = 1$.

Первая система, предложенная в работе [Levin, 2011], состоит из электронеutralной проводящей полусферы радиуса R , находящейся в поле точечного заряда q . Пусть центр полусферы O находится в начале координат, а точечный заряд q находится на оси её симметрии z (рис.2а). Авторами показано, что вблизи центра полусферы существует область, где точечный заряд будет отталкиваться от проводника.

Вторая система с отталкиванием состоит из точечного диполя, расположенного над электронеutralной проводящей бесконечной плоскостью с круговым отверстием диаметра W . Точечный диполь может перемещаться вдоль оси симметрии отверстия z (рис.2б). Обнаружено, что если расстояние между проводником и диполем меньше радиуса отверстия $W/2$, то будет происходить отталкивание, если больше – притяжение.

В дальнейшем под «эффектом отталкивания» будем понимать возникновение силы отталкивания точечного заряда (диполя) от

электронейтрального проводника (диэлектрика, магнетика). Появление этого необычного эффекта в данных системах обусловлено особой геометрической формой проводников. При определенных условиях она способствует более эффективному действию на заряженное тело той части индуцированных зарядов, что вызывает отталкивание.

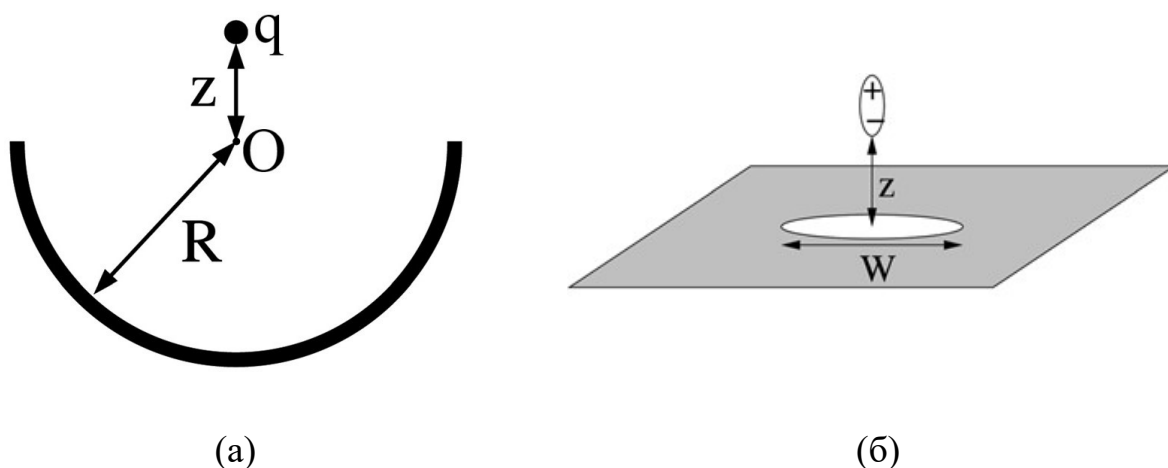


Рисунок 2. (а) Двухмерное изображение системы, содержащей электронейтральную проводящую полусферу радиуса R и точечный заряд q . z – расстояние от центра полусферы O до точечного заряда q . (б) Изображение системы, состоящей из точечного диполя и проводящей бесконечной плоскости с круговым отверстием. W – диаметр отверстия, z – расстояние от центра отверстия до точечного заряда q .

Хотя принципиально возможный «эффект отталкивания» нейтрального и заряженного проводника был обнаружен в статье Левина и Джонсона [Levin, 2011], ряд вопросов остался без ответа. Например, исчезает ли этот эффект, если полусфера трансформируется в эллипсоид? Может ли этот эффект наблюдаться в случае проводников другой формы – усеченной сферы, конуса, цилиндра и т. д.? Другой вопрос – насколько принципиально для этого эффекта свойство электронейтральности проводника? Так как в работе [Levin, 2011] рассматриваются только аксиально – симметричные системы, интересно также рассмотреть возможность обсуждаемого эффекта отталкивания для системы без аксиальной симметрии, например, части цилиндрического сегмента. Совсем не изучена аналогичная задача, где вместо проводника используется магнетик или

диэлектрик, при этом для случая с магнетиком вместо электрического точечного заряда используется постоянный магнит (магнитный диполь). Поиску ответов на эти вопросы и посвящена данная работа.

2. Методика

2.1 Построение физической модели аксиально-симметричных тел: проводников, диэлектриков и магнетиков

В данной работе рассматриваются электростатические и магнитостатические системы тел вида: проводник - точечный заряд (диполь), однородный магнетик – магнитный диполь. Изучается взаимодействие тел, входящих в эти системы. Предлагаемая модель подходит для исследования как электростатических, так и магнитостатических систем, при условии использования во втором случае формализма фиктивных магнитных зарядов (ФМЗ). Так как в случае статики при отсутствии токов проводимости уравнения для векторов \vec{H} и \vec{E} аналогичны (см. раздел 2.5), в дальнейшем будут записаны формулы только для вектора напряженности \vec{E} и потенциала ϕ . Чтобы выражения для \vec{E} и ϕ превратить в выражения для \vec{H} и ψ (магнитный потенциал: $\vec{H} = -grad \psi$), нужно везде электрические заряды Q заменить на фиктивные магнитные заряды Q' и убрать множитель $1/\epsilon_0$.

В общем, предлагаемая модель позволяет рассматривать проводники, однородные магнетики и однородные диэлектрики произвольной формы, представив их в виде большого числа точечных зарядов (рис.3) P_i ($i=1, 2, \dots, N$). Однако, если исследуемая система, характеризуется аксиальной симметрией, задача значительно упрощается. Входящие в состав таких систем проводники, магнетики или диэлектрики можно представить в виде большого числа коаксиальных равномерно заряженных тонких колец C_i ($i=1, 2, \dots, N$) (рис.4а). Такое представление позволяет значительно уменьшить количество элементов разбиения, что приводит к увеличению скорости вычислений.

Электростатическое поле равномерно заряженного кольца C_i радиуса a_{ri} в точке $P(\rho, \nu, z)$, где ρ, ν, z – цилиндрические координаты (рис.4б), может быть вычислено с помощью уравнений (26), (27) [Zhu, 2005]:

$$\vec{E} = \frac{Q_i k_i}{8\pi^2 \varepsilon_0 \sqrt{a_{ri} \rho^3}} \left\{ K(k_i) - \frac{E(k_i)}{1 - k_i^2} \left[1 - \frac{(\rho + a_{ri}) k_i^2}{2a_{ri}} \right] \right\} \vec{e}_\rho + \frac{Q_i k_i^3 (z - z_i) E(k_i)}{16\pi^2 \varepsilon_0 a_{ri} (1 - k_i^2) \sqrt{\rho^3 a_{ri}}} \vec{e}_z; \quad (26)$$

$$\varphi = \frac{Q_i}{2\pi^2 \varepsilon_0 \sqrt{(z - z_i)^2 + (\rho + a_{ri})^2}} K(k_i), \quad (27)$$

где $K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}}$, $E(k_i) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} d\beta$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно [Press, 1992], $k_i^2 = \frac{4\rho a_{ri}}{(z - z_i)^2 + (\rho + a_{ri})^2}$; Q_i и z_i – полный заряд и координата центра кольца C_i , соответственно.

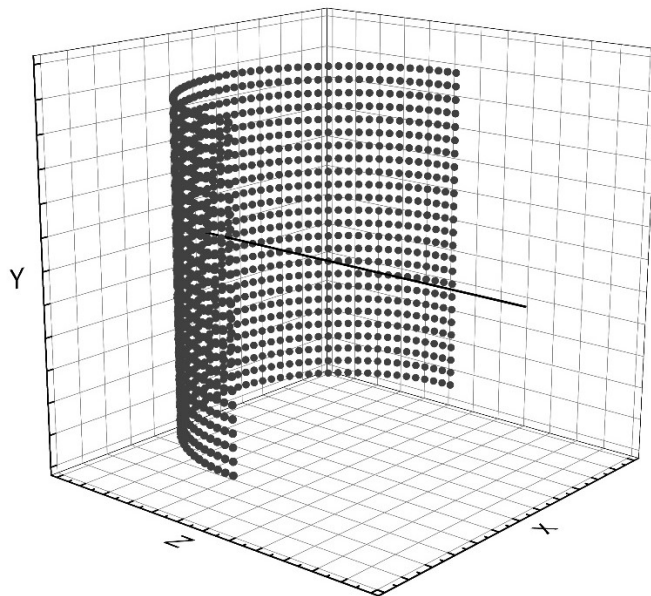


Рисунок 3. Схема представления тонкостенного проводящего цилиндрического сегмента в виде большого числа равномерно заряженных тонких колец P_i ($i=1, 2, \dots, N$).

Уравнение (27) для потенциала в точке $P(0,0,z)$ на оси симметрии z ($\rho=0$; $k=0$; $K(0)=\pi/2$) имеет более компактный вид:

$$\varphi = \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(z - z_i)^2 + a_{ri}^2}} \quad (28)$$

Таким образом, для каждого кольца C_i (точечного заряда P_i), представляющего проводник, диэлектрик или магнетик, известен явный вид полевых характеристик (26), (27), что позволяет определить поле исследуемого тела из принципа суперпозиции, просуммировав вклады всех колец (точечных зарядов). Но для этого нужно знать равновесное распределение зарядов Q_i ($i=1, 2, \dots, N$). Как именно осуществляется этот расчет, показано в следующем разделе.

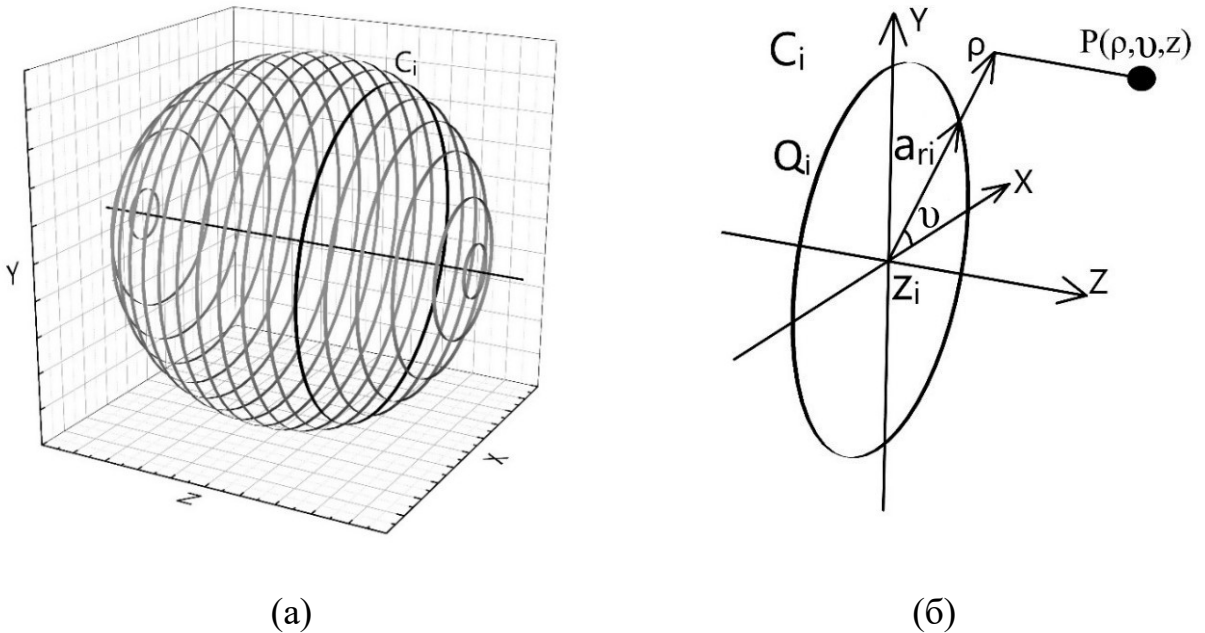


Рисунок 4. (а) Представление сферы, пример аксиально симметричного проводника, в виде набора тонких коаксиальных колец C_i , $i=1, 2, \dots, N$. (б)Схема для вычисления напряженности \vec{E} и потенциала φ равномерно заряженного кольца C_i в точке $P(\rho, \nu, z)$ в соответствии с уравнениями (26), (27); a_{ri} , z_i и Q_i обозначают радиус, координату центра и полный заряд кольца C_i , соответственно.

2.2 Физические модели описания равновесного состояния тел во внешнем электрическом или магнитном поле

Согласно предложенной модели, рассматриваемые проводники, диэлектрики или магнетики представляют собой набор равномерно заряженных колец C_i ($i=1, 2, \dots, N$) или точечных зарядов P_i ($i=1, 2, \dots, N$), для которых необходимо найти величины зарядов Q_i или фиктивных магнитных зарядов Q_i' в случае магнетика. В зависимости от того, что является объектом исследования: проводник, магнетик или диэлектрик предлагаются следующие алгоритмы действий.

При исследовании систем с проводниками использовались два метода: «потенциальный» и «энергетический». Первый метод, «потенциальный», предполагает минимизацию отклонений потенциала φ_i ($i=1, 2, \dots, N$) от среднего значения $\varphi_0 = (\sum_{i=1}^N \varphi_i)/N$, где φ_i обозначает потенциал на поверхности проводника в области расположения i -го кольца C_i или точечного заряда P_i , при этом в процессе минимизации полный заряд проводника Q поддерживается неизменным. Для этого после каждого шага минимизации из зарядов Q_i вычитается величина среднего отклонения суммарного заряда колец (точечных зарядов) $\sum_{i=1}^N Q_i$ от полного заряда проводника Q . Полученное равновесное распределение зарядов Q_i обеспечивает постоянство потенциала вдоль всего проводника $\varphi = \text{const}$ и нулевую тангенциальную компоненту напряжённости E_t на поверхности проводника. В данном случае процедура минимизации осуществляется с помощью метода динамической траектории “*leap-frog*” [Snyman, 2018], где в качестве минимизируемой функции f удобно выбрать сумму квадратов отклонений потенциалов φ_i от среднего значения φ_0 :

$$f(Q_1, Q_2, \dots, Q_N) = \sum_{i=1}^N (\varphi_i - \varphi_0)^2 \quad (29)$$

Второй метод, «энергетический» основан на теореме Томсона для проводников, в которой утверждается, что индуцированные заряды на проводниках всегда располагаются таким образом, чтобы свести к минимуму общую электростатическую энергию системы [Griffiths, 1999]. В связи с этим данный метод заключается в поиске минимума энергии системы W . Для этого исходя из условий минимума энергии системы и постоянства полного заряда проводника составляется система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с неизвестными в виде зарядов колец (точечных зарядов) Q_i (задача на условный экстремум). Составленная система уравнений решается с помощью LU-разложения [Press, 1992] (см. раздел 2.4). Полученное равновесное распределение зарядов Q_i обеспечивает минимальную электростатическую энергию системы.

Для однородных магнетиков с магнитной проницаемостью μ предлагается метод, основанный на свойстве непрерывности нормальных компонент векторов индукции \vec{B} на границе магнетика. С этой целью в данном методе производится минимизация отклонений нормальных компонент индукции B_n в точках, находящихся по разные стороны от границы магнетика. В процессе минимизации полный фиктивный заряд магнетика остается неизменным и равным нулю, что достигается таким же способом, как и в «потенциальном» методе для проводников. В результате получаем равновесное распределение фиктивных магнитных зарядов Q_i' колец (точечных зарядов) на поверхности магнетика, при котором выполняются граничные условия: $B_{1n} = B_{2n}$, $H_{1\tau} = H_{2\tau}$ (по условию токи проводимости отсутствуют), где индексы “1” и “2” обозначают области вакуума и магнетика μ , соответственно. Минимизация в данном методе осуществлялась с помощью алгоритма динамической траектории “leap-frog” [Snyman, 2018]. В качестве минимизируемой функции удобно взять:

$$f(Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_N) = \sum_{i=1}^N (B_{1n} - B_{2n})^2 = \mu_0 \sum_{i=1}^N (H_{1n} - \mu H_{2n})^2 \quad (30)$$

Важно отметить, что непосредственное вычисление поля на поверхности магнетика, предполагающее суммирование вкладов от всех равномерно заряженных колец C_i (точечных зарядов P_i), будет приводить к сингулярности, возникающей из-за особенности поля тонкого кольца (точечного заряда) вблизи локализации заряда. Ближайшие к точке расчета кольца (точечные заряды) будут давать бесконечный вклад в общее поле. Для борьбы с данным эффектом предлагается вблизи каждой точки расчета на границе магнетика выделять небольшую окрестность радиуса r (см. рис 5а), вклад от которой будет вычисляться по формуле для поля равномерно заряженной бесконечной плоскости:

$$H_p = \frac{\sigma'}{2}, \quad (31)$$

где σ' - поверхностная плотность ФМЗ.

Поле (31) не стремится к бесконечности вблизи поверхности и имеет только нормальную компоненту напряженности. Поверхностная плотность σ' вычисляется путем усреднения зарядов от всех сегментов колец (точечных зарядов), попадающих в выбранную окрестность r . Вклад в общее поле от оставшихся частей колец, не попадающих в выбранную окрестность (рис. 5б), вычисляются по формуле для напряженности равномерно заряженного кругового сегмента S_i [Zhu, 2005] в цилиндрических координатах ρ, ϑ, z :

$$\vec{H} = H_\rho \vec{e}_\rho + H_\vartheta \vec{e}_\vartheta + H_z \vec{e}_z; \quad (32)$$

$$H_\rho = \frac{\tau'(\rho + a_{ri})k_i^3}{16\pi\sqrt{\rho^3 a_{ri}}} [F(\beta_{1i}, k_i) - F(\beta_{2i}, k_i)] - \frac{\tau'k_i^4}{32\pi\sqrt{\rho^3 a_{ri}}} \left[\frac{4a_{ri}}{k_i^3} - 2(\rho + a_{ri}) \right] \times \left\{ \frac{E(\beta_{1i}, k_i) - (1 - k_i^2)E(\beta_{1i}, k_i)}{k_i(1 - k_i^2)} - \frac{k_i \sin \beta_{1i} \cos \beta_{1i}}{(1 - k_i^2)\sqrt{1 - k_i^2 \sin^2 \beta_{1i}}} \right\} \quad (33)$$

$$H_{\vartheta} = - \left[\frac{E(\beta_{2i}, k_i) - (1 - k_i^2)E(\beta_{2i}, k_i)}{k_i(1 - k_i^2)} - \frac{k_i \sin \beta_{2i} \cos \beta_{2i}}{(1 - k_i^2)\sqrt{1 - k_i^2 \sin \beta_{2i}}} \right] - \frac{\tau' k_i \sqrt{a_{ri}}}{8\pi\sqrt{\rho^3}} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - k_i^2 \sin \beta_{1i}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - k_i^2 \sin \beta_{2i}}} \right]; \quad (34)$$

$$H_z = \frac{\tau' k_i^3 z_i}{16\pi\sqrt{\rho^3} a_{ri}} [F(\beta_{1i}, k_i) - F(\beta_{2i}, k_i)] + \frac{\tau' k_i^4 z_i}{16\pi\sqrt{\rho^3} a_{ri}} \times \left\{ \left[\frac{E(\beta_{1i}, k_i) - (1 - k_i^2)E(\beta_{1i}, k_i)}{k_i(1 - k_i^2)} - \frac{k_i \sin \beta_{1i} \cos \beta_{1i}}{(1 - k_i^2)\sqrt{1 - k_i^2 \sin \beta_{1i}}} \right] - \left[\frac{E(\beta_{2i}, k_i) - (1 - k_i^2)E(\beta_{2i}, k_i)}{k_i(1 - k_i^2)} - \frac{k_i \sin \beta_{2i} \cos \beta_{2i}}{(1 - k_i^2)\sqrt{1 - k_i^2 \sin \beta_{2i}}} \right] \right\}, \quad (35)$$

где $F(\beta, k) = \int_0^\beta \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}}$ $E(\beta, k) = \int_0^\beta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} d\beta$ – эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно [Press, 1992]; $k_i^2 = \frac{4\rho a_{ri}}{(z - z_i)^2 + (\rho + a_{ri})^2}$; $\beta_{1i} = \frac{\vartheta + \pi - \alpha_{1i}}{2}$; $\beta_{2i} = \frac{\vartheta - (\pi - \alpha_{2i})}{2}$; τ' – линейная плотность фиктивного магнитного заряда; a_{ri} и z_i – радиус и координата центра кругового сегмента S_i , соответственно (см. рис.5б).

Для исследования диэлектриков предлагается использовать метод аналогичный тому, что предложен для магнетиков. Отличие заключается в том, что в случае с диэлектриком все действия необходимо проводить не над вектором \vec{B} , а над вектором \vec{D} , варьируя, при этом, электрические заряды Q_i вместо фиктивных магнитных зарядов Q_i' .

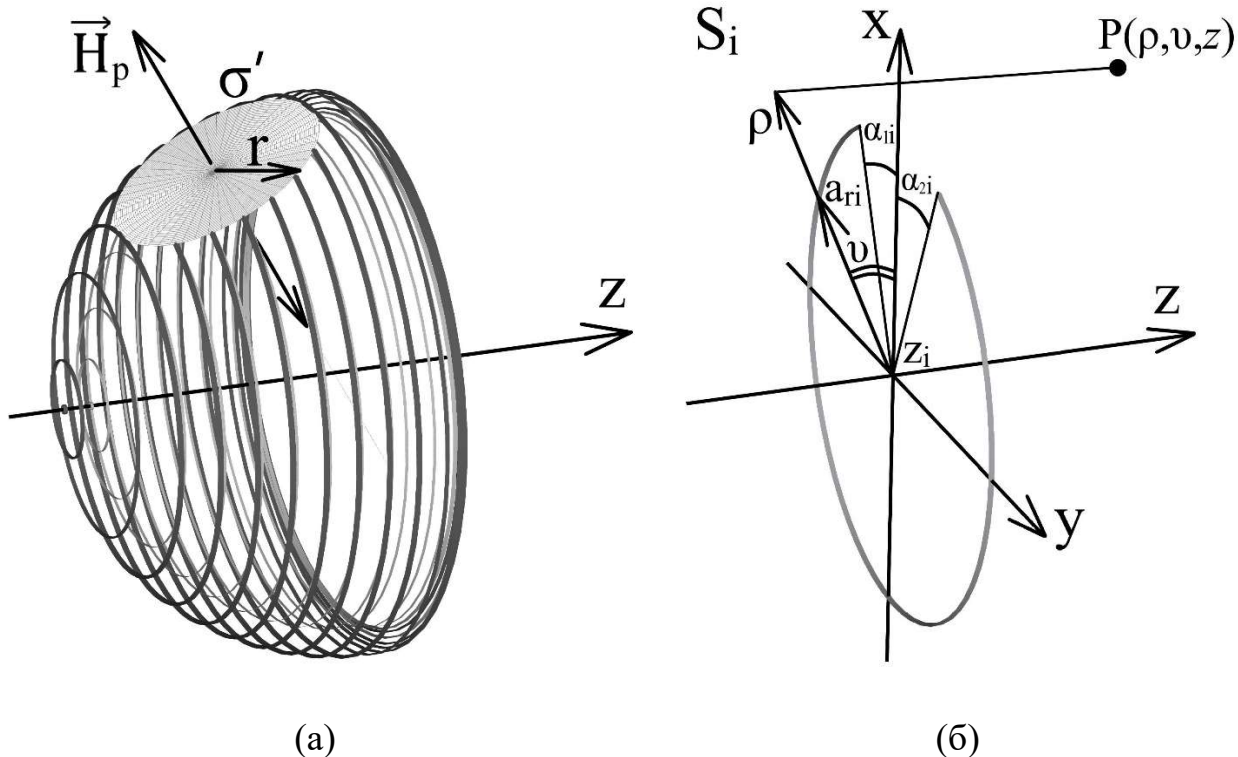


Рисунок 5. (а) Схема расчета напряженности магнитного поля \vec{H} на поверхности аксиально симметричного магнетика конечной толщины, представленного в виде набора колец. \vec{H}_p - напряженность равномерно заряженной бесконечной плоскости, σ' - поверхностная плотность фиктивного магнитного заряда на поверхности радиуса r . (б) Схема для вычисления напряженности \vec{H} равномерно заряженного кругового сегмента S_i в точке $P(\rho, \nu, z)$ в соответствии с уравнениями (32)-(35); a_{ri} , z_i и Q_i обозначают радиус, координату центра и полный заряд кругового сегмента S_i , соответственно; величины α_{1i} и α_{2i} определяют угол раствора сегмента S_i .

В результате применения предложенных методов получаем равновесное распределение электрических или фиктивных магнитных зарядов колец S_i (точечных зарядов P_i) $i=1, 2, \dots, N$. Далее для исследования взаимодействия тел в исследуемых системах вычисляется энергия системы W .

Для электростатических систем с проводниками, находящимися в поле точечного заряда q , энергию системы удобно записать в виде:

$$W = \frac{1}{2} Q \varphi_0 + \frac{1}{2} q \varphi_q, \quad (36)$$

где φ_q - значение потенциала в месте расположения точечного заряда q .

Если проводник находится в поле диполя, состоящего из двух точечных зарядов $q_+ > 0$ и $q_- < 0$ ($q_+ = |q_-|$), лежащих на оси симметрии z и отдаленных друг от друга на расстояние p , то энергию можно записать в виде:

$$W = \frac{1}{2} Q \varphi_0 + \frac{1}{2} q_+ \varphi_{q_+} + \frac{1}{2} q_- \varphi_{q_-}, \quad (37)$$

где φ_{q_+} и φ_{q_-} - значения потенциалов в местах расположения точечных зарядов q_+ и q_- , соответственно.

Для магнетиков, находящихся в поле магнитного диполя, образованного зарядами q'_+ и q'_- , энергию системы можно записать в виде:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i' \psi_i + \frac{1}{2} q'_+ \psi_{q'_+} + \frac{1}{2} q'_- \psi_{q'_-}, \quad (38)$$

где $\psi_{q'_+}$ и $\psi_{q'_-}$ - значения магнитных потенциалов в местах расположения точечных фиктивных зарядов q'_+ и q'_- , соответственно; Q_i' и ψ'_i - заряд и магнитный потенциал кольца C_i , соответственно.

Для диэлектриков, находящихся в поле точечного заряда q и электрического диполя, образованного зарядами q_+ и q_- , энергию системы можно записать с помощью уравнений (39) и (40), соответственно:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i' \varphi_i + \frac{1}{2} q \varphi_q, \quad (39)$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i \varphi_i + \frac{1}{2} q_+ \varphi_{q_+} + \frac{1}{2} q_- \varphi_{q_-}, \quad (40)$$

2.3 Модель эквивалентных зарядов

Можно ввести эквивалентную физическую модель, которая легко объясняет «эффект отталкивания» для электронейтрального проводника в поле точечного заряда. Эта модель применима для аксиально симметричных систем, состоящих из полого электронейтрального проводника в поле точечного заряда,

который расположен вне полости проводника. Идея предложенной модели состоит в том, что реальное распределение зарядов на поверхности проводника можно заменить системой, состоящей из точечного заряда и равномерно заряженного кольца, имеющих противоположные, но одинаковые по модулю заряды Q_+ и Q_- , соответственно (рис. 6а). Рассмотрим применение данной модели в задаче с электронеutralной полусферой радиуса R , находящейся в поле точечного заряда q (рис.6а). Данная задача, как было уже отмечено ранее, имеет точное решение [Levin, 2011]. Предполагая, что положительный точечный заряд q находится за пределами полости полусферы ($z_q > 0$), отрицательные индуцированные заряды Q_- располагаются как можно ближе к заряду q , вблизи отверстия проводника, а положительные индуцированные заряды Q_+ расположены как можно дальше от заряда q , вблизи полюса полусферы. Соответственно, в нашей модели $Q_- < 0$ и $Q_+ > 0$. Условие электронеutralности проводника предполагает выполнения следующего соотношения: $Q_+ + Q_- = 0$. Электростатическая энергия для системы с полусферой в рамках модели эквивалентных зарядов вычисляется по формуле:

$$W(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{qQ_-}{\sqrt{z^2 + R^2}} + \frac{qQ_+}{z + R} \right), \quad (41)$$

где R – радиус полусферы, а z – координата точечного заряда.

Сравнение (41) с точным решением [Levin, 2011] представлено на рис.6б. Абсолютное значение индуцированного заряда $Q_{\text{ind}} = Q_+ = |Q_-|$ зависит от расстояния между точечным зарядом q и полусферой (вставка на рис. 6б) и находится из условия наилучшего совпадения зависимости $W(z)$ с точным решением.

Данная модель наглядно демонстрирует причину возникновения эффекта отталкивания электронеutralного проводника с полостью в поле точечного заряда. Несмотря на то, что отрицательные индуцированные заряды Q_- ближе к точечному заряду, чем положительные Q_+ , первые действуют на точечный заряд неэффективно из-за большего угла θ к оси симметрии z (см. рис. 6а). Когда

точечный заряд q находится вблизи начала координат, угол θ является наибольшим. В этом случае сила отталкивания F_{Q+} от положительных индуцированных зарядов преобладает над силой притяжения F_{Q-} от отрицательных индуцированных зарядов.

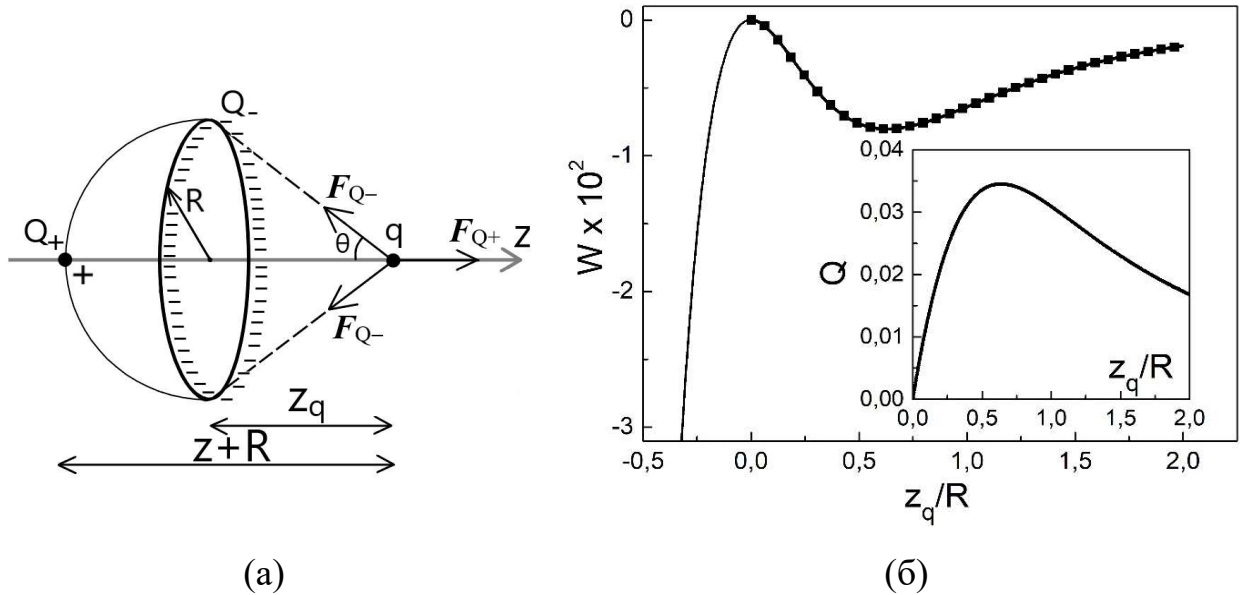


Рисунок 6. (а) Схема представления тонкостенной электронейтральной проводящей полусферы, находящейся в поле точечного заряда q , в виде равномерно заряженного тонкого кольца Q_- и точечного заряда Q_+ . Символами “+” и “-” обозначены положительные и отрицательные индуцированные заряды, соответственно. R – радиус полусферы; z_q – координата точечного заряда. Векторы F_{Q_-} и F_{Q_+} показывают направление сил, действующих на точечный заряд q со стороны индуцированных зарядов Q_- и Q_+ , соответственно; θ – угол между вектором силы F_{Q_-} и осью z . (б) Энергия системы W , нормированная на величину $q^2/(4\pi\epsilon_0 R)$, как функция координаты точечного заряда z_q . Сплошная линия и точки обозначают точное решение [Levin, 2011] и зависимость (41), соответственно. Во вставке представлена зависимость $Q=Q_+=|Q_-|$ от z_q .

Модель эквивалентных зарядов позволяет определить координату локального минимума z_{\min} на энергетической кривой $W(z_q)$. Для этого необходимо приравнять нулю выражение для результирующей силы F_q , действующей на точечный заряд, которое складывается из двух слагаемых: силы притяжения F_{Q_-} и силы отталкивания F_{Q_+} .

Сила притяжения, действующая на точечный заряд q со стороны равномерно заряженного кольца Q_- и направленная вдоль оси z равна:

$$F_{Q_-} = -q \partial \frac{\varphi_{Q_-}}{\partial z} = \frac{zq}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_-}{((z - z_i)^2 + a_r^2)^{3/2}}, \quad (42)$$

где φ_{Q_-} - потенциал кольца (см. уравнение (28)), z_i и a_r – координата и радиус кольца Q_- , a_r , соответственно.

Сила отталкивания, действующая на точечный заряд q вдоль оси z , обусловленная точечным зарядом Q_+ , равна:

$$F_{Q_+} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_+}{(z - z_0)^2}, \quad (43)$$

где z_0 – координата точечного заряда Q_+ .

Приравнявая нулю выражение для результирующей силы F_q , действующей на точечный заряд q , получаем нелинейное уравнение для нахождения $z=z_{\min}$, что соответствует координате локального минимума.

В разделе 3.9 будут представлены результаты применения данной модели для поиска координаты минимума $z=z_{\min}$ в системах с проводниками, имеющими форму полуэллипсоида вращения и сферы с отверстием.

2.4 Аналогия уравнений электро- и магнитостатики. Формализм фиктивных магнитных зарядов.

В соответствии с уравнениями Максвелла для случая магнитостатики при отсутствии токов проводимости $\vec{j}_f = 0$ вектор напряженности магнитного поля обладает только потенциальной компонентой $\vec{H} = \vec{H}_{\text{пот}}$ ($\text{rot } \vec{H} = 0$). Подобно тому как соотносятся вектор поляризации \vec{P} с объемной плотностью связанных зарядов ρ_b в электростатике ($\rho_b = -\text{div } \vec{P}$), в магнитостатике можно формально ввести объемную плотность фиктивных магнитных зарядов:

$$\rho' = -\text{div } \vec{M} \quad (44)$$

Учитывая $\text{div } \vec{B} = \mu_0 \text{div}(\vec{H} + \vec{M})=0$ и отсутствие токов проводимости получаем систему уравнений для вектора \vec{H} :

$$\operatorname{div} \vec{H} = \rho' \quad (45)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0 \quad (46)$$

Для вектора \vec{E} в электростатике имеют место аналогичные уравнения:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon} \quad (47)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad (48)$$

Так как системы уравнений для векторов \vec{H} и \vec{E} идентичны, то формулы для вектора \vec{H} аналогичны формулам для вектора \vec{E} .

3. Электростатика проводников с полостью различной формы во внешнем электрическом поле

3.1 Сфера и полусфера

Работоспособность предложенных алгоритмов проверялась на частных случаях, для которых известно аналитическое решение. На рисунке 7 представлены результаты точного и численного решения задач о взаимодействии точечного заряда с электронейтральным тонкостенным проводником, имеющего форму сферы или полусферы радиуса R . Точные решения были получены с помощью метода изображений, для сферы, и метода инверсии, для полусферы [Levin, 2011; Джексон, 1962].

Указанные системы тел обладают аксиальной симметрией: центры проводников находятся в начале координат $z=0$, точечный заряд располагается на оси симметрии z и имеет координату z_q , которая может изменяться в пределах интервала $(R, +\infty)$ для задачи со сферой или $(-R, +\infty)$ для задачи с полусферой. Для сферы зависимость энергии системы W от координаты точечного заряда z_q монотонна и соответствует притяжению между телами (рис.7в). В случае с полусферой зависимость $W(z_q)$ немонотонна: по мере увеличения z_q она убывает

на интервале $(0, 0.63R)$ и растет на интервалах $(-R, 0)$ и $(0.63R, +\infty)$ (рис.7б). «Эффект отталкивания» наблюдается при $z_q \in (0, 0.63R)$, где $W(z_q)/\partial z_q < 0$.

Сравнение на рисунке 7 точного решения [Levin, 2011] с результатами численного расчета позволяет убедиться в адекватности выбранной модели и работоспособности обоих методов вычисления. В каждом методе можно выделить свои преимущества: первый метод (потенциальный) более точный, второй метод (энергетический) оказался намного быстрее по скорости вычислений по сравнению с первым (одна минута против несколько десятков минут для одной точки при $N=1000$). Увеличение количества колец N приводит к уменьшению погрешности численного расчета. Например, в задаче с полусферой при использовании первого метода относительная погрешность энергии W вблизи локального минимума ($z_q = 0.63R$) уменьшается с 4% для $N=500$ до 1% для $N=2000$. При $N>1000$ относительная погрешность для W не превышает 10% на всем интервале значений z_q , включая область $z_q < 0$, где отклонения наибольшие.

На рисунке 7г представлено распределение индуцированных зарядов на поверхности электронейтральной проводящей полусферы при расположении точечного заряда в области локального минимума $z_q = 0.63R$. Точечный заряд q заряжен положительно, поэтому, как и следовало ожидать, на дальней к нему части полусферы будут индуцироваться заряды того же знака, а на ближней части – противоположного знака. Распределение отрицательных индуцированных зарядов заметно более компактно по сравнению с положительными зарядами. Величина положительного заряда увеличивается при приближении к полюсу полушария ($z = -R$). В разделе 3.9 будет показано, что данное квазинепрерывное распределение можно представить в виде двух дискретных элементов, отрицательно заряженного тонкого кольца Q_- при $z=0$ и положительного точечного заряда Q_+ при $z = -R$, что позволит наглядно объяснить причину возникновения эффекта отталкивания для электронейтрального проводника в поле точечного заряда.

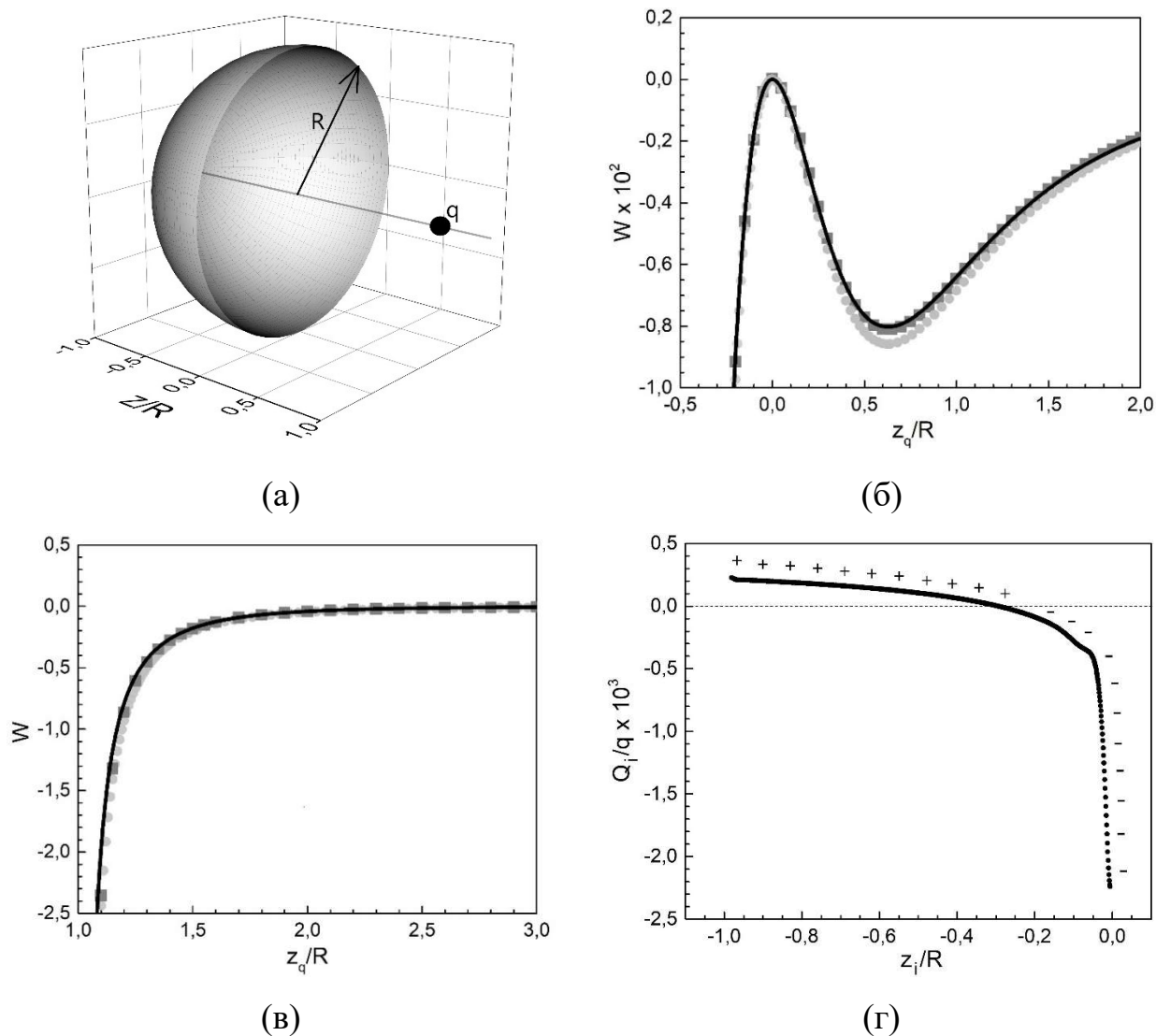
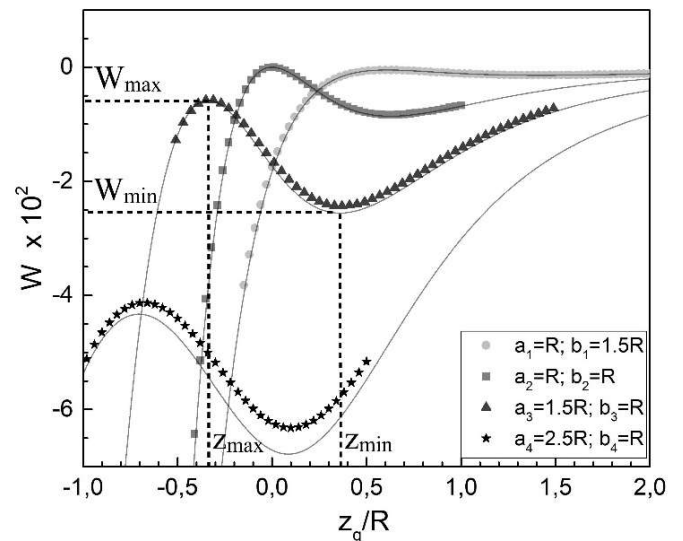
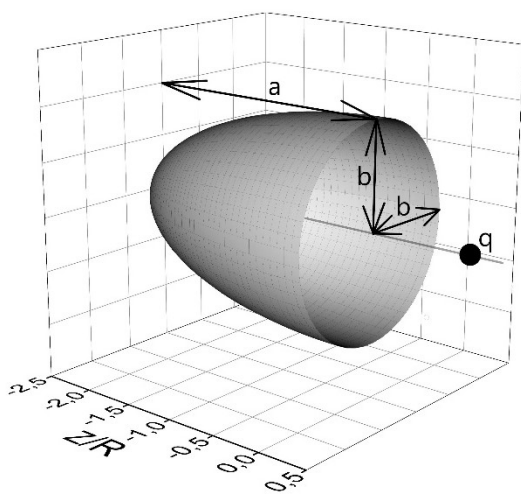


Рисунок 7. (а) Изображение системы, содержащей электронейтральную проводящую полусферу и точечный заряд q . (б)(в) Энергия W как функция координаты точечного заряда z_q в задаче о проводящей электронейтральной полусфере (б) (сфере (в)) в поле точечного заряда. Энергия $W(z_q)$ нормирована на величину $q^2/(4\pi\epsilon_0 R)$, где R - радиус полусферы и сферы; z_q и q – координата и заряд точечного заряда соответственно. Сплошные линии обозначают точные решения, точки обозначают результаты численного расчета. Результаты первого и второго методов обозначены темно-серыми квадратами и светло-серыми кружками, соответственно. (г) Заряды колец Q_i в зависимости от координат z_i , $i=1,2,3\dots N$ ($N=1000$) при расположении точечного заряда q вблизи минимума $z_q=0,63$.

3.2 Полуэллипсоид

Рассмотрим тонкостенный проводник, имеющий форму полуэллипсоида вращения с полуосями a и b , в поле точечного заряда q (рис.8а). Центр полуэллипсоида расположен в начале координат ($z=0$), его полуось a коллинеарна

оси аксиальной симметрии z . Точечный заряд q находится на оси z и имеет координату z_q , которая может изменяться в пределах интервала $(-b, +\infty)$. При $a=b=R$ полуэллипсоид идентичен полусфере (рис.7а). Для удобства будем рассматривать все величины с размерностью длины в единицах R . На рисунке 8б представлены зависимости $W(z_q)$ при разных значениях полуосей a и b . Каждая энергетическая кривая $W(z_q)$ характеризуется локальным минимумом W_{\min} и локальным максимумом W_{\max} , которые находятся в точках с координатами z_{\min} и z_{\max} , соответственно (см. рис.8б).



(а)

(б)

Рисунок 8. (а) Изображение системы, содержащей электронейтральный проводящий полуэллипсоид вращения с полуосями a, b и точечный заряд q . (б) Энергия системы W как функция координаты точечного заряда z_q при различных значениях полуосей a и b . Энергия $W(z_q)$ нормирована на величину $q^2/(4\pi\epsilon_0 R)$, где $R=a$ при $a < b$ и $R=b$ при $b < a$. При $a=b=R$ полуэллипсоид идентичен полусфере. Точки и сплошные линии обозначают результаты численного расчета первым и вторым методами, соответственно. Пунктирные линии обозначают локальные экстремумы W_{\min}, W_{\max} при координатах z_{\min} и z_{\max} , соответственно. Точность определения z_{\max} и z_{\min} зависит от размера шага, который обычно составлял $0,01R$.

В случае сжатого полуэллипсоида, когда $a/b < 1$, координата минимума z_{\min} растет (рис.9а), а абсолютная величина минимума энергии $|W_{\min}|$ уменьшается (рис.9б) по мере увеличения эксцентриситета $\epsilon = \sqrt{1 - a^2/b^2}$. Для вытянутого полуэллипсоида, когда $a/b > 1$, наоборот, координата минимума z_{\min}

уменьшается (рис.9а), а абсолютная величина минимума энергии $|W_{\min}|$ увеличивается (рис.9б) по мере увеличения эксцентриситета $\varepsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$.

Согласно графикам (рис.9) по мере сжатия полуэллипсоида «эффект отталкивания» начинает исчезать. Подобное поведение согласуется с предельном случаем ($a/b \rightarrow 0$), когда сплюснутый полуэллипсоид превращается в плоский диск, при взаимодействии с которым отталкивание не наблюдается и на энергетической кривой $W(z_q)$ отсутствует локальный минимум W_{\min} . Исчезновение эффекта отталкивания можно объяснить слиянием локального максимума W_{\max} и локального минимума W_{\min} , что и подтверждается на рисунках 9в,г, где показаны зависимости разности координат экстремумов $z_{\min} - z_{\max}$ и разности величин энергий в экстремумах $W_{\max} - W_{\min}$ от отношения величин полуосей a/b . Следует отметить, что для сжатых полуэллипсоидов ($a/b < 1$) зависимость $z_{\min} - z_{\max}$ от a/b немонотонна (рис.9в): наблюдается максимум при $a/b \approx 0.58$ и пропорциональное стремление к нулю при $a/b \rightarrow 0$. Вместе с тем значения $|W_{\min}|$ (рис.9б) и $W_{\max} - W_{\min}$ (рис.9г) быстро убывают при уменьшении отношения a/b .

Для вытянутого полуэллипсоида ($a/b > 1$) величина $z_{\min} - z_{\max}$ монотонно растет при увеличении отношения a/b (рис.9в). Таким образом, нельзя предположить сходимость экстремумов W_{\max} и W_{\min} в предельном случае, когда $b/a \rightarrow 0$. Сильно вытянутый полуэллипсоид можно рассматривать как длинную тонкостенную цилиндрическую трубу. Принимая во внимание симметрию такой системы, можно предсказать наличие локального максимума для $W(z_q)$ в центре трубы (в разделе 3.4 данное предположение будет подтверждено численным расчетом). При $z_q \rightarrow \pm\infty$ электронейтральная труба должна притягивать точечный заряд q , следовательно $W(z_q) \rightarrow 0$. В результате в данной системе должен у функции $W(z_q)$ должен существовать минимум, удовлетворяющий условию $|W_{\min}| \neq 0$ (см. рис.9б при $a > b$). Согласно рисунку 9а минимум должен быть расположен вблизи $z_q = 0$. Итак, мы можем предположить, что «эффект

отталкивания» продолжит существовать в системе с вытянутым полуэллипсоидом и при последующем, сколь угодно большом удлинении.

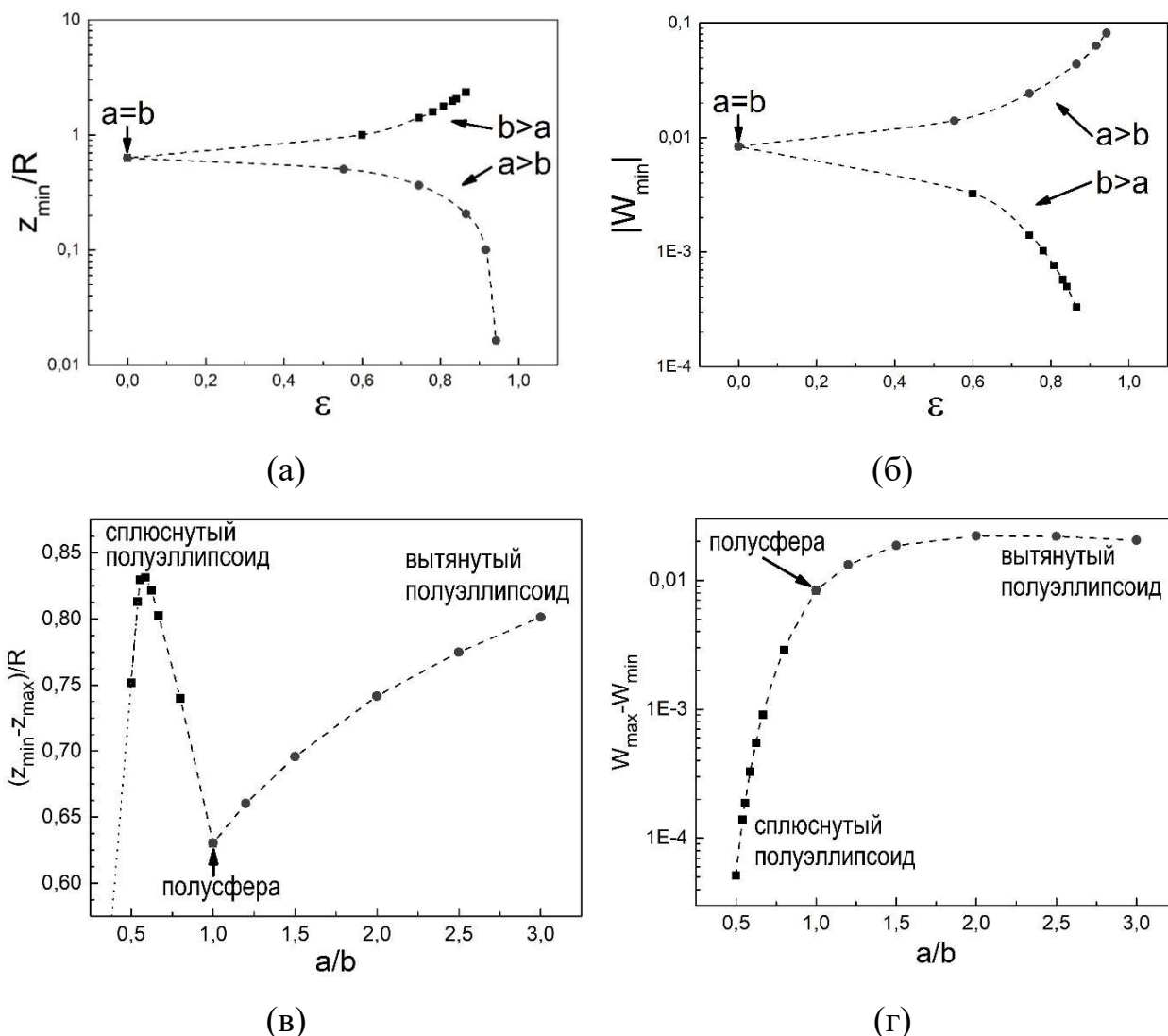


Рисунок 9. Зависимости z_{\min} (а) и $|W_{\min}|$ (б), $z_{\min} - z_{\max}$ (в) и $W_{\max} - W_{\min}$ (г) от величин эксцентриситета ε и отношения a/b , соответственно, в системе с проводящим электронейтральным полуэллипсоидом вращения и точечным зарядом. Величины W_{\min} и W_{\max} нормированы на $q^2/(4\pi\varepsilon_0 R)$ (см. подпись к рисунку 8). На графиках представлены случаи сжатых и вытянутых полуэллипсоидов. Результаты численного расчета, обозначенные точками, были получены с помощью первого метода. Штриховые линии соединяют соседние точки для лучшего восприятия. Пунктирная линия на рисунке направлена в начало координат.

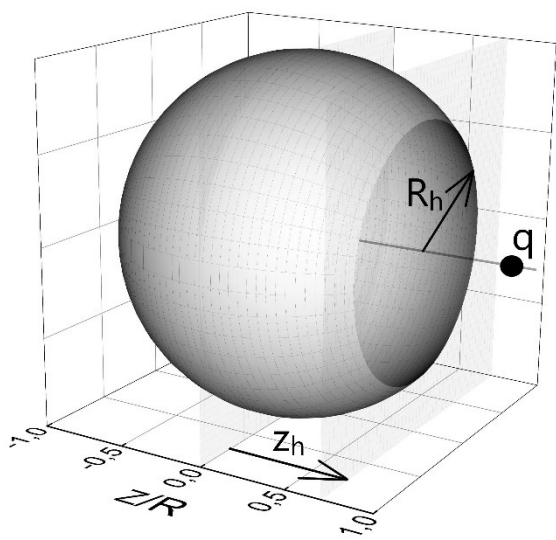
3.3 Сфера с отверстием

На рисунке 10а представлен электронеутральный тонкостенный сферический проводник радиуса R с отверстием в поле точечного заряда q . Центр проводника находится в начале координат ($z=0$), точечный заряд q расположен на оси аксиальной симметрии z в точке с координатой z_q , которая может изменяться в пределах интервала $(-R, +\infty)$. Величина z_h обозначает координату отверстия (сечения) сферы. Рисунок 10б содержит зависимости $W(z_q)$ при разных координатах отверстий. «Эффект отталкивания» происходит при $z_q \in (z_{max}, z_{min})$. Координата z_{max} и значение локального максимума W_{max} равны нулю для всех кривых, поскольку при $z_q=0$ проводник является частью эквипотенциальной поверхности для поля точечного заряда q и заряды на тонкостенной сфере не индуцируются. Абсолютное значение энергии $|W_{min}|$ и координата локального минимума z_{min} очень чувствительны к изменению координаты отверстия z_h и его радиуса R_h (рис.11а, б).

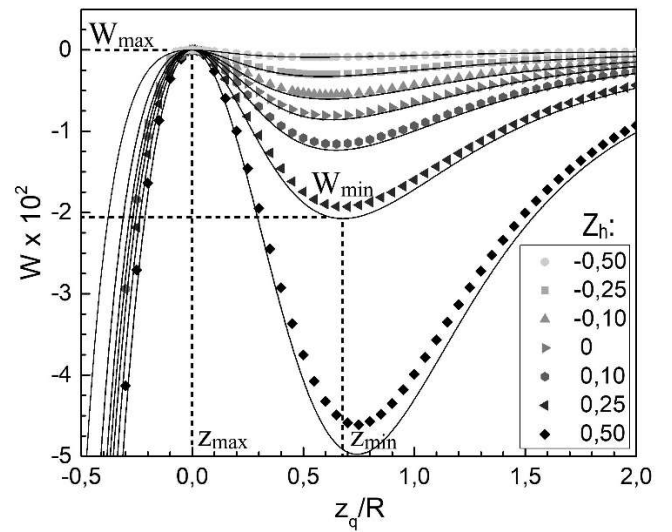
На рисунке 11а в логарифмическом масштабе представлена зависимость $|W_{min}|$ от координаты отверстия z_h . Величина $|W_{min}|$ растет с увеличением z_h на интервале $(-R, +R)$. Наиболее быстрый рост наблюдается вблизи точек $z_h \approx -R$ и $z_h \approx +R$. Во вставке к рисунку 11а изображена зависимость разницы $z_{min} - z_h$ от величины z_h . Вблизи предельных значений z_h , то есть при $z_h \approx -R$ или $z_h \approx +R$, координаты локального минимума z_{min} близки к z_h или $0.5R$, соответственно.

На рисунке 11б изображена зависимость $|W_{min}|$ от радиуса отверстия R_h . В случае небольшого отверстия при $z_h \approx -R$ (рис.3.3.2б) и $z_h \approx +R$ (вставка в рис. 11б) значение $|W_{min}|$ достигает своего максимального и минимального значения, соответственно. Разница между этими значениями составляет пять порядков. Причину такой большой разницы можно объяснить исходя из следующих соображений. При $z_h \approx R$ сфера с отверстием почти идентична обычной сфере без отверстия. Энергия взаимодействия электронеутральной проводящей сферы с точечным зарядом для случаев, когда последний находится внутри и снаружи

сферы определяется уравнениями (49) и (50), которые можно получить с помощью метода изображений. Согласно энергетическим кривым (рис.11в), описываемые данными уравнениями, при приближении к поверхности сферы ($z_q \rightarrow R$), энергия взаимодействия бесконечно убывает ($W(z_q) \rightarrow -\infty$). Для сферы с отверстием энергетическая кривая с локальным минимумом W_{\min} при $z_{\min} \approx z_h \approx R$ представлена во вставке к рисунку рис.11в. Таким образом, в пределе при $z_h \rightarrow R$ непрерывная функция $W(z_q)$ для сферы с отверстием становится разрывной в точке $z_q=R$.



(а)



(б)

Рисунок 10. (а) Изображение системы, содержащей электронейтральную проводящую сферу с отверстием и точечный заряд q . z_h и R_h обозначают координату отверстия и радиус отверстия, соответственно. (б) Энергия системы W как функция координаты точечного заряда z_q при различных значениях координат отверстий z_h . Значения координат отверстий для каждой кривой указаны в таблице. Энергия $W(z_q)$ нормирована на величину $q^2/(4\pi\epsilon_0 R)$, где R – радиус сферы. Энергетическая кривая при $z_h=0$ соответствует случаю с полусферой. Точки и линии обозначают результаты численного расчета первым и вторым методами, соответственно. Пунктирные линии обозначают локальные экстремумы W_{\min} , W_{\max} при координатах z_{\min} и z_{\max} , соответственно.

$$W(z_q) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2} \left(\frac{1}{R} - \frac{R}{\sqrt{z_q^4 + R^4 - 2z_q^2 R^2}} \right), \quad (49)$$

$$W(z_q) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2} \left(\frac{R}{z_q^2} - \frac{R}{\sqrt{z_q^4 + R^4 - 2z_q^2 R^2}} \right). \quad (50)$$

На рисунке 11г для сферы с отверстием с помощью зависимости $(W_{\max} - W_{\min}) / (z_{\min} - z_{\max})$ от $R_h / (z_h + R)$ показано уменьшение, при $z_h < 0$, и рост, при $z_h > 0$ (см. вставку к рисунку 11г), отталкивающей силы взаимодействия с уменьшением радиуса отверстия R_h . Отношение $(W_{\max} - W_{\min}) / (z_{\min} - z_{\max})$ является приближенной оценкой отталкивающей силы взаимодействия, действующей на точечный заряд q в интервале $z_q \in (z_{\max}, z_{\min})$. Таким образом, при уменьшении R_h величина отталкивающей силы взаимодействия стремится к нулю, если $z_h < 0$, и быстро возрастает, если $z_h > 0$. Отметим, что для данной системы W_{\max} и z_{\max} всегда равны нулю, а z_{\min} изменяется от $0.5R$ до $0.63R$ при $z_h < 0$ и от $0.63R$ до R при $z_h > 0$.

Аналогичная зависимость $(W_{\max} - W_{\min}) / (z_{\min} - z_{\max})$ от b/a для сжатого полуэллипсоида ($b > a$) показана на рисунке 11г для сравнения. Сила отталкивания постепенно уменьшается с ростом отношения b/a (рис.11г) и исчезает, когда локальные минимум W_{\min} и максимум W_{\max} сходятся (рис.9в,г). В случае сферы с отверстием при $z_h < 0$ локальный минимум также постепенно исчезает при $z_h \rightarrow -R$, но расстояние между локальными экстремумами в пределе остается конечным.

3.4 Цилиндр, конус

Теперь рассмотрим электронейтральные тонкостенные проводники со сквозными отверстиями, помещенные в поле точечного заряда q . Пусть один проводник имеет форму усеченного конуса (рис.12а), другой – форму цилиндра (рис.12в). Величины R_1 и R_2 обозначают радиусы правого и левого оснований проводников, соответственно. Будем предполагать, что для конуса $R = R_1 < R_2$, а для цилиндра $R = R_1 = R_2$, где R - единица измерения для всех величин, имеющих размерность длины. Длины проводников обозначаются величиной L . Координата

z правого и левого оснований каждого проводника равна нулю и $-L$ соответственно (см. рис.12а,в).

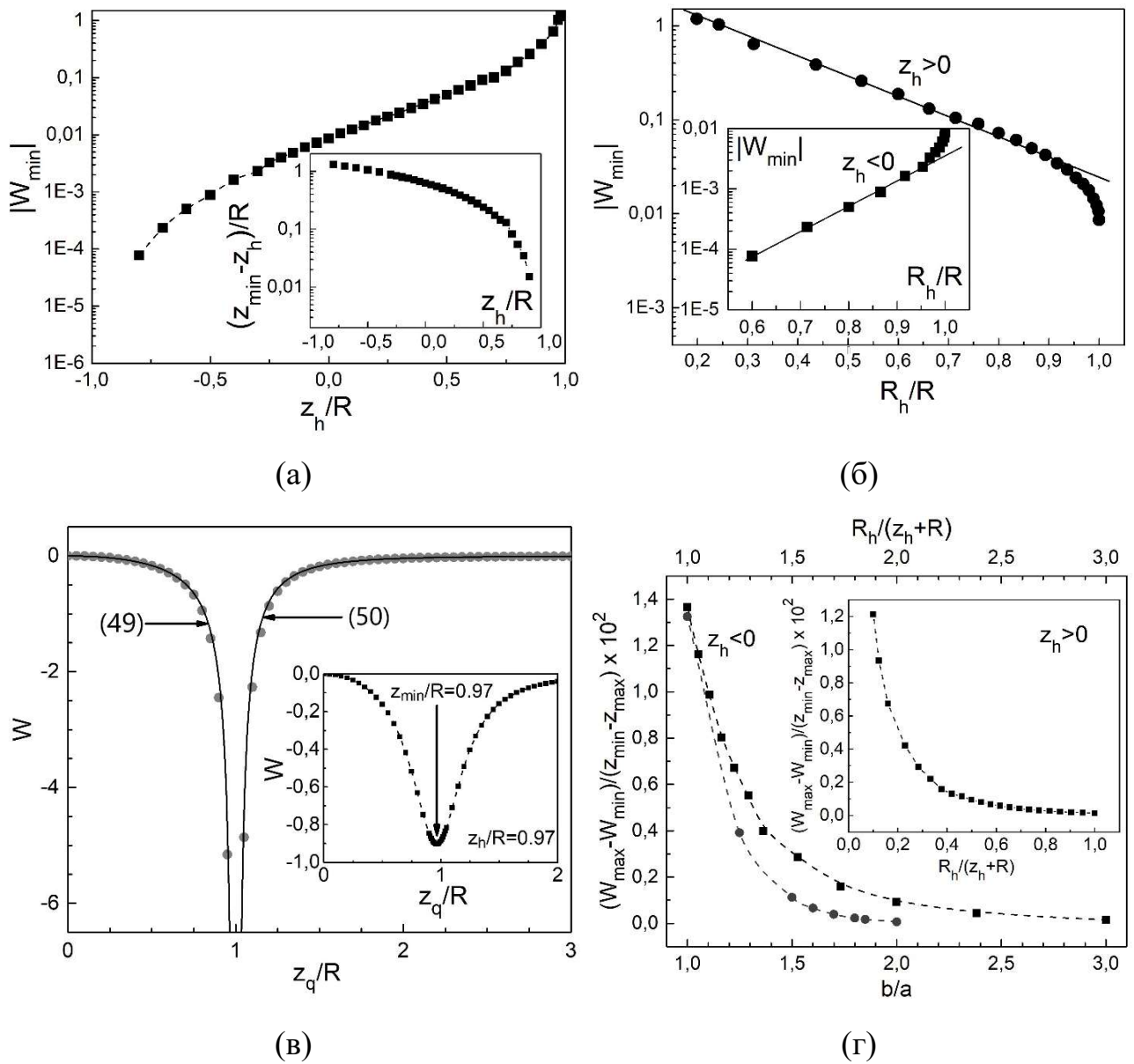


Рисунок 11. (а) и (б) зависимости модуля энергии в минимуме $|W_{\min}|$ для системы с усеченной сферой от координаты отверстия z_h и радиуса отверстия R_h (для $z_h > 0$), соответственно. Во вставках к рисункам (а) и (б) представлены зависимости $z_{\min} - z_h$ от z_h и $|W_{\min}|$ от R_h (для $z_h > 0$), соответственно. Графики (а) и (б) построены в логарифмическом масштабе. Штриховые линии соединяют соседние точки для лучшего восприятия. (в) Зависимость энергии W от координаты точечного заряда z_q для случая сферы ($z_h=1$). Результаты численного расчета, обозначенные точками, были получены с помощью первого метода. Сплошные линии описываются уравнениями (49) (при $z_q < R$) и (50) (при $z_q > R$). Вставка к рисунку представляет зависимость $W(z_q)$ при $z_h=0.97$. (г) Зависимость $(W_{\max} - W_{\min})/(z_{\min} - z_{\max})$ от $R_h/(z_h+R)$ для усеченной сферы и от b/a для сжатого полуэллипсоида (рис.3.2.1а), соответственно.

Энергия взаимодействия W как функция координаты точечного заряда z_q показана на рис.12б,г. Каждая кривая $W(z_q)$ имеет два локальных минимума W_1 и W_2 при z_1 и z_2 , соответственно, и единственный локальный максимум W_{\max} при z_{\max} . Образовавшиеся на энергетических кривых $W(z_q)$ потенциальные ямы при W_1 и W_2 имеют глубины $\Delta W_1 = W_{\max} - W_1$ и $\Delta W_2 = W_{\max} - W_2$, соответственно (рис. 12б). На рис.12б,г направления действующей на точечный заряд q силы отталкивания F_q обозначены стрелками, которые направлены к локальным минимумам. Сила отталкивания F_q меняет свое направление на противоположное при пересечении точки z_{\max} . Все энергетические кривые $W(z_q)$ асимметричны относительно z_{\max} , за исключением цилиндрического проводника.

Безразмерный параметр асимметрии β может быть записан в виде:

$$\beta = \frac{z_1 - z_{\max}}{z_{\max} - z_2} - 1 \quad (51)$$

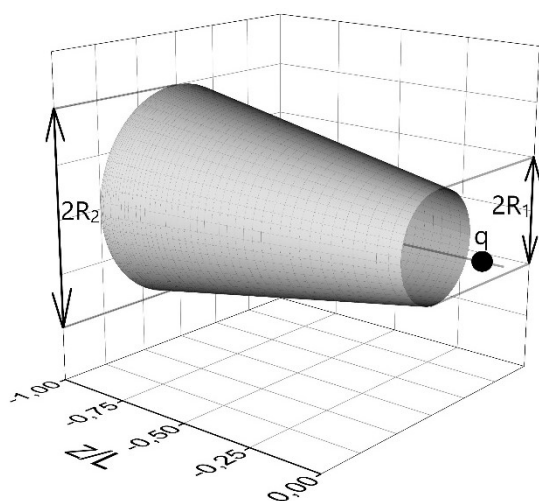
Для удобства введем безразмерный геометрический параметр:

$$\alpha = L \frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1} \quad (52)$$

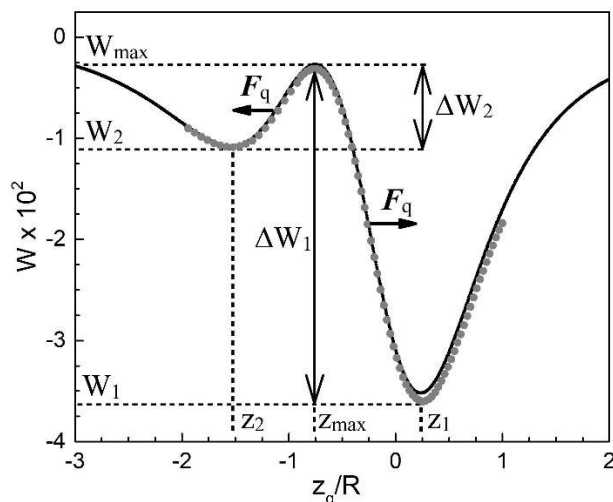
На рис.13а представлена зависимость β от α при различных значениях R_1 , R_2 , L . Значение β минимально и равно нулю при $\alpha=0$, что соответствует цилиндрическому проводнику ($R_1=R_2$). Уменьшение отношения R_1/R_2 приводит к увеличению параметра α и, следовательно, способствует увеличению асимметрии кривой $W(z_q)$: глубина потенциальной ямы ΔW_2 вблизи основания с меньшим радиусом R_2 растет по сравнению с глубиной потенциальной ямы ΔW_1 , находящейся вблизи большего основания R_1 .

Энергетические кривые $W(z_q)$ также удобно описывать с помощью величин ΔW_1 и ΔW_2 . Для этого введем безразмерный параметр γ :

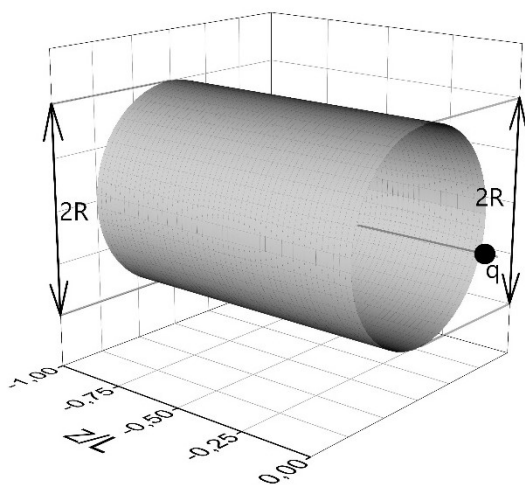
$$\gamma = \frac{\Delta W_1 - \Delta W_2}{\Delta W_1} = \frac{W_2 - W_1}{\Delta W_1} \quad (53)$$



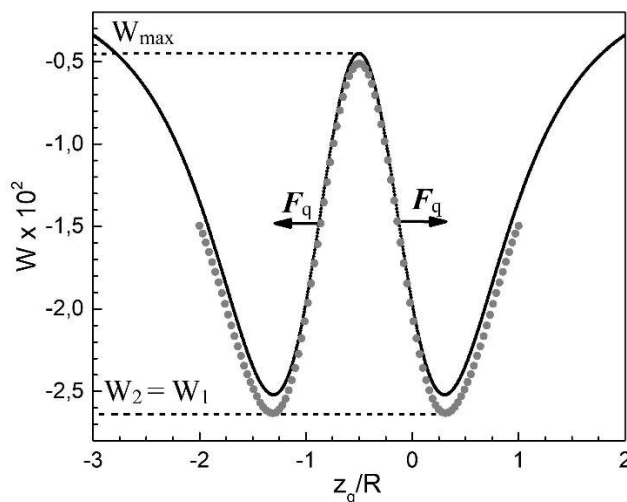
(а)



(б)



(в)



(г)

Рисунок 12. Схемы систем с коническим (а) и с цилиндрическим (в) электронейтральными проводниками. Символами R_1 и R_2 обозначены радиусы оснований усеченного конуса. L – длина усеченного конуса. (б) и (г) Энергия W как функция координаты точечного заряда z_q в системах усеченный конус (при $R_1=R$; $R_2=1,2R$; $L=R$) – точечный заряд q (б) и цилиндр (при $R_1=R_2=R$; $L=R$) – точечный заряд (г). Энергия W нормирована на $q^2/(4\pi\epsilon_0 R)$, где R – единица измерения для всех величин, имеющих размерность длины. Точки и линии обозначают результаты численного расчета первым и вторым методами, соответственно. Значения энергий в локальных минимумах обозначаются символами W_1 и W_2 ($|W_2| \leq |W_1|$). ΔW_1 – глубина потенциальной ямы большей глубины. Локальные минимумы W_1 и W_2 имеют координаты z_1 и z_2 , соответственно. Векторы F_q обозначают направление действующей на точечный заряд q силы отталкивания, в зависимости от его положения по отношению к локальному максимуму W_{\max} , имеющему координату z_{\max} .

Параметр γ обозначает разницу глубин потенциальных ям, нормированную на глубину самой глубокой ямы. Зависимость $\gamma(\alpha)$ представлена на рис.13б. Для цилиндрического проводника потенциальные ямы равны $W_1 = W_2$ (рис.12г), что соответствует точке $\alpha=\gamma=0$ на рис. 13б. Если усеченный конус обладает сильной асимметрией ($R_1 \ll R_2$ and $R_1 \ll L$), то $\alpha \gg 1$ и должны быть верными неравенства: $\beta \gg 1$; $\Delta W_1 \gg \Delta W_2$. В таком случае должно выполняться $\gamma \approx 1$. Поведение функций на $\beta(\alpha)$ рис.13а и $\gamma(\alpha)$ на рис.13б подтверждает данные рассуждения.

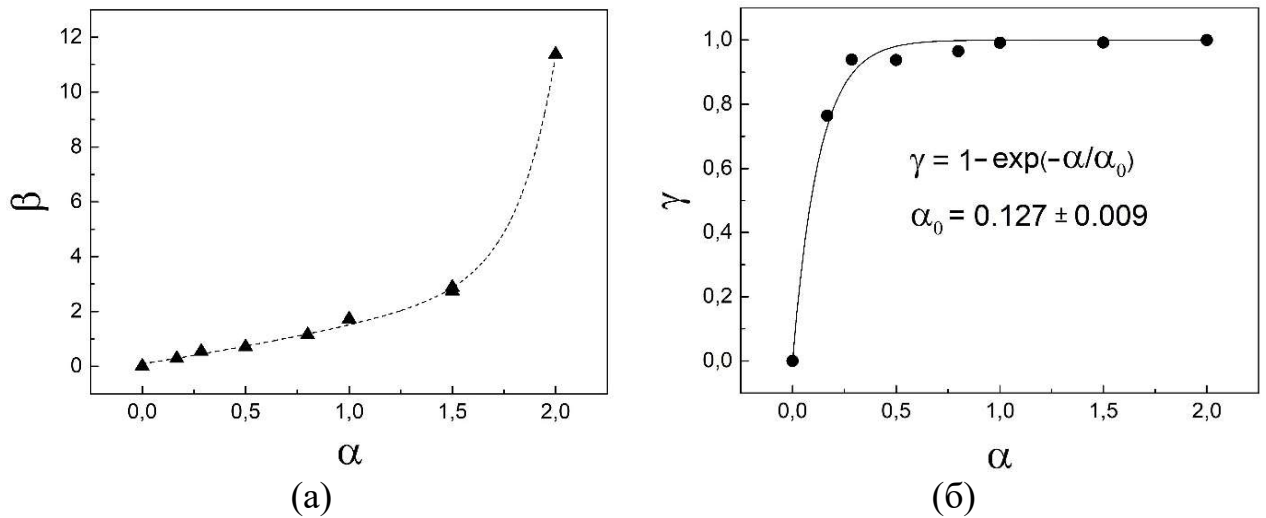


Рисунок 13. Зависимость параметров β (а) и γ (б) от параметра α при разных величинах R_1 , R_2 , L . Пунктирная линия построена с помощью сплайн-интерполяции. Сплошная линия является результатом применения процедуры NLSF в Origin 7.0.с использованием функции, указанной на графике.

3.5 Цилиндрический сегмент

Используемая в данной работе модель позволяет рассматривать не только аксиально-симметричные системы, какие были рассмотрены нами до настоящего момента. Рассмотрим задачу о взаимодействии электронейтрального проводящего цилиндрического сегмента высоты H и радиуса R с точечным зарядом q . Изображение системы представлено на рисунке 14а. Центр цилиндрического сегмента расположен в начале координат, точечный заряд находится на оси симметрии проводника. Данная система не обладает аксиальной симметрией, поэтому, согласно предложенной методике, проводник следует представить в виде системы из точечных зарядов (см. рис.3). На рисунке

146 представлены энергетические кривые $W(z_q)$ при разных отношениях H/R . При $H/R < 1,5$ зависимости обладают свойством немонотонности и наблюдается «эффект отталкивания», при $H/R > 1,5$ зависимости становятся монотонными, отталкивание исчезает.

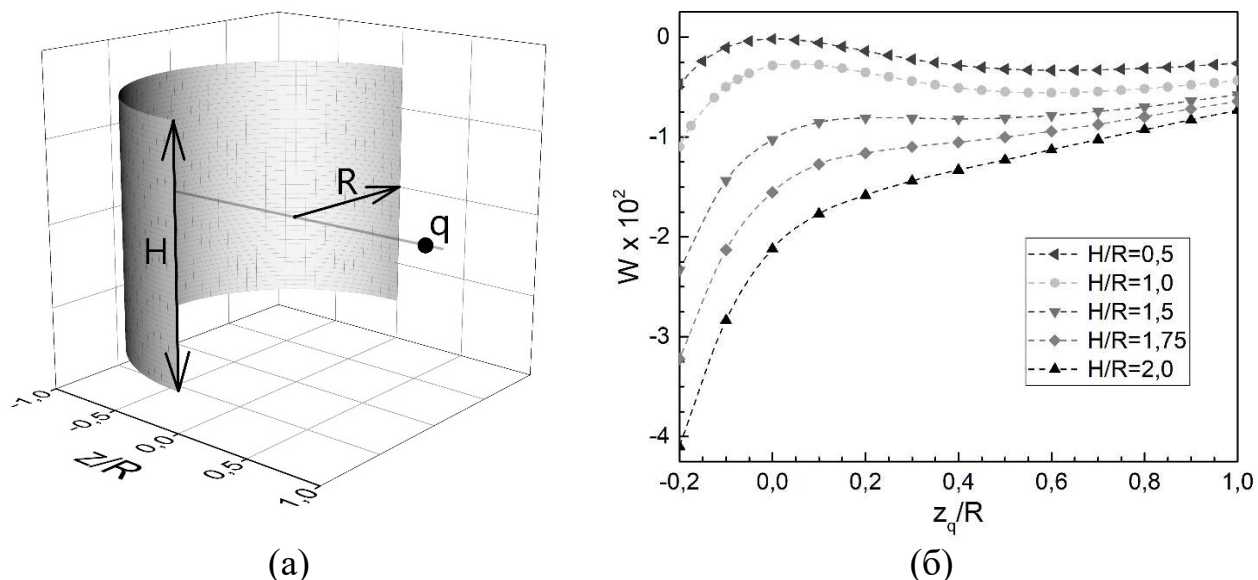


Рисунок 14. (а) Изображение системы, содержащей электронейтральный проводящий цилиндрический сегмент и точечный заряд q . Параметры H и R обозначают высоту и радиус цилиндрического сегмента, соответственно. (б) Энергия системы W как функция координаты точечного заряда z_q при различных значениях отношений H/R . Значения H/R для каждой кривой указаны в таблице. Результаты численного расчета, обозначенные точками, были получены с помощью первого метода. Штриховая линия соединяет соседние точки для лучшего восприятия. Энергия $W(z_q)$ нормирована на величину $q^2/(4\pi\epsilon_0 R)$.

Исчезновение отталкивания в данной системе можно объяснить исходя из следующих соображений. Увеличение высоты проводника H приводит к отдалению дальнего по отношению к точечному заряду q края проводника, на котором сконцентрирована большая часть индуцированных зарядов, вызывающих отталкивание; при этом ближний к точечному заряду q край проводника, на котором сконцентрирована большая часть индуцированных зарядов, вызывающих притяжение, не меняет своего положения. Таким образом, по мере увеличения параметра H вклад отталкивающей силы в результирующую

силу взаимодействия уменьшается, и при значении $H/R=1,5$ «эффект отталкивания» пропадает.

3.6 Заряженная полусфера

В предыдущих разделах было продемонстрировано появление эффекта отталкивания для незаряженных проводников различной формы в электростатическом поле точечного заряда. Возникает вопрос: возможно ли появление данного эффекта для тех же систем, если проводник будет заряжен? Предложенные в данной работе алгоритмы позволяют рассматривать как незаряженные $Q=0$, так и заряженные проводники $Q \neq 0$, например, заряженную полусферу в поле точечного заряда q . Система с незаряженной полусферой была уже рассмотрена в разделе 3.1. В случае заряженной полусферы, находящейся в поле точечного заряда, электростатический потенциал удобно рассматривать как суперпозицию двух функций $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$. Первая функция $\varphi_1(z)$ представляет точное решение для системы с электронеutralной полусферой [Levin,2011], а вторая $\varphi_2(z)$ – численное решение для изолированной заряженной полусферы в отсутствие точечного заряда q . Вторую функцию достаточно вычислить только один раз, для $Q=1$, а при рассмотрении проводников с полным зарядом $Q \neq 1$, достаточно просто умножить эту функцию на Q . Полученная в результате численного расчета первым методом функция $\varphi_2(z)$ позволяет найти значение электрической емкости полусферы, равное $0,823$. Это значение очень близко к точному результату $C/R=(1/2+1/\pi)=0,818$ [Snow, 1954].

Теперь посмотрим, как изменится характер взаимодействия полусферы с точечным зарядом q , если проводник будет слегка заряжен. На рисунке 15а представлены энергетические кривые $W(z_q)$ при $Q \neq 0$, где Q – величина полного заряда проводника.

При $Q_n < Q < 0$ ($Q_n = -0.052q$), что соответствует отрицательно заряженной полусфере, энергетическая кривая $W(z_q)$ характеризуется тремя областями I-III

(рис.15а): I и III соответствуют притяжению, а II отталкиванию. То есть, в случае, когда проводник имеет небольшой отрицательный полный заряд $Q < 0$, а точечный заряд q положительный, существует участок, где разноименно заряженные тела отталкиваются. Дальнейшее увеличение (рис.15б) по модулю отрицательного заряда проводника Q приводит к сближению максимума W_{\max} и минимума W_{\min} , и при значении $Q = Q_n$ экстремумы сходятся ($W_{\max} = W_{\min}; z_{\max} = z_{\min}$), что приводит к исчезновению области отталкивания II.

В случае положительно заряженной полусферы при $Q_p > Q > 0$ ($Q_p = 0.023q$) на энергетической кривой $W(z_q)$ можно выделить четыре характерные области I-IV (рис.15а). Области I, III и II, IV соответствуют притяжению и отталкиванию, соответственно. Значит для одноименно заряженных тел, когда проводник с полостью имеет полный заряд небольшой величины $Q_p > Q > 0$, возможно обнаружение двух отдельных областей притяжения: одну вблизи границы проводника (область I), а вторую на конечном расстоянии сравнимом с размером самого проводника (область III). При увеличении полного заряда проводника Q , локальный минимум W_{\min} и правый локальный максимум W^*_{\max} начинают сближаться (рис.15в,г), и начиная с величины $Q = Q_p$ полностью исчезают ($W_{\min} = W^*_{\max}; z_{\min} = z^*_{\max}$). В результате, при $Q > Q_p$ соответствующая притяжению область III исчезает.

На рисунке 16 представлены зависимости всех координат экстремумов z_{\max} , z_{\min} и z^*_{\max} от величины полного заряда проводника Q . Минимум z_{\min} и правый максимум z^*_{\max} (см. рис.15а) существуют в конечных интервалах Q : (Q_n, Q_p) и $(0, Q_p)$, соответственно. Левый максимум z_{\max} (см. рис.15а) наблюдается для всех значений Q , превышающих Q_n .

Таким образом, на примере системы с заряженной проводящей полусферой и точечным зарядом было показано, что наличие полости в проводнике может привести к появлению двух необычных эффектов: притяжению одноименно заряженных тел (на конечном, а не бесконечно малом расстоянии между телами) и отталкиванию разноименно заряженных тел. Отметим, что данные эффекты

проявляются только в ограниченных диапазонах полного заряда проводника Q , когда он не слишком большой.

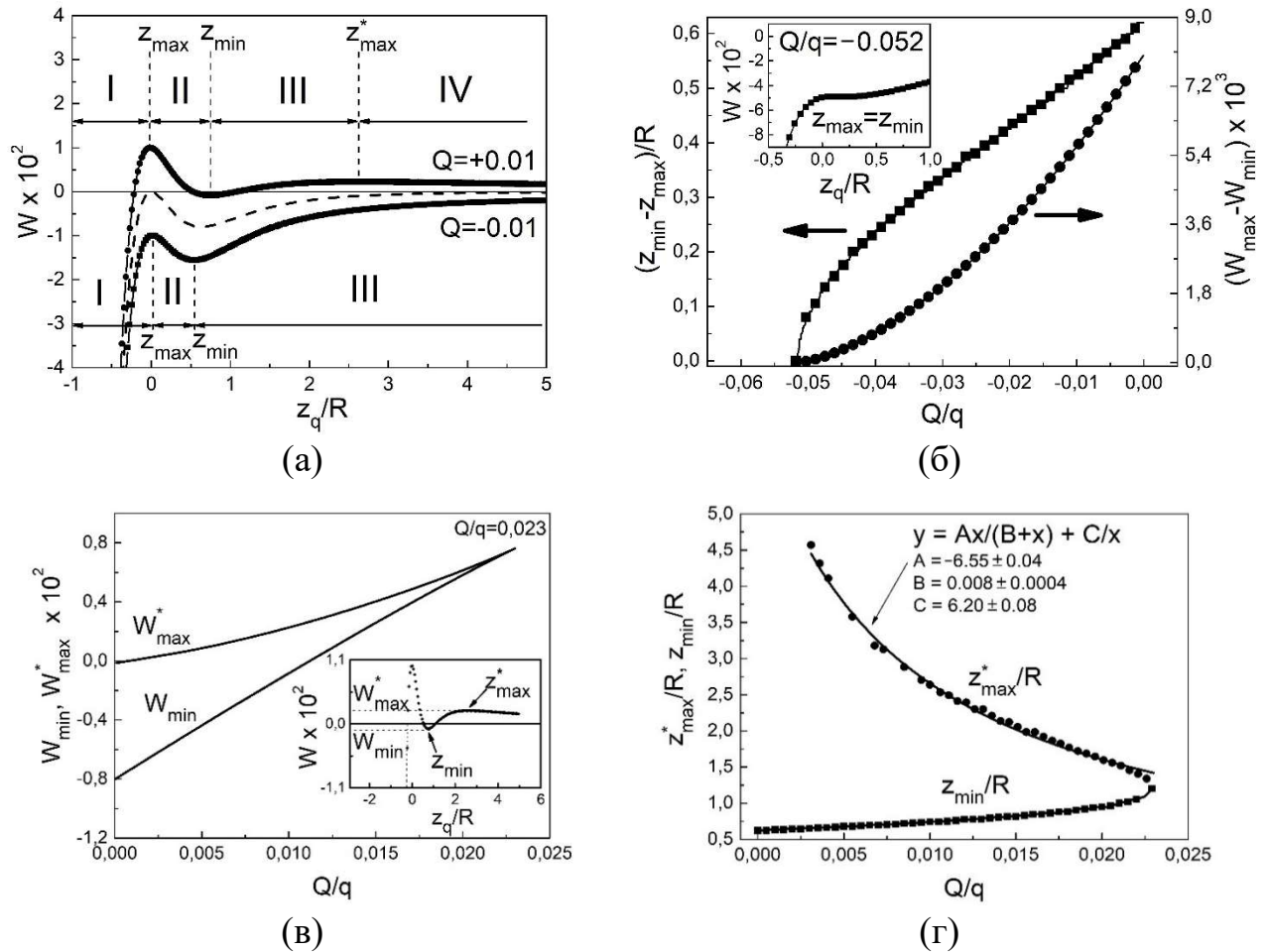


Рисунок 15. (а) Зависимость энергии W взаимодействия между заряженной полусферой и точечным зарядом q от координаты точечного заряда z_q . Q – полный заряд полусферы. Энергия $W(z_q)$ нормирована на величину $q^2/(4\pi\epsilon_0 R)$, где R – радиус полусферы. Верхняя и нижняя энергетические кривые соответствуют значениям полного заряда проводника $Q/q=0.01$ и $Q/q=-0.01$, соответственно. Пунктирная линия обозначает точное решение для электронейтральной ($Q=0$) полусферы [Levin, 2011]. Нумерация I–IV обозначает области, соответствующие разным знакам силы взаимодействия F_q . Области I, III и II, IV отвечают притяжению и отталкиванию, соответственно. Вертикальные пунктирные прямые обозначают локальные экстремумы W_{\min} , W_{\max} , W^*_{\max} в координатах z_{\min} , z_{\max} , z^*_{\max} , соответственно. (б) Зависимости $z_{\min}-z_{\max}$ (левая кривая) и $W_{\max}-W_{\min}$ (правая кривая) от $Q < 0$. Во вставке показана кривая энергии для $Q=-0,052$, когда локальные минимум и максимум сходятся ($z_{\min}=z_{\max}$) и исчезают (см. нижнюю кривую в (а)). (в) Зависимости W_{\min} и W^*_{\max} от $Q > 0$. Во вставке показана энергетическая кривая $W(z_q)$ для $Q=0,01$ в большом масштабе. При $Q/q=0,023$ экстремумы W^*_{\max} и W_{\min} сходятся и область III (см. рисунок (а)) исчезает. (г) Зависимости z_{\min} и z^*_{\max} от $Q > 0$. Сплошная линия - результат применения процедуры NLSF в Origin 7.0.с использованием функции, указанной на графике.

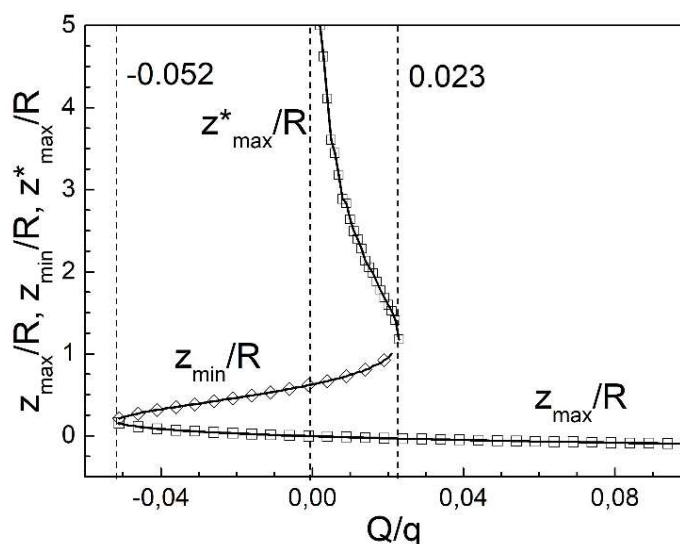


Рисунок 16. Зависимости z_{\max} , z_{\min} и z^*_{\max} (см. рис. 15а) от Q . Пунктирные прямые обозначают области существования экстремумов z^*_{\max} , z_{\min} , z_{\max} на оси Q . Критические точки: $Q=Q_n=-0,052$, $Q=0$ и $Q=Q_p=0,023$.

3.7 Полусфера конечной толщины

До этого рассматривались тонкостенные проводники. Теперь посмотрим, как изменится характер взаимодействия, если отказаться от этой идеализации и перейти к рассмотрению проводников конечной толщины. Рассмотрим систему с проводящей полусферой радиуса R толщины t в поле точечного заряда q . На рисунке 17а изображена двумерная схема представления полусферы в виде колец C_i . Так как в проводниках все заряды расположены на поверхности (отсутствуют объемные заряды), то набор колец должен представлять только границу проводника (см. рис. 17а).

На рисунке 18б представлены энергетические кривые $W(z_q)$ при разных толщинах t проводника. Видно, что при увеличении толщины проводника кривые становятся монотонными и отталкивание перестает наблюдаться. Это связано с тем, что при достаточно больших толщинах t положительным индуцированным зарядом, вызывающим отталкивание, становится энергетически выгоднее располагаться на дальней к точечному заряду, внешней, поверхности проводника, а отрицательным - на внутренней поверхности проводника, ближней к точечному заряду. Таким образом, при увеличении t фактор геометрии

становится менее существенным, и наличие полости в проводнике не приводит к появлению эффекта отталкивания.

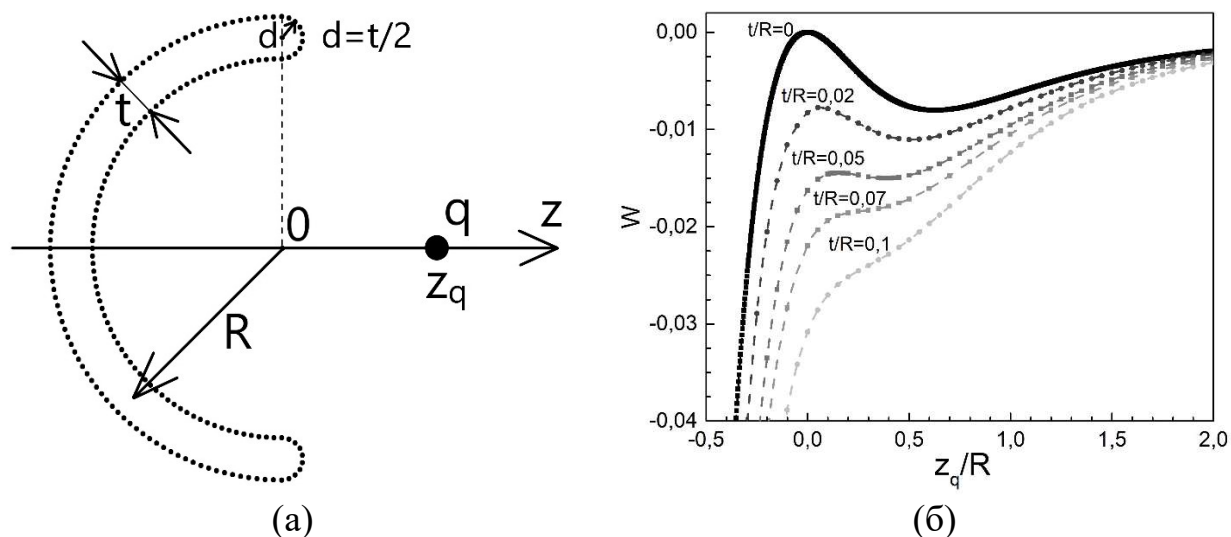


Рисунок 17. (а) Схема представления в виде равномерно заряженных тонких колец электронейтральной проводящей сферы конечной толщины t , находящейся в поле точечного заряда q . d – радиус закругления края полусферы. (б) Энергия системы W как функция координаты точечного заряда z_q при разной толщине проводника t . Значения t в единицах радиуса полусферы R указаны над каждой кривой. Энергия $W(z_q)$ нормирована на величину $q^2/(4\pi\epsilon_0 R)$. Энергетическая кривая при $t=0$ соответствует точному решению [Levin, 2011]. Точки обозначают результат численного расчета первым методом. Штриховые линии обозначают результат интрполяции.

3.8 Полусфера в поле диполя

Теперь рассмотрим тонкостенную проводящую электронейтральную полусферу радиуса R в поле диполя \vec{p} . На рисунке 18а представлена схема расположения диполя по отношению к проводнику. Диполь состоит из двух точечных зарядов $q_+ > 0$ и $q_- < 0$ ($q_+ = |q_-|$). z_{qL} и z_{qR} – координаты левого и правого концов диполя. На рисунке 18б представлен энергетические кривые $W(z_{qL})$ при разных длинах диполя p . Увеличению длины диполя p приводит к увеличению глубины локального минимума $|W_{\min}|$ и уменьшению координаты минимума $z_{qL\min}$. Причем, как показано на рисунках 18в,г, при относительно малых длинах диполя p увеличение $|W_{\min}|$ происходит по степенному закону, а координата $z_{qL\min}$ убывает экспоненциально. В предельном случае бесконечно

длинного диполя ($p \rightarrow \infty$) величины $|W_{\min}|$ и $z_{qL\min}$ такие же, как и при взаимодействии с точечным зарядом, так как воздействие на полусферу дальнего заряда, входящего в состав диполя пренебрежимо мало.

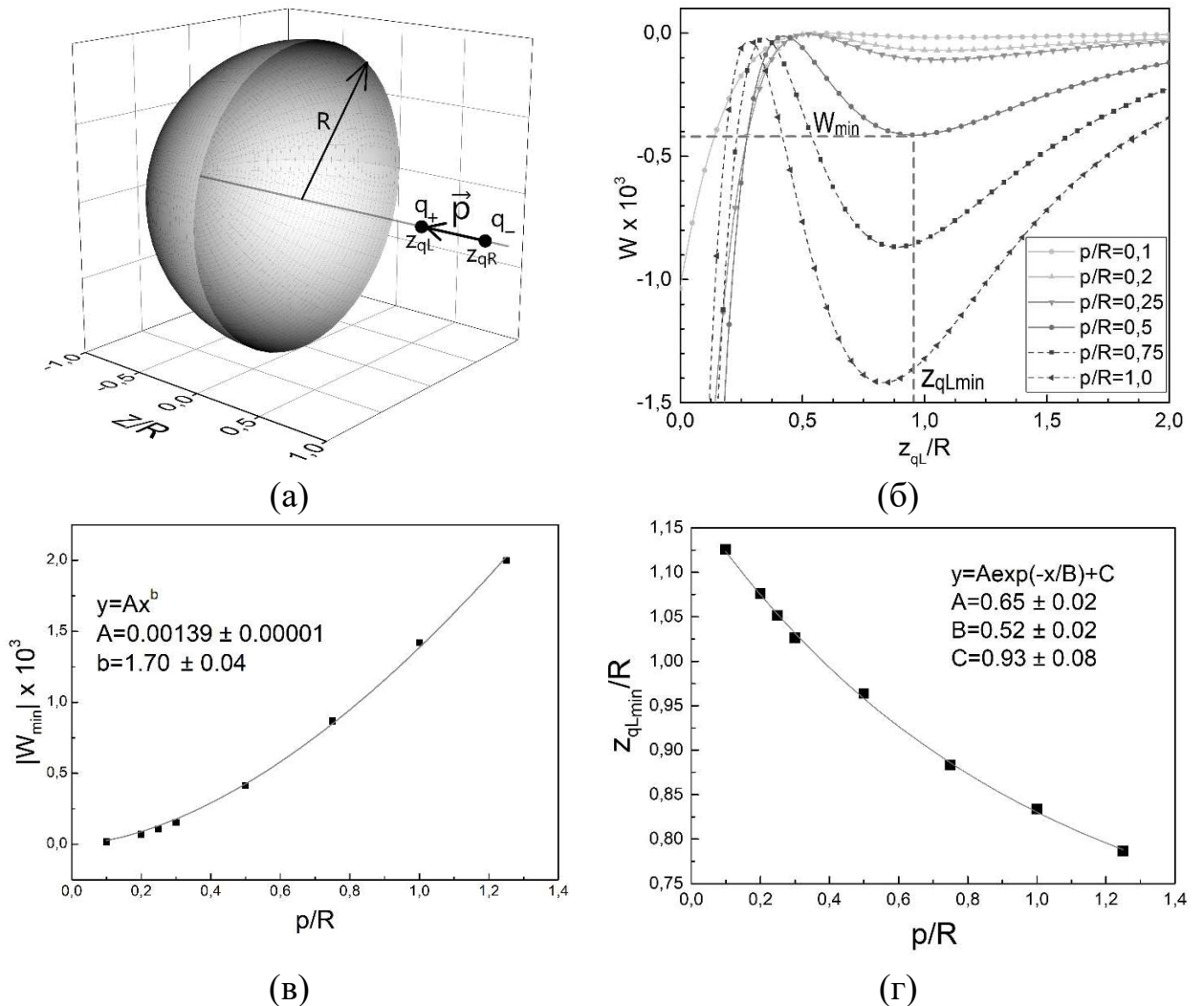


Рисунок 18. (а) Изображение системы, содержащей электронейтральную проводящую полусферу и диполь \vec{p} (два точечных заряда q_+ и q_-). z_{qL} и z_{qR} — координаты левого и правого концов диполя, соответственно. (б) Энергия системы W как функция координаты левого конца диполя z_{qL} при различных длинах диполя p . Значения длин диполя p для каждой кривой указаны в таблице. Энергия $W(z_q)$ нормирована на величину $q_+^2/(4\pi\epsilon_0 R)$, где R — радиус полусферы. Точки обозначают результаты численного расчета первым методом. Пунктирная линия — результат интерполяции. (в) и (г) Зависимости модуля энергии локального минимума $|W_{\min}|$ (в) и координаты локального минимума $z_{qL\min}$ (г) от длины диполя p . Энергия $|W_{\min}|$ нормирована на величину q^2/R . Сплошная линия является результатом применения процедуры NLSF в Origin 7.0.c использованием функций, указанных на графиках.

Отметим, что данную задачу можно также решить аналитически, воспользовавшись моделью эквивалентных зарядов, согласно которой проводящая полусфера может быть представлена в виде равномерно заряженного кольца и заряда (см. рис.6а). Вследствие принципа суперпозиции, равновесное распределение заряда на нейтральной полусфере в поле диполя равно сумме равновесных зарядов для двух задач, каждая из которых соответствует задаче о полусфере в поле одного из зарядов диполя (q_+ или q_-). В рамках модели эквивалентных зарядов известно распределение зарядов на полусфере при различных координатах точечного заряда z_q . Данное распределение представлено во вставке к рисунку 6б. Для положительного q_+ и отрицательного q_- зарядов диполя различны величины координаты z_q на этом рисунке, поэтому заряд равномерно заряженного кольца и заряда в модели эквивалентных зарядов будет определяться разностью зарядов $Q(z_q)$, соответствующих разным координатам положительного z_{qL} и отрицательного z_{qR} концов диполя. Энергия системы в таком случае может быть записана в виде:

$$W = q_- \frac{(Q(z_{qL}) - Q(z_{qR}))}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{z_{qL}^2 + R^2}} - \frac{1}{z_{qL} + R} \right) + \quad (54)$$

$$+ q_+ \frac{(Q(z_{qL}) - Q(z_{qR}))}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{z_{qR}^2 + R^2}} - \frac{1}{z_{qR} + R} \right).$$

3.9 Модель эквивалентных зарядов. Поиск локального минимума

Вернемся к уже рассмотренным в разделах 3.2 и 3.3 системам с проводниками, имеющими форму полуэллипсоида вращения (рис.19а) и сферы с отверстием (рис.20а), и определим для этих систем координаты локальных минимумов z_{\min} на энергетических кривых $W(z_q)$ в рамках модели эквивалентных зарядов. Как уже отмечалось в разделе 2.3, для этого необходимо приравнять

нулю выражение для результирующей силы F_q , действующей на точечный заряд q , и решить полученное нелинейное уравнение для координаты z . В случае полуэллипсоида вращения с полуосями a и b (рис.19а) результирующая сила, действующая на точечный заряд q , определяется как

$$F_q = F_{Q_+} + F_{Q_-} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(q \frac{Q}{(z+a)^2} - zq \frac{Q}{(z^2+b^2)^{3/2}} \right). \quad (55)$$

В случае сферы с отверстием результирующая сила, действующая на точечный заряд q (см. рис.20а) равна:

$$F_q = F_{Q_+} + F_{Q_-} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(q \frac{Q}{(z+R)^2} - (z-z_h)q \frac{Q}{(z^2-2zz_h+R^2)^{3/2}} \right). \quad (56)$$

Сила (55) или (56), действующая на точечный заряд q , равна нулю при $z=z_{\min}$, то есть, когда положение точечного заряда соответствует локальному минимуму. Приравнявая выражения (55) и (56) нулю, получаем нелинейные уравнения для нахождения $z=z_{\min}$ в случае полуэллипсоида вращения (57) и усеченного сферического проводника (58):

$$(a+z)^2 z = (b^2+z^2)^{3/2} \quad (57)$$

$$(z-z_h)(z+R)^2 = (z^2-2zz_h+R^2)^{3/2} \quad (58)$$

Сравнение результатов решения уравнений (57) и (58) с результатами численных расчетов (см. разделы 3.2 и 3.3) представлены на рис.19б и рис.20б соответственно. В случае полуэллипсоида вращения значения z_{\min} , полученные численно и в рамках модели эквивалентных зарядов, в результате решения уравнения (57), находятся в хорошем соответствии, если отношение полуосей a/b близко к 1 (рис.19б). В случае усеченной сферы значения z_{\min} , рассчитанными численно и полученные из уравнения (58), хорошо согласуются для всех координат отверстий z_h (рис.20б).

Как показано на рис.20б, координата локального минимума z_{\min} в пределе при $z_h/R \rightarrow -1$ стремятся к $z_{\min}=0,5R$. То, что $z_{\min}=0,5R$ является особой точкой можно показать, выразив производную dz/dz_h из уравнения (58) и приравнять её нулю. Для получения производной можно взять дифференциалы правой и левой

части уравнения (58) и сгруппировать слагаемые, содержащие dz и dz_h по разные стороны равенства и поделить одну часть равенства на другую:

$$\frac{dz}{dz_h} = \frac{\left((z + R)^2 - 3z\sqrt{z^2 - 2zz_h + R^2} \right)}{\left((z + R)^2 + (z - z_h)\left(2(z + R) - 3\sqrt{z^2 - 2zz_h + R^2} \right) \right)} = 0 \quad (59)$$

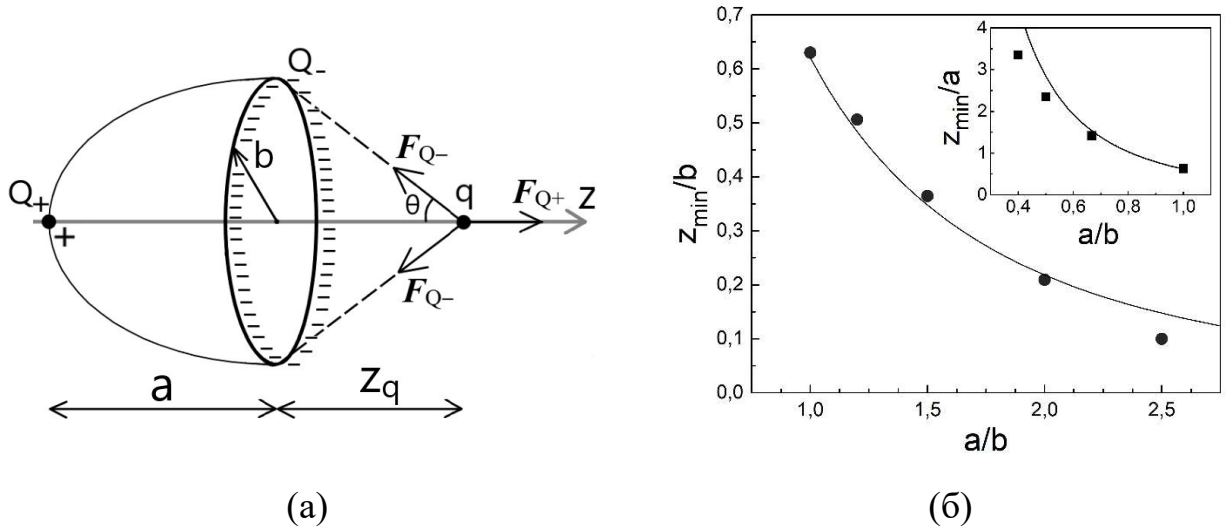


Рисунок 19. (а) Схема представления тонкостенного электронеutralного проводящего полуэллипсоида вращения, находящегося в поле точечного заряда q , в виде равномерно заряженного тонкого кольца Q_- и точечного заряда Q_+ . Символами “+” и “-” обозначены положительные и отрицательные индуцированные заряды, соответственно. z_q – координата точечного заряда. Векторы F_{Q_-} и F_{Q_+} показывают направление сил, действующих на точечный заряд q со стороны индуцированных зарядов Q_- и Q_+ , соответственно; θ – угол между вектором силы F_{Q_-} и осью z . Символы a и b обозначают полуоси полуэллипсоида. (б) Зависимости z_{\min} от отношения полуосей a/b для вытянутого (круглые точки) и сжатого (квадратные точки во вставке) полуэллипсоидов. Сплошные линии представляют численное решение уравнения (57).

Приравнивая нулю числитель уравнения (59), получаем:

$$(z + R)^2 - 3z\sqrt{z^2 - 2zz_h + R^2} = 0 \quad (60)$$

Подставляем $z_h = -R$ в уравнение (60):

$$(z + R)^2 - 3z(z + R) = 0 \quad (61)$$

Поскольку $z \neq -R$, данное уравнение упрощается:

$$z + R - 3z = 0 \quad (62)$$

Отсюда получаем

$$z_{\min} = R/2 \quad (63)$$

Данный результат подтверждает правильность численных расчетов координаты локального минимума z_{\min} при z_h/R близких к -1 (рис.20б).

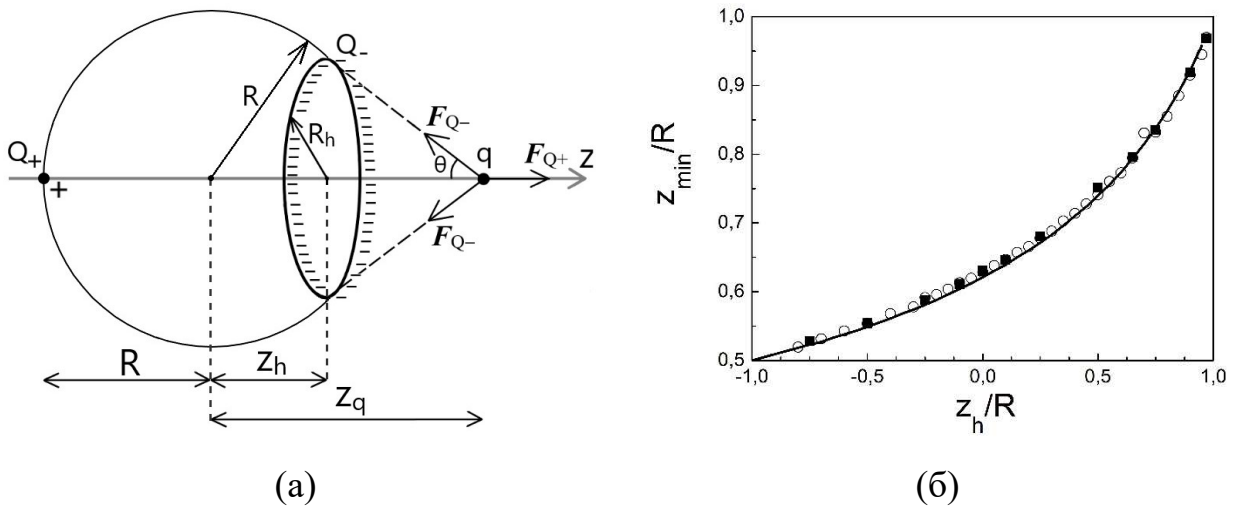


Рисунок 20. (а) Схема представления тонкостенной электронейтральной проводящей сферы с отверстием, находящейся в поле точечного заряда q , в виде равномерно заряженного тонкого кольца Q_- и точечного заряда Q_+ (см. пояснение к рис.19а). z_h – координата точечного заряда. (б) Зависимость z_{\min} от z_h . Сплошная линия представляет численное решение уравнения (58). Результаты расчета первым и вторым методом обозначены квадратными и круглыми точками, соответственно.

4. Магнитная полусфера в магнитном поле диполя

Последняя задача посвящена магнитостатике. Рассмотрим однородный магнетик конечной толщины t , имеющий форму полусферы и находящийся в поле магнитного диполя \vec{m} . Поскольку в рассматриваемых задачах отсутствуют токи проводимости $\vec{j}_c = 0$, удобно воспользоваться формализмом фиктивных магнитных зарядов (ФМЗ). На рисунке 21а изображена двумерная схема расчета магнитного поля на поверхности магнетика (см. раздел 2). Магнитный диполь \vec{m} представлен в виде двух зарядов q'_+ и q'_- . Так как в однородных магнетиках объемные ФМЗ отсутствуют, есть только поверхностные ФМЗ, то набор колец C_i

($i=1, 2, \dots, N$) должен представлять только границу магнетика (см. рис.21а), подобно тому как это было сделано для проводников (см. рис.17а).

На рисунке 21б представлены зависимости энергии взаимодействия W парамагнитной полусферы ($\mu=3$) с магнитным диполем \vec{m} от координаты левого края диполя z_{qL} при разных длинах диполя m и фиксированной толщине $t=0,02R$. Малая толщина полусферы t выбрана для того, чтобы зафиксировать «эффект отталкивания», который, как было показано в разделе 3.7 на проводниках, исчезает с увеличением толщины исследуемого тела. Все энергетические кривые $W(z_{qL})$ (рис. 21б) монотонно возрастают, то есть отталкивание не проявляется при исследованных параметрах системы. «Эффект отталкивания» должен наблюдаться при больших магнитных проницаемостях μ , так как в предельном случае $\mu \rightarrow \infty$ магнетик можно формально считать проводником, для которого, как было показано ранее, искомый эффект уже наблюдается.

В результате решения магнитостатических задач было обнаружено, что при больших значениях магнитных проницаемостей ($\mu > 10$) с помощью разработанной программы не удастся получить равновесное распределение ФМЗ и достичь выполнения граничных условий. Таким образом сложность состоит в решении подобных задач при больших значениях μ . Возможно, в данном случае при расчете поля на границе магнетика начинает сказываться сделанное допущение, заключающееся в представлении участка поверхности магнетика вблизи каждой точки расчета в виде плоской площадки радиуса r , вклад от которой рассчитывался по формуле для равномерно заряженной бесконечной плоскости (см. раздел 2.2). Данный прием позволяет избежать сингулярности поля вблизи элементов разбиения (колец или точечных зарядов). Для решения данной проблемы можно попробовать увеличить количество элементов разбиения N , что позволит уменьшить размер выделяемых площадок и таким образом минимизировать их вклад в суммарное поле. Однако такой подход приведет к существенному возрастанию и без того большого времени вычислений (в среднем при $N=2000$ одна энергетическая кривая $W(z_q)$

вычисляется в течение суток на стандартном персональном компьютере). Другая причина, не позволяющая достичь равновесного распределения ФМЗ, может быть связана с самим алгоритмом минимизации. Возможно, следует изменить минимизируемую функцию или выбрать другой метод минимизации.

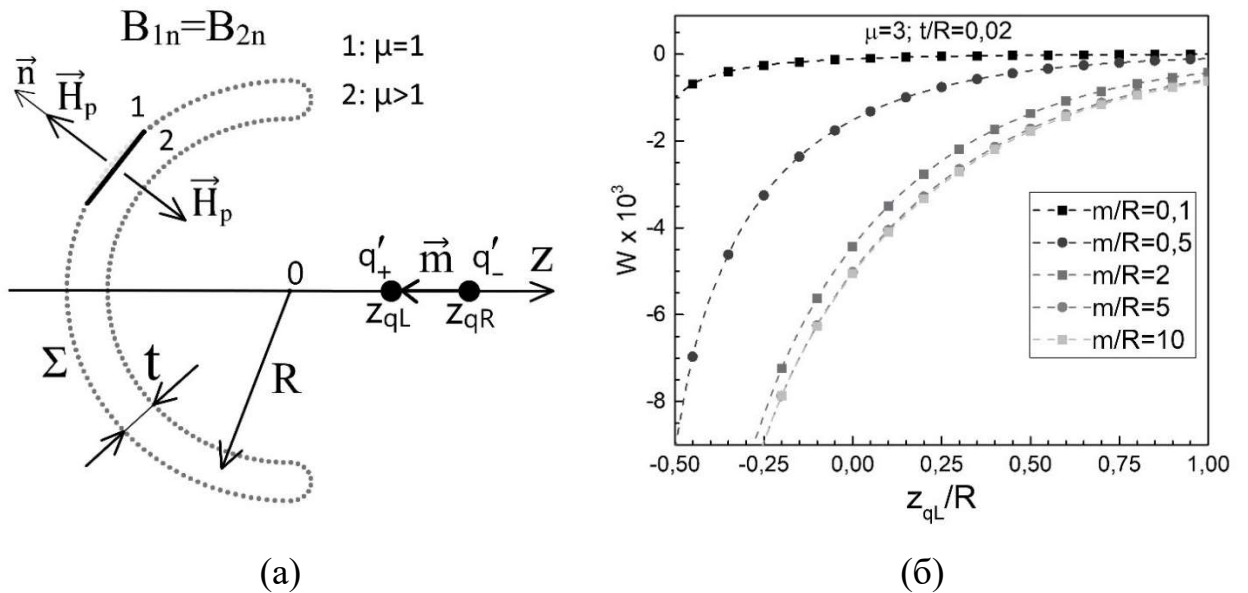


Рисунок 21. (а) Схема расчета напряженности магнитного поля на поверхности магнитной полусферы радиуса R конечной толщины t в рамках формализма ФМЗ. Магнетик находится в поле магнитного диполя \vec{m} , представленного в виде двух ФМЗ q'_+ и q'_- . z_{qL} и z_{qR} – координаты левого и правого концов магнитного диполя, соответственно. (б) Энергия системы W в зависимости от координаты левого конца диполя z_{qL} при различных длинах диполя m . Энергия $W(z_{qL})$ нормирована на величину $(q'_+)^2/(4\pi R)$. Точками обозначены результаты численного расчета. Штриховые линии построены в результате интерполяции интерполяции. Значения длины диполя m для каждой кривой указаны в таблице. Во всех случаях толщина сферы $t=0,02R$, магнитная проницаемость $\mu=3$.

Предложенная в данной работе модель позволяет определять распределение намагниченности \vec{M} внутри магнетика, воспользовавшись формулой:

$$\vec{M} = (\mu - 1)\vec{H}, \quad (64)$$

где напряженность магнитного поля \vec{H} вычисляется согласно предложенному алгоритму (см. раздел 2).

На рисунках 22а,б показано рассчитанное таким образом распределение намагниченности для парамагнитной (рис.22а) и диамагнитной (рис.22б) полусферы. Стрелочки указывают направление и величину намагниченности \vec{M} в разных точках внутри магнетика. Видно, что в случае парамагнитной полусферы (рис.22а) намагниченность направлена преимущественно в сторону внешнего магнитного поля, создаваемого магнитным диполем \vec{m} ; в случае диамагнитной полусферы (рис.22б), наоборот, намагниченность направлена в сторону противоположную внешнему магнитному полю.

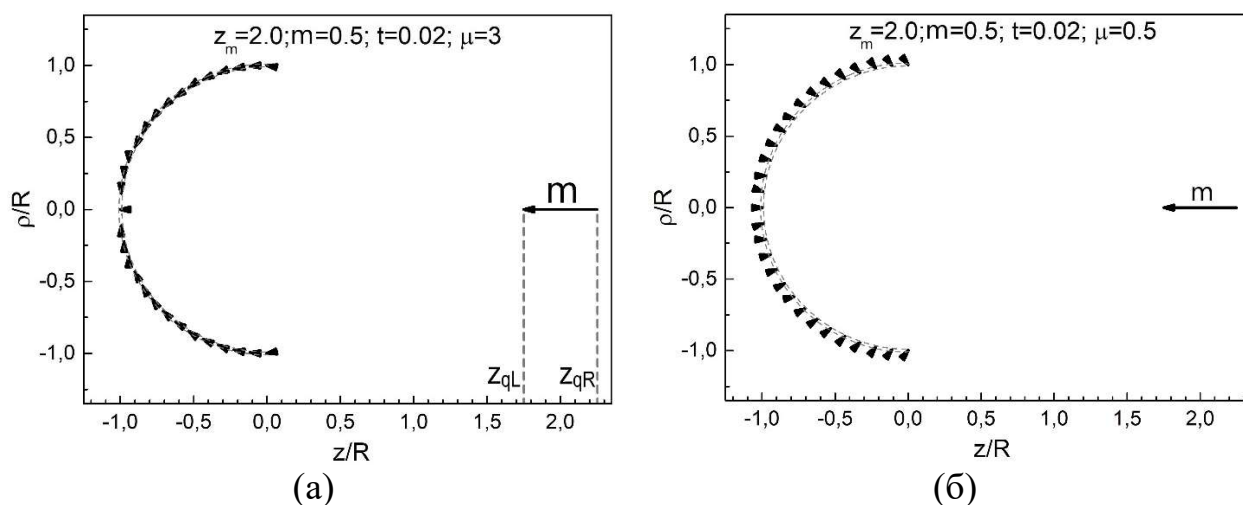


Рисунок 22. (а) и (б) Распределение намагниченности внутри парамагнитной (а) и диамагнитной (б) полусфер, находящихся в поле магнитного диполя \vec{m} . Параметры системы указаны на верхней части рисунка. z_p – координата центра диполя, m – длина диполя. Стрелки отображают направление и величину намагниченности внутри магнетика.

Заключение

В результате выполнения данной работы были исследованы различные системы, содержащие проводящие и магнитные тела с полостью, взаимодействующие либо с точечным зарядом, либо с электрическим или магнитным диполем. С этой целью были разработаны физические модели и необходимые программы.

Показано, что «эффект отталкивания», впервые обнаруженный в работе [Levin, 2011], существенно зависит от формы проводника как заряженного, так и электронейтрального. Для проводника, имеющего форму сжатого полуэллипсоида, увеличение его эксцентриситета приводит к постепенному исчезновению эффекта отталкивания. Для проводника, имеющего форму сферы с отверстием, «эффект отталкивания» сильно зависит от положения отверстия относительно центра сферы: сила отталкивания будет наибольшей в случае почти замкнутой сферы с незначительным диаметром отверстия. Для проводящего усеченного конуса, проводника со сквозным отверстием, обнаружены два энергетических минимума, а значит и две области отталкивания, локализованные вблизи противоположных краев отверстия. В задаче с проводящим цилиндрическим сегментом, продемонстрирован способ исследования систем без аксиальной симметрии, где также наблюдается «эффект отталкивания».

Для некоторых систем удалось получить аналитические формулы в рамках модели эквивалентных зарядов. Данная модель позволяет представить непрерывное распределение индуцированных зарядов на поверхности проводника в виде набора дискретных элементов. Помимо того, что такое представление позволяет записать поле проводника в компактном виде, оно также дает возможность с хорошей точностью определить положение точечного заряда, при котором энергия системы будет достигать своего минимума.

На примере системы с проводящей полусферой показано влияние толщины и полного заряда проводника на «эффект отталкивания». В случае одноименно заряженных тел, когда проводник имеет малый полный заряд, в данной системе наблюдаются две области притяжения и две области отталкивания. В случае разноименно заряженных тел «эффект отталкивания» продолжает существовать при малой величине полного заряда проводника. Увеличение толщины проводника приводит к постепенному исчезновению эффекта отталкивания. Кроме того, было рассмотрено взаимодействие электронейтральной полусферы с диполем: увеличение длины диполя приводит к увеличению глубины минимума энергии.

Рассмотрена аналогичная магнитостатическая задача, где вместо проводящей полусферы используется магнитная полусфера, а вместо электрического точечного заряда магнитный диполь. Предсказано, что «эффект отталкивания» подобный тому, что был обнаружен для проводящих тел, для тонкостенной магнитомягкой полусферы возникает при больших значениях магнитной проницаемости μ , в этом случае мягкий магнетик аналогичен электронейтральному проводнику.

К нерешенным задачам можно отнести поиск значения магнитной проницаемости μ , при котором начинает появляться «эффект отталкивания» в системе с парамагнитной полусферой и магнитным диполем.

Выводы

1) Показана эффективность применения интегро-дифференциального подхода к решению задач электро- и магнитостатики в системах проводников, диэлектриков и магнетиков с полостью.

2) Выявлены условия, необходимые для появления и исчезновения эффекта отталкивания в различных системах с полостью.

3) Показано, что общим требованием для проявления эффекта отталкивания во всех системах является наличие полости и тонкостенность тела, отталкивающего заряд или диполь. При увеличении толщины стенки тела с полостью «эффект отталкивания» исчезает.

4) В системе с слабозаряженной полусферой обнаружен необычный «эффект притяжения», состоящий в притяжении одноименно заряженного проводника и точечного заряда на конечном, а не «бесконечно» близком расстоянии.

5) Предсказано, что для тонкостенной полусферы из линейного изотропного магнетика (или диэлектрика) «эффект отталкивания» возникает при больших значениях проницаемости μ (или ϵ). Для малых (<10) значений проницаемости этот эффект не обнаружен.

Список литературы

- Алешкевич В.А. “Электромагнетизм”. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014, 86-87 (2014).
- Гринберг Г.А. "Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений" (1948).
- Джексон Дж. "Классическая электродинамика" М.: Мир (1962).
- Тихонов А.Н., Самарский А.А. “Уравнения математической физики”, Москва (1977).
- Bachas C. P. (2007), *Comment on the sign of the Casimir force*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 40(30), 9089–9096. doi:10.1088/1751-8113/40/30/028
- Binns K.J., Lawrenson P.J., *Analysis and Computation of Electric and Magnetic Field Problems*, Pergamon, Oxford, 1973.
- Ciftja O. (2019), *Electrostatic interaction energy between two coaxial parallel uniformly charged disks*, Results in Physics, 15, 102684. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2019.102684>
- Ciftja O. (2020), *Results for charged disks with different forms of surface charge density*, Results in Physics, 102962. doi:10.1016/j.rinp.2020.102962
- Ciftja O. (2021), *Electrostatic potential energy stored in a hemispherical surface with uniform surface charge distribution*, Journal of Electrostatics, 111, 103579. doi:10.1016/j.elstat.2021.103579
- Durand E., *Electrostatique*, Tomes I-III, Paris, Masson, 1966.
- Fulling S. A., Kaplan L., Wilson J. H. (2007), *Vacuum energy and repulsive Casimir forces in quantum star graphs*, Physical Review A, 76(1). doi:10.1103/physreva.76.012118
- Jefimenko O. D. (1983). *New method for calculating electric and magnetic fields and forces*. *American Journal of Physics*, 51(6), 545–551. doi:10.1119/1.13200
- Good R. H. (1997), *Comment on “Charge density on a conducting needle,” by David*

J. Griffiths and Ye Li [Am. J. Phys. 64(6), 706–714 (1996)], American Journal of Physics, 65(2), 155–156. doi:10.1119/1.18786

Griffiths D. J., Introduction to Electrodynamics, 3rd ed. Prentice-Hall, New Jersey, 1999, p.124, p.555.

Griffiths D. J., Li Y. (1996), *Charge density on a conducting needle*, American Journal of Physics, 64(6), 706–714. doi:10.1119/1.18236

Grushin A. G., Cortijo A. (2011), *Tunable Casimir Repulsion with Three-Dimensional Topological Insulators*, Physical Review Letters, 106(2).doi:10.1103/physrevlett.106.02040

Jackson J. D., Classical Electrodynamics, 1st ed, John Wiley & Sons, New York, 1962, p.89.

Kenneth O., Klich I. (2006). *Opposites Attract: A Theorem about the Casimir Force*, Physical Review Letters, 97(16).doi:10.1103/physrevlett.97.160401

Klimchitskaya G. L., Mohideen U., Mostepanenko V. M. (2009), *The Casimir force between real materials: Experiment and theory*, Reviews of Modern Physics, 81(4), 1827–1885.doi:10.1103/revmodphys.81.1827

Kolikov K., Ivanov D., Krastev G., Epitropov Y., Bozhkov S. (2012), *Electrostatic interaction between two conducting spheres*, Journal of Electrostatics, 70(1), 91–96. doi:10.1016/j.elstat.2011.10.008

Lekner J. (2009), *Axially symmetric charge distributions and the arithmetic–geometric mean*, Journal of Electrostatics, 67(6), 880–885. doi:10.1016/j.elstat.2009.07.007

Lekner J. (2022), *Electrostatics of two charged cylinders*, Journal of Electrostatics, 118, 103721, <https://doi.org/10.1016/j.elstat.2022.103721>

Levin M., McCauley A. P., Rodriguez A. W., Homer Reid M. T., Johnson S. G. (2010), *Casimir Repulsion between Metallic Objects in Vacuum*, Physical Review Letters, 105(9).doi:10.1103/physrevlett.105.0904

Levin M., Johnson S. G. (2011), *Is the electrostatic force between a point charge and a neutral metallic object always attractive?*, American Journal of Physics, 79(8), 843–849.doi:10.1119/1.3595554

- Lindgren E. B., Chan Ho-Kei, Stace A. J., Besley E. (2016), *Progress in the theory of electrostatic interactions between charged particles*, Physical Chemistry Chemical Physics, 18(8), 5883–5895. doi:10.1039/c5cp07709e
- Munday J. N., Capasso F., Parsegian V. A. (2009), *Measured long-range repulsive Casimir–Lifshitz forces*, Nature, 457(7226), 170–173. doi:10.1038/nature07610
- Press W. H., Flannery B.P., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. (1992), *Numerical Recipes in C*, 2nd Ed ., Cambridge University Press, 1992.
- Savin V.P., Koksharov Yu.A. "Electrostatic repulsion between an uncharged or slightly charged conductor and a point charge" Journal of Electrostatics 120 (2022) 103769
- Smythe W.R., *Static and Dynamic Electricity*, 3rd ed., Taylor & Francis, Bristol, USA, 1989.
- Snow C., “Formulas for Computing Capacitance and Inductance” National Bureau of Standards Circular #544 (1954)
- Snyman J.A. (2000), *leap-1096* doi 10.1016/S0898-1221(00)85018-X
- Snyman J.A., D.N Wilke, *Practical Mathematical Optimization. Basic Optimization Theory and Gradient-Based Algorithms*, 2nd Ed (Springer 2018), 198.
- Steele C.W., *Numerical Computation of Electric and Magnetic Fields*, New York: VanNostrand Reinhold, 1987, p. 152.
- Wilson J. H., Allocca A. A., Galitski V. (2015), *Repulsive Casimir force between Weyl hemimetals*, Physical Review B, 91(23). doi:10.1103/physrevb.91.235115
- Zhu P. (2005), *Field distribution of a uniformly charged circular arc*, Journal of Electrostatics, 63(11), 1035–1047. doi:10.1016/j.elstat.2005.02.001