

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА
«ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ
АКСИАЛЬНО – СИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМ»

Выполнил студент
405 группы
Савин Владимир Петрович

подпись студента

Научный руководитель:
профессор
Кокшаров Юрий Алексеевич

подпись научного руководителя

Допущена к защите
Заведующий кафедрой:
профессор Салецкий А.М.

подпись зав. кафедрой

Москва

2021

Содержание

Введение.....	3
1. Обзор литературы.....	5
1.1. Основная задача электростатики.....	5
1.2. Метод изображений.....	7
1.3. Особенности взаимодействия проводников с точечным зарядом..	7
1.4. Проблема знака силы в эффекте Казимира.....	13
2. Физические законы и численные методы, примененные в работе.....	14
2.1. «Метод колец» (учет аксиальности).....	14
2.2. Метод «минимизации».....	14
2.2.1. Эквипотенциальность поверхности проводника.....	14
2.2.2. Динамический метод градиентного спуска.....	15
2.3. «Энергетический» метод.....	18
2.3.1. Теорема Томсона.....	18
2.3.2. Сведение условия экстремальности к решению СЛАУ.....	20
2.3.3. Решение СЛУ с помощью LU – разложения.....	24
2.4. Проблемы и недостатки используемых численных методов	26
3. Результаты расчета и их обсуждение.....	27
3.1. Система «сфера-точечный заряд».....	27
3.2 Система «полусфера-точечный заряд».....	30
3.3 Система «полуэллипсоид вращения – точечный заряд».....	33
3.4. Система «проводник с отверстием-точечный заряд».....	34
3.5. Система «сфера с отверстием-точечный заряд».....	37
3.6. Случай заряженной полусферы.....	39
Заключение.....	41
Выводы.....	42
Список литературы.....	43
Приложение А.....	45
Приложение Б.....	46
Приложение В.....	51

Введение.

Существует не так много примеров задач о взаимодействии проводников, в которых можно получить аналитический ответ [Миролубов 1963, Смайт 1954, Гинберг 1948, Батыгин 2002, Джексон 1965]. Иногда при решении конкретной задачи удастся найти нестандартный математический прием, но это единичные случаи [Будак 1956]. Численные методы позволяют решить задачу даже тогда, когда её аналитическое решение получить трудно. В дипломной работе численно решаются задачи о взаимодействии тонкостенных аксиально-симметричных проводников с точечным зарядом. Эти задачи просты по своей формулировке, но решение их не очевидно. Основная цель, которая ставится при решении, состоит в анализе влияния формы проводников, при которой возможно их отталкивание от точечного заряда, даже если проводники электронейтральны.

Аксиальная симметрия проводников позволяет представить их в виде совокупности большого числа бесконечно тонких равномерно заряженных колец. Заряды колец можно найти, либо решая задачу минимизации отклонения их потенциала от среднего значения, добиваясь эквипотенциальности поверхности проводника, либо решая задачу о минимуме электростатической энергии системы, добиваясь выполнения теоремы Томсона. Оба этих подхода используются в данной работе. Разработанная компьютерная программа позволяет строить равновесное распределение индуцированных зарядов на тонкостенном проводнике в поле точечного заряда и отсюда вычислять энергии взаимодействия рассматриваемых тел. Корректность выбранных методических подходов и их компьютерной реализации подтверждается сравнением результатов счета с известными из литературы результатами решения задач, допускающих аналитическое решение.

Электростатические взаимодействия в сложных системах могут быть необычными. Сложность может быть обусловлена, например, многокомпонентным составом системы или особой геометрией. К системам первого типа относятся естественные (биологические) и искусственные коллоидные системы, в которых обнаруживается притяжение (эффективное) одноименно заряженных частиц [Trizac 2012, Lindgren 2016]. Пример системы

второго типа – электронейтральная проводящая полусфера и точечный заряд. В работе [Levin 2011a] было впервые показано, что между зарядом и электронейтральной полусферой может происходить отталкивание в некотором интервале расстояний между ними. Полученный авторами [Levin 2011a] результат противоречит распространенному мнению о том, что точечный заряд и незаряженный проводник всегда притягиваются друг к другу.

В дипломной работе производится численный анализ некоторых недостаточно изученных задач электростатики, в которых возможно отталкивание точечного заряда и незаряженных тонкостенных проводников, форма которых отлична от полусферической, но также характеризуется аксиальной симметрией, что позволяет рассматривать проводники как набор тонких колец. В работе были исследованы такие аксиально симметричные проводники, как полуэллипсоид при различных величинах полуосей, проводники со сквозным отверстием (цилиндр, усечённый конус), сфера с отверстием произвольного размера. Были изучены основные закономерности смены характера взаимодействия проводников: когда притяжение переходит в отталкивание, когда явление отталкивания перестаёт наблюдаться в данной системе. Для задачи о взаимодействии электронейтральной полусферы и точечного заряда предложена простая модель, позволяющая определить поле, создаваемое полусферой, не требующая точного вычисления распределения индуцированных зарядов на проводнике. В этой модели электронейтральная полусфера заменяется точечным зарядом и равномерно заряженным кольцом, имеющими противоположные, но одинаковые по модулю заряды.

Кроме влияния геометрии проводников на силу их взаимодействия с точечным зарядом, в работе исследуются особенности изменения этого влияния при отказе от условия электронейтральности проводника. В целом основную задачу дипломной работы можно сформулировать так: анализ влияния формы проводников на электростатические свойства аксиально-симметричных систем, проявляющих свойство немонотонности силы взаимодействия при изменении расстояния между заряженными телами.

1. Обзор литературы.

1.1. Основная задача электростатики.

Основной задачей электростатики является нахождение напряженности $\vec{E}(\vec{r})$ и потенциала $\varphi(\vec{r})$ во всех точках рассматриваемого пространства при заданных распределении зарядов $\rho(\vec{r})$ и диэлектрической проницаемости среды $\varepsilon(\vec{r})$ [Алешкевич 2014]. Для решения данной задачи существует несколько подходов, среди которых нет наиболее предпочтительных. Выбор того или иного метода зависит от конкретной задачи. Рассмотрим некоторые из них. Сразу отметим, что при записи всех последующих выражений будет использоваться гауссова система единиц.

Существует универсальная постановка общей задачи электростатики в виде краевой задачи [Тихонов 1966]. Получим соответствующее ей дифференциальное уравнение для случая однородного диэлектрика ($\varepsilon = const$). Для этого воспользуемся двумя макроскопическими уравнениями Максвелла в дифференциальной формулировке для электростатического случая:

$$rot \vec{E} = 0; \quad (1.1)$$

$$div \vec{D} = 4\pi\rho. \quad (1.2)$$

Уравнение (1.1) является определением потенциального поля, поэтому вектор \vec{E} можно записать через скалярный потенциал $\varphi(\vec{r})$ следующим образом:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -grad \varphi(\vec{r}). \quad (1.3)$$

Подставляя это выражение в уравнение (1.2), получаем искомое уравнение:

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \quad (1.4)$$

Таким образом задача сводится к поиску электростатического потенциала $\varphi(\vec{r})$ из уравнения Пуассона (1.4). При отсутствии объемных зарядов ($\rho = 0$) потенциал $\varphi(\vec{r})$ должен удовлетворять уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0. \quad (1.5)$$

Для корректной постановки задачи необходимо еще учесть граничные условия:

$$D_n^I - D_n^{II} = 4\pi\rho_s; \quad (1.6)$$

$$E_{\tau}^I = E_{\tau}^{II}; \quad (1.7)$$

$$\varphi^I = \varphi^{II}. \quad (1.8)$$

Ещё нужно учитывать естественные граничные условия, согласно которым если система зарядов может быть заключена в некоторой ограниченной области пространства, расположенной на конечном расстоянии от начала координат, то потенциал $\varphi(\vec{r})$ на бесконечности должен обращаться в нуль. В случае выполнения последнего условия решение уравнения Пуассона (1.4) можно записать в виде:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \iiint_{(V)} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad (1.9)$$

где интегрирование производится по штрихованным координатам \vec{r}' .

Методы решения подобных краевых задач хорошо изучены в математической физике. В частности, известно, что они имеют единственное решение. Однако аналитические решения известны лишь для немногих частных случаев, поэтому часто приходится прибегать к численным методам. Ключевую роль при получении аналитического решения уравнений (1.4) и (1.5) имеет правильный выбор системы координат, так как они должны учитывать особенности геометрии системы. Тем не менее в литературе до сих пор встречаются новые классы аналитических решений. Так, например в статье Полякова П.А. [Поляков 2014] найден целый класс проводящих фигур, для которых можно получить точный ответ.

Наконец, если в исследуемой системе прослеживается некоторая пространственная симметрия, то в некоторых случаях очень удобно найти напряженность поля, воспользовавшись теоремой Гаусса:

$$\iint_{(S)} \vec{D}(\vec{r}) d\vec{S} = 4\pi Q, \quad (1.10)$$

где Q – полный свободный заряд системы, находящейся внутри произвольной поверхности S . Для того чтобы выразить из соотношения (1.10) (вынести из-под знака интеграла) индукцию \vec{D} , скалярное произведение в (1.10) должно принимать постоянное значение на всей области интегрирования. Поэтому

поверхность S выбирают таким образом, чтобы она совпадала с одной из эквипотенциальных поверхностей поля. Напряженность \vec{E} можно найти из соотношения:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (1.11)$$

1.2. Метод изображений.

Для изучения взаимодействия точечного заряда с идеально проводящими объектами часто прибегают к использованию метода изображений. Он предполагает замену исходной системы на эквивалентную. Данный метод основывается на теореме единственности в электростатике и заключается в расположении дополнительных (зарядов-изображений) и заданных первоначально точечных зарядов таким образом, чтобы у порождаемого ими поля одна из эквипотенциальных поверхностей совпадала с заданным объектом.

В приложениях “А” и “Б” с использованием метода изображений производится решение двух задач: о взаимодействии точечного заряда с бесконечной проводящей электронеутральной плоскостью (приложение “А”), о взаимодействии точечного заряда с проводящей электронеутральной сферой (приложение “Б”). В результате решения данных задач приходим к выводу, что в обоих случаях электронеутральный проводник притягивает точечный заряд вне зависимости от их взаимного расположения.

После рассмотрения данных примеров может сложиться впечатление, что метод изображений применим только для очень узкого класса задач. Однако с его помощью можно изучать не только системы проводников в вакууме, но и диэлектрики. В приложении “В” представлена таблица, в которой перечислены несколько работ, где метод изображений используется при исследовании систем с диэлектриками.

1.3. Особенности взаимодействия проводников с точечным зарядом.

В рассмотренных в приложениях “А” и “Б” примерах притяжение точечного заряда к электрически нейтральным проводникам (к бесконечной

плоскости и сфере) можно объяснить руководствуясь качественными рассуждениями. Известно, что при приближении точечного заряда, для определенности будем считать его положительным, к нейтральному проводнику, на нем будут индуцироваться заряды: на ближней к заряду области отрицательные, а на дальней положительные. Так как сила кулоновского взаимодействия обратно пропорциональна квадрату расстояния между заряженными телами, притяжение будет преобладать над отталкиванием.

Рассуждая таким образом, можно предположить, что точечный заряд будет притягиваться к любому электронейтральному проводнику, независимо от его геометрической формы. Однако, это предположение неверно: существуют идеально проводящие электронейтральные тела, взаимодействие которых с точечным зарядом при определенном взаимном расположении носит характер отталкивания, а не притяжения, как в упомянутых выше примерах. При этом геометрия системы имеет важную роль.

Можно привести несколько примеров систем «электронейтральный проводник-точечный заряд», где будет наблюдаться такое отталкивание. В частности, в статье М.Левина [Levin 2011a] рассматриваются две такие системы: полусфера - точечный заряд, электрический диполь - бесконечная плоскость с отверстием. Авторы [Levin 2011a] анализируют условия при которых любой электронейтральный проводник будет притягивать точечный заряд. Рассмотрим эти ситуации. Для удобства описания представим что металлический (проводящий) электронейтральный объект и точечный заряд располагаются по разные стороны от плоскости $z = 0$, разделяющей пространство на два полупространства. Причем металлический объект располагается в нижнем полупространстве ($z < 0$) вблизи плоскости $z = 0$, а точечный заряд – в верхнем ($z > 0$) (рисунок 1(a)). Не ограничивая общности, будем считать что заряд может находиться только на оси z , а проводник не меняет своего положения в пространстве.

В случае, когда расстояние между объектами системы достаточно мало (по сравнению с радиусом кривизны поверхности проводника), задача становится

подобной уже рассмотренному ранее примеру о взаимодействии бесконечной электронейтральной плоскости с точечным зарядом, в котором наблюдалось только отталкивание между телами. При больших, но конечных расстояниях от проводника до заряда, проводник можно представить как диполь, притягивающий заряд, что означает отрицательность энергии взаимодействия. При удалении точечного заряда его влияние на электронейтральный проводник будет ослабевать и в предельном случае ($z = +\infty$) на поверхности проводника индуцированные заряды разных знаков исчезнут, и проводник станет локально электронейтрален. Энергия взаимодействия тел обратится в ноль. Следовательно можно записать условие на энергию системы:

$$W(z) \leq W(+\infty). \quad (1.12)$$

Запишем силу действующую на точечный заряд со стороны проводника в виде:

$$F_z = -\frac{\partial W}{\partial z} \quad (1.13)$$

Из неравенства (1.12) следует что она принимает отрицательные значения при больших z , что соответствует притяжению рассматриваемых тел в этой области.

Итак, в системе «электронейтральный проводник – точечный заряд» есть две конфигурации, при которых наблюдается притяжение: при очень малом и очень большом расстоянии между объектами. Поэтому область отталкивания может находиться только в «промежуточных» условиях: когда расстояние между проводником и точечным зарядом не слишком велико и не слишком мало.

В качестве примера системы с отталкиванием в статье [Levin 2011a] рассматривается задача о взаимодействии проводящей электронейтральной тонкостенной полусферы радиуса R с точечным зарядом. Пусть, как и раньше, проводник находится в нижней части полупространства, под плоскостью $z = 0$. Центр полусферы расположен в начале координат, в точке O , а точечный заряд перемещается вдоль оси симметрии полусферы, совпадающей с осью z (рисунок 1(б)). Заметим, что данная система является аксиально симметричной.

Существование отталкивания между взаимодействующими телами данной системы можно объяснить, не прибегая к детальным вычислениям. Для этого мысленно поместим точечный заряд в точку O (начало координат). В этом случае поверхность тонкостенной проводящей полусферы будет равноудалена от точечного заряда, как следствие она будет совпадать с одной из эквипотенциальных поверхностей кулоновского поля $\varphi(r) = q/r$, порождаемого точечным зарядом. Таким образом, кулоновский потенциал представляет собой решение соответствующей краевой задачи. При этом благодаря тонким стенкам энергия взаимодействия рассматриваемых тел при такой постановке задачи равна нулю, поскольку положительные и отрицательные индуцированные заряды равноудалены от точечного заряда и тем самым компенсируют друг друга. Если же поместить точечный заряд на бесконечности ($z = +\infty$), то взаимодействие между ним и проводником отсутствует благодаря удаленности.

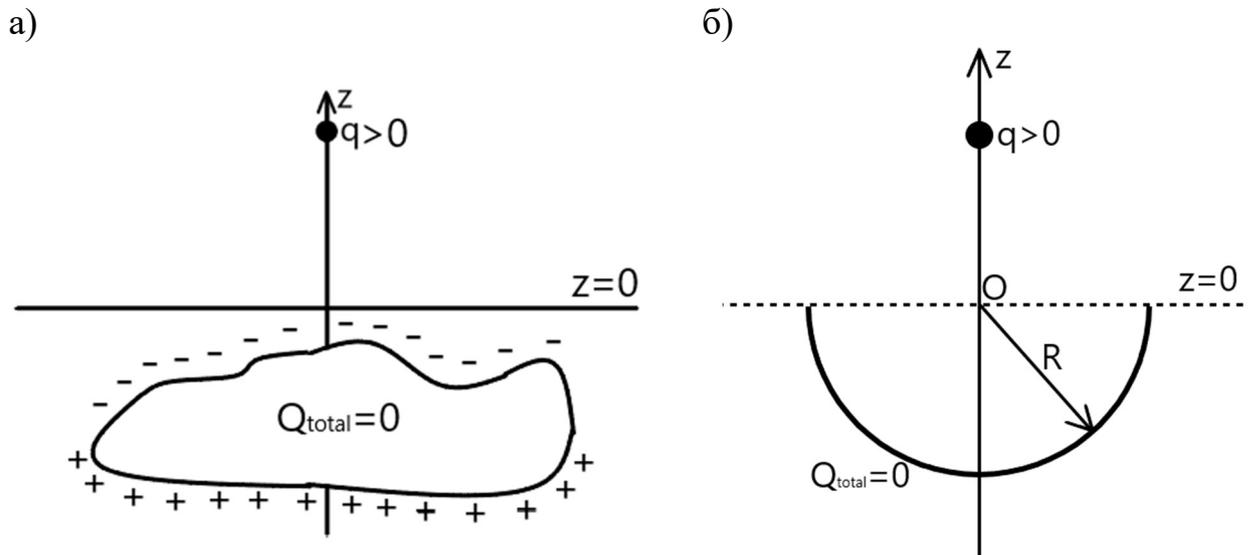


Рисунок 1. а) Схема, поясняющая расположение тел в системе электронейтральный проводник - точечный заряд. б) Схема, поясняющая расположение полусферы и точечного заряда в пространстве.

Исходя из вышесказанного можно заключить, что при расположении точечного заряда в начале координат ($z=0$) его электростатическая энергия взаимодействия с проводящей полусферой будет такой же, как и в случае если

бы он находился на бесконечном удалении от неё ($z = +\infty$). Следовательно, для данной системы имеет место следующее равенство для энергии взаимодействия как функции координаты точечного заряда:

$$W(0) = W(+\infty). \quad (1.14)$$

Последнее равенство говорит о немонотонном поведении функции $W(z)$ в интервале $(0; +\infty)$, то есть знак производной в (1.13) на этом интервале должен меняться, что подтверждает существование отталкивания в рассматриваемой системе.

Другими словами, при приближении точёного заряда к началу координат (см. рисунок 1б) притяжение со стороны полусферы должно смениться отталкиванием.

В работе [Levin 2011b] авторы путем использования конформного отображения получают точное решение данной задачи в виде выражения для энергии системы как функции координаты точечного заряда:

$$W(z) = -\frac{q^2}{|2z^2 - 2|} + \frac{q^2}{\pi(1 - z^2)} \left(\arctg \left(\frac{1}{h(z)} \right) - \frac{h(z)}{h(z)^2 + 1} \right) + \frac{q^2 f(z)^2}{1 + \frac{2}{\pi}}, \quad (1.15)$$

где: $f(z) = \left(1 - \frac{1}{|z|}\right) \theta(-h(z)) + \frac{4g(h(z),1)}{\pi|z+1|} - 1$; $h(z) = \frac{1-z}{1+z}$; $g(u, v) = \frac{u \arccos \left(\frac{1}{u}\right) - v \arccos \left(\frac{1}{v}\right)}{u^2 - v^2}$;

$\theta(\cdot)$ – функция Хевисайда.

Построенная зависимость (1.15) (рисунок 2(а)) подтверждает приведенные выше рассуждения. Действительно, справа от точки O , где прослеживается убывание энергии, точечный заряд будет отталкиваться от полусферы, в остальных областях – притягиваться. Максимум и минимум на графике имеют координаты $z = 0$ и $z = 0.63$ соответственно. Следует обратить внимание еще на то, что энергия взаимодействия в максимуме ($z=0$) равна нулю, как и предполагалась ранее. Так как последний факт справедлив за счет тонких стенок полусферы, то возникает резонный вопрос: как качественно изменится зависимость $W(z)$, если стенки будут иметь конечную толщину t ? В качестве ответа на данный вопрос авторы работы [Levin 2011a] предлагают к рассмотрению аналитическое решение подобной задачи для двумерного случая, где сфера имеет конечную толщину t . На рисунке 2(б) отображены зависимости

энергии взаимодействия полусферы с точечным зарядом от координаты последнего при различных значениях параметра t . Анализируя построенные зависимости можно сделать вывод, что для малой, но конечной толщины полусферы, кривая энергии взаимодействия с точечным зарядом качественно не меняется. Кроме того, если относительная толщина t/R достаточно невелика (R – радиус полусферы), то для описания таких систем можно пользоваться моделью с тонкостенной полусферой ($t=0$).

Используемый авторами способ расчета не предполагает простого перехода к иным проводникам, обладающим другими геометрическими формами. В данной работе это становится возможным благодаря двум принципиально разным подходам, в основе которых лежит представление исследуемых проводников в виде набора тонких проводящих колец. С особенности каждого метода можно ознакомиться в разделе 2.

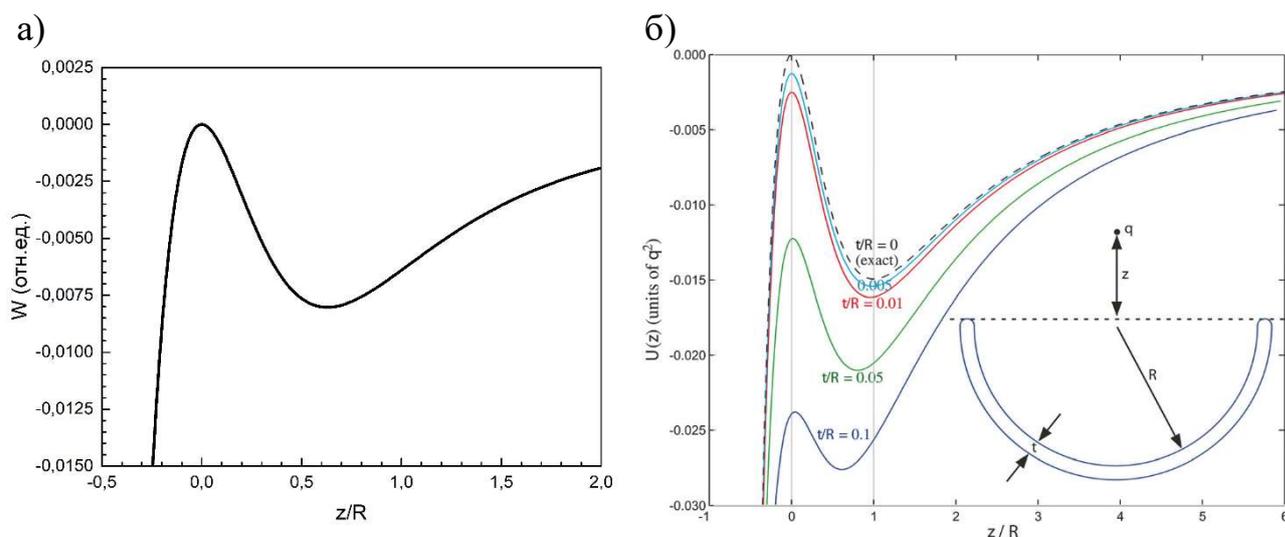


Рисунок 2. а) Энергия взаимодействия тонкостенной проводящей полусферы с точечным зарядом в зависимости от координаты точечного заряда z (формула (1.15)). б) Энергия взаимодействия проводящей полусферы конечной толщины t с точечным зарядом в зависимости от координаты точечного заряда z (2D случай). R – радиус полусферы [Levin 2011a]. Координата z нормирована на R , энергия – на q^2/R , где R – радиус сферы, q – величина заряда точечного заряда.

1.4. Проблема знака силы в эффекте Казимира.

Рассмотренные в работе [Levin 2011a] классические электростатические задачи получили интересное продолжение при обсуждении возможности существования отталкивания для квантовомеханических сил Казимира. В работе [Levin 2010] приводится пример такой системы, состоящей из вытянутой металлической частицы (диполя), находящейся над тонкой металлической пластиной с отверстием. Вытянутая частица находится над отверстием. Показано, что эффект отталкивания в такой системе возможен только в случае, если диполь ориентирован перпендикулярно металлической пластине и расположен вблизи её поверхности. Таким образом при определенной «необычной» геометрии проводников сила Казимира может иметь характер отталкивания. Для частного случая, когда вытянутая частица представляет из себя цилиндр конечных размеров, а металлическая плоскость с круглым отверстием имеет конечную толщину, проведены оценки величины силы и показано, что точности современных методов измерения пока недостаточно для обнаружения эффекта отталкивания в такой системе. В работе [Levin 2010] показано, что в электростатике в аналогичной системе тел между проводниками также может происходить отталкивание. Основываясь на данной закономерности, авторы [Levin 2010] предлагают подход для обнаружения «интересных» геометрических эффектов Казимира: сначала найти «интересное» (необычное) взаимодействие в электростатике, а затем искать аналогичную систему Казимира. Следует отметить, что вопрос существования сил отталкивания в эффекте Казимира является предметом научных дискуссий. Есть работы, в которых утверждается, что такие силы невозможны [Vachas 2007, Kenneth 2006]. Полной ясности в этом вопросе нет. Нужно измерить, но как написано выше, экспериментальной точности пока не хватает.

2. Физические законы, формулы и численные методы, примененные в работе.

2.1 «Метод колец» (учет аксиальности).

Для выбранного класса тонкостенных аксиально-симметричных проводников представляется возможным применить процедуру, позволяющую унифицировать расчеты. В её основе лежит представление проводника в виде совокупности большого числа тонких однородно заряженных колец, с которыми уже легко работать. На рисунке 3(а) в качестве примера приведено разбиение сферы.

Метод разбиения на тонкие кольца, в дальнейшем будем называть его «методом колец», удобен благодаря тому, что для каждого кольца известен явный вид полевых характеристик, а значение электростатического поля целого проводника можно найти из принципа суперпозиции.

Для удобства последующего описания воспользуемся цилиндрической системой координат (ρ, φ, z) . Пусть z – ось вращения кольца, ρ – расстояние от оси вращения до точки наблюдения (рисунок 3(б)), тогда формулы для расчета напряженности и потенциала однородно заряженного кольца радиуса R с центром в начале координат [Zhu 2005] выглядят следующим образом:

$$\vec{E} = \frac{Qk}{2\pi\sqrt{R\rho^3}} \left\{ K(k) - \frac{E(k)}{k^2} \left[1 - \frac{(\rho + R)k^2}{2R} \right] \right\} \vec{e}_\rho + \frac{Qk^3 z E(k)}{4\pi R \sqrt{\rho^3 R} k^2} \vec{e}_z \quad (2.1)$$

$$\varphi = \frac{2Q}{\pi\sqrt{z^2 + (\rho + R)^2}} K(k), \quad (2.2)$$

где $K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \beta}}$, $E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \beta} d\beta$ – эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно [Press 1992b]; $k^2 = \frac{4\rho R}{z^2 + (\rho + R)^2}$, $k = \sqrt{1 - k^2}$.

2.2. Метод «минимизации».

2.2.1. Эквипотенциальность поверхности проводника.

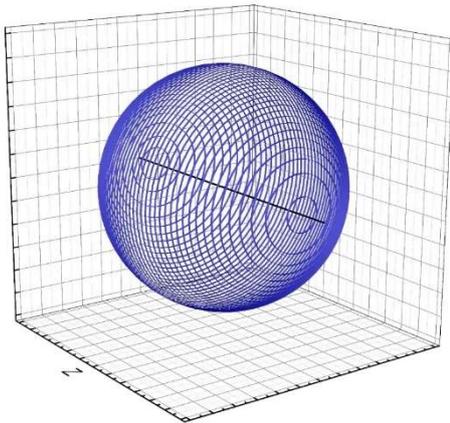
В данной работе используется метод «минимизации», позволяющий получить равновесное распределение зарядов в тонкостенном проводнике как

результата явления электростатической индукции. Искомое распределение зарядов удовлетворяет требованиям:

- Постоянство потенциала на поверхности тонкостенного проводника.
- Равенство нулю тангенциальной компоненты напряженности на поверхности проводника.
- Выполнение закона сохранения заряда.

В методе минимизируется либо сумма квадратов отклонения вычисленных при текущих значениях зарядов колец значений потенциала отдельных колец от среднего значения потенциала проводника, либо сумма квадратов тангенциальных компонент напряженности поля на поверхности проводника. Использованный численный метод минимизации функции многих переменных описан в следующем разделе.

а)



б)

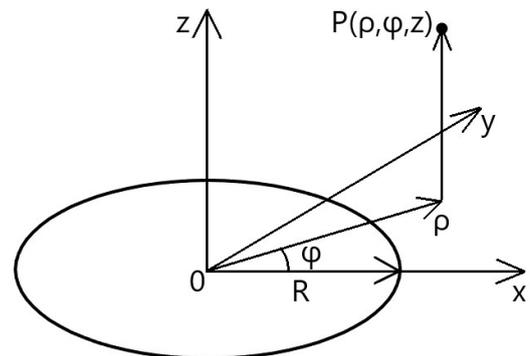


Рисунок 3. а) Пример представления тонкостенного аксиального-симметричного проводника (сферы) в виде набора тонких колец. б) Схема, поясняющая ориентацию тонкостенного однородно заряженного кольца в пространстве.

2.2.2. Динамический метод градиентного спуска.

Рассмотрим основные черты метода минимизации [Ильина 2003а]. Для лучшего восприятия алгоритма минимизации представим, что минимизируемая функция $F(\vec{q})$ – это потенциал в N-мерном пространстве, в котором движется материальная точка, причем движение происходит с трением. Действующая на движущуюся точку сила - градиент от функции, для которой ищется минимум.

Следует отметить, что данный алгоритм следует применять лишь в том случае, если существует точное значение градиента от исследуемой функции.

Прежде всего нужно выбрать функцию, для которой ищется минимум и систему координат, в которой он локализован. В данной работе минимизируются отклонения потенциала на поверхности проводника от среднего значения, происходит его «выравнивание», поэтому в качестве минимизируемой функции выбирается сумма квадратов отклонений потенциалов колец. Совокупность из N зарядов колец примем за систему координат $\vec{Q} = \vec{Q}(Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$, где Q_i – заряд i -го кольца $i = \overline{1, N}$. Таким образом мы работаем в N -мерном пространстве, размер которого зависит от числа разбиений проводника на тонкие кольца. В итоге минимизируемая функция принимает следующий вид:

$$F(\vec{Q}) = (\varphi_1(Q_1) - \langle \varphi \rangle)^2 + (\varphi_2(Q_2) - \langle \varphi \rangle)^2 + \dots + (\varphi_N(Q_N) - \langle \varphi \rangle)^2, \quad (2.3)$$

где φ_i потенциал i -го кольца, Q_i – его заряд, $\langle \varphi \rangle$ – средний потенциал проводника.

Следующее действие – это выбор шага по времени dt и коэффициента уменьшения скорости β (коэффициент трения). Эти параметры являются настроечными, то есть нет однозначного алгоритма для их выбора. В общем, их нужно выбрать так, чтобы алгоритм был устойчив, при этом размер шага следует выбирать максимально возможным, так как от этого напрямую зависит скорость вычислений.

Третий шаг – выбор начальных условий. Требуется выбрать начальное распределение зарядов колец \vec{Q}_0 и начальную скорость их изменения \vec{v}_0 . Тут все предельно просто: достаточно задать их нулевыми ($\vec{Q}_0 = (0, 0, \dots, 0)$, $\vec{v}_0 = (0, 0, \dots, 0)$).

Далее ключевое действие – это сдвиг по времени и последующее перемещение в новую точку. Этот шаг содержит в себе основную идею данного метода. Изменение скорости \vec{v} под действием градиента от минимизируемой функции $\vec{\nabla}F(\vec{x})$ и сдвиг по времени в новую точку реализуется с помощью формул:

$$\vec{v} = \beta(\vec{v} - \vec{\nabla}F(\vec{Q})dt); \quad (2.4)$$

$$\vec{Q} = \vec{Q} + \vec{v} dt. \quad (2.5)$$

И тут возникают некоторые сложности: две последние формулы позволяют минимизировать отклонения потенциала от постоянного значения, однако если ограничиться их применением, закон сохранения заряда перестает выполняться, полный заряд начинает расти, что приводит к некорректным результатам. Для решения этой проблемы необходимо отдельно принудительно минимизировать полный заряд, применив дополнительные преобразования зарядов колец:

$$Q_i = Q_i - \frac{\sum_{i=1}^N Q_i - Q_{total}}{N}, \quad (2.6)$$

где Q_i – заряд i -го кольца $i = \overline{1, N}$, Q_{total} – полный заряд проводника, который должен сохраняться (в случае электронейтрального проводника $Q_{total} = 0$). То есть из заряда каждого кольца нужно вычесть средний заряд всех колец и прибавить полный заряд проводника, деленный на N (количество разбиений). Такой подход замедляет процесс минимизации, но зато приводит к верным результатам. Важно отметить, что тангенциальная компонента напряженности на поверхности проводника минимизируется автоматически и становится равной нулю вдоль всей поверхности.

Последний шаг – вычисление ошибок. В данной работе ошибка определяется суммой квадратов отклонений потенциалов колец от постоянного значения на поверхности проводника, то есть самой минимизируемой функций. Поэтому чем ближе полученная новая точка \vec{Q} к минимуму, тем меньше ошибка. Построенный алгоритм циклически повторяется до тех пор, пока ошибки не станут меньше заданной погрешности.

В результате применения метода «минимизации» получаем равновесное распределение зарядов колец и потенциал проводника, что позволяет вычислить энергию системы с помощью формулы:

$$W = \frac{1}{2} Q_{total} \varphi_0 + \frac{1}{2} q \varphi, \quad (2.7)$$

где Q_{total} – полный заряд проводника, φ_0 – потенциал проводника (создаваемый им самим и точечным зарядом), q – заряд точечного заряда, φ_0 потенциал точечного заряда (создаваемый проводником).

2.3. «Энергетический» метод.

2.3.1. Теорема Томсона.

Данный подход, как и метод минимизации, базируется на представлении исследуемого проводника в виде набора колец («метод колец»). Цель конкретного метода состоит в том, чтобы получить равновесное распределение зарядов колец, знание которого позволяет без проблем вычислить энергию интересующей нас системы. Для нахождения искомого распределения, основываясь на теореме Томсона, составляется система линейных уравнений относительно зарядов колец.

Чтобы осуществить данный подход потребуется выражение для энергии всей системы. Представление проводника в виде тонких колец позволяет записать её в виде суммы энергий взаимодействий каждого кольца с остальными и точечным зарядом. Собственными энергиями колец и точечного заряда будем пренебрегать.

Сначала получим выражение для энергии взаимодействия двух колец. Применим формулу для энергии взаимодействия двух систем зарядов:

$$W_{ij} = \int_V \rho_i \varphi_j dV, \quad (2.8)$$

где ρ_i и φ_j объемная плотность зарядов и потенциал i -ой и j -ой систем соответственно, интегрирование ведется по всему пространству.

Для каждого i -го кольца введем следующие символы Q_i , R_i , z_i обозначающие его полный заряд, радиус и положение на оси z соответственно.

Плотность заряда i –го кольца запишем как:

$$\rho_i(z, \rho) = \frac{Q_i}{2\pi R_i} \delta(z - z_i) \delta(\rho - R_i), \quad (2.9)$$

Используя формулу (2.2), запишем выражение для потенциала кольца в удобном для вычислений виде:

$$\varphi_j(z, \rho) = \frac{2Q_j}{\pi\sqrt{(z-z_j)^2 + (\rho+R_j)^2}} K(k_j(z, \rho)), \quad (2.10)$$

где $k_j(z, \rho) = \frac{4\rho R_j}{(z-z_j)^2 + (\rho+R_j)^2}$ аргумент в эллиптическом интеграле первого рода.

Подставив выражения (2.9) и (2.10) в формулу (2.8) и учитывая то, что мы работаем в цилиндрических координатах (ρ, φ, z) , приходим к следующему интегралу:

$$W_{ij} = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q_i}{2\pi R_i} \delta(z-z_i) \delta(\rho-R_i) \frac{2Q_j K(k_j(z, \rho))}{\pi\sqrt{(z-z_j)^2 + (\rho+R_j)^2}} d\varphi \rho d\rho dz, \quad (2.11)$$

который легко вычисляется благодаря находящимся в подынтегральном выражении дельта-функциям Дирака. В итоге получаем окончательное выражение для энергии взаимодействия двух колец:

$$W_{ij} = \frac{2Q_i Q_j}{\pi\sqrt{(z_i-z_j)^2 + (R_i+R_j)^2}} K(k_{ij}), \quad (2.12)$$

где $k_{ij} \equiv k_j(z_i, \rho_i) = \frac{4R_i R_j}{(z_i-z_j)^2 + (R_i+R_j)^2}$, причем $k_{ij} = k_{ji}$.

Также нам понадобится выражение для энергии взаимодействия i -го кольца с точечным зарядом q , находящегося на расстоянии b от начала координат ($z=b$):

$$W_{ip} = \frac{Q_i q}{\sqrt{(b-z_i)^2 + R_i^2}}. \quad (2.13)$$

Чтобы его записать, нужно воспользоваться формулой (2.10) и учесть, что $K(k_{ij} = 0) = \pi/2$, так как точечный заряд находится на оси z ($\rho = 0$).

Теперь в нашем распоряжении есть все необходимые слагаемые чтобы записать выражение для энергии всей системы. Её можно записать в следующем компактном виде:

$$W = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N W_{ij} + \sum_{i=1}^N W_{ip}. \quad (2.14)$$

Далее нужно использовать теорему Томсона (лорда Кельвина), согласно которой равновесное распределение заряда на проводниках соответствует минимуму электростатической энергии. Таким образом нужно найти минимум энергии W по отношению к вариации зарядов колец. В случае, когда система задана, то есть произведено разбиение рассматриваемого тонкостенного аксиально-симметричного проводника на N тонких колец и зафиксировано положение точечного заряда (координата b), энергия системы будет являться функцией величин зарядов колец, то есть $W = W(Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$. Поэтому для нахождения её минимума нужно приравнять нулю частные производные по заряду каждого кольца (необходимое условие экстремума). Таким образом получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial Q_1} = \frac{\partial}{\partial Q_1} (W_{12} + W_{12} + \dots + W_{1N} + W_{1p}) = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial Q_2} = \frac{\partial}{\partial Q_2} (W_{21} + W_{23} + \dots + W_{2N} + W_{2p}) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial W}{\partial Q_N} = \frac{\partial}{\partial Q_N} (W_{N1} + W_{N3} + \dots + W_{(N-1)N} + W_{Np}) = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Для окончательной постановки задачи необходимо ещё учесть условие постоянства полного заряда проводника (закон сохранения электрического заряда):

$$Q_{total} = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_N = \sum_{i=1}^N = const. \quad (2.16)$$

2.3.2. Сведение условия экстремальности к решению СЛАУ.

Чтобы найти равновесное распределение зарядов колец нужно решить систему уравнений (2.15) при условии (2.16), что представляет собой задачу на условный экстремум. Такую систему можно решать методом неопределенных множителей Лагранжа. Однако существует более простой подход: исключить одну из переменных, используя уравнение связи (2.16).

Чтобы воспользоваться последним, более простым, подходом, для начала запишем полные дифференциалы от энергии системы W и от выражения для полного заряда (2.16):

$$dW = \frac{\partial W}{\partial Q_1} dQ_1 + \frac{\partial W}{\partial Q_2} dQ_2 + \dots + \frac{\partial W}{\partial Q_N} dQ_N = 0; \quad (2.17)$$

$$0 = dQ_1 + dQ_2 + \dots + dQ_N. \quad (2.18)$$

Исключим заряд первого кольца Q_1 . С этой целью выразим его дифференциал из соотношения (2.18) и подставим в (2.17):

$$dW = \frac{\partial W}{\partial Q_1} (-dQ_2 - \dots - dQ_N) + \frac{\partial W}{\partial Q_2} dQ_2 + \dots + \frac{\partial W}{\partial Q_N} dQ_N = 0 \quad (2.19)$$

Так как переменные Q_2, \dots, Q_N независимы, то равенство (2.19) будет выполняться в том случае, если коэффициенты перед приращениями dQ_2, \dots, dQ_N будут равны нулю. Исключая с помощью соотношения (2.16) слагаемое Q_1 , переходим к эквивалентной системе из $N - 1$ уравнений для определения равновесного распределения зарядов:

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial Q_2} - \frac{\partial W}{\partial Q_1} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial W}{\partial Q_N} - \frac{\partial W}{\partial Q_1} = 0, \end{cases} \quad (2.20)$$

где $Q_1 = Q_{total} - Q_2 - Q_3 - \dots - Q_N. \quad (2.21)$

Запишем данную систему уравнений в удобном для решения представлении, в виде матрицы и столбцов. То есть поставим соответствующую задачу линейной алгебры. Для начала подставим выражения для всех вышеупомянутых частных производных по энергии:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial Q_2} (W_{21} + W_{23} + \dots + W_{2N} + W_{2p}) - \frac{\partial}{\partial Q_1} (W_{12} + W_{12} + \dots + W_{1N} + W_{1p}) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial Q_N} (W_{N1} + W_{N3} + \dots + W_{(N-1)N} + W_{Np}) - \frac{\partial}{\partial Q_1} (W_{12} + W_{12} + \dots + W_{1N} + W_{1p}) = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Руководствуясь формулами (2.12) и (2.13), подставим и вычислим производные от энергий W_{ij} и W_{ip} :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{2(Q_{total} - Q_2 - Q_3 - \dots - Q_N)K(k_{21})}{\pi\sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (R_2 + R_1)^2}} + \frac{2Q_3K(k_{23})}{\pi\sqrt{(z_2 - z_3)^2 + (R_2 + R_3)^2}} + \dots + \\
+ \frac{2Q_NK(k_{2N})}{\pi\sqrt{(z_2 - z_N)^2 + (R_2 + R_N)^2}} + \frac{q}{\sqrt{(z_2 - b)^2 + (R_2)^2}} - \frac{2Q_2K(k_{12})}{\pi\sqrt{(z_1 - z_2)^2 + (R_1 + R_2)^2}} - \\
- \frac{2Q_3K(k_{13})}{\pi\sqrt{(z_1 - z_3)^2 + (R_1 + R_3)^2}} - \frac{2Q_NK(k_{1N})}{\pi\sqrt{(z_1 - z_N)^2 + (R_1 + R_N)^2}} - \frac{q}{\sqrt{(z_1 - b)^2 + (R_1)^2}} = 0 \\
\dots \\
\frac{2(Q_{total} - Q_2 - Q_3 - \dots - Q_N)K(k_{N1})}{\pi\sqrt{(z_N - z_1)^2 + (R_N + R_1)^2}} + \frac{2Q_2K(k_{N2})}{\pi\sqrt{(z_N - z_2)^2 + (R_N + R_2)^2}} + \dots + \\
+ \frac{2Q_{N-1}K(k_{N(N-1)})}{\pi\sqrt{(z_N - z_{N-1})^2 + (R_N + R_{N-1})^2}} + \frac{q}{\sqrt{(z_N - b)^2 + (R_N)^2}} - \frac{2Q_2K(k_{12})}{\pi\sqrt{(z_1 - z_2)^2 + (R_1 + R_2)^2}} - \\
- \frac{2Q_3K(k_{13})}{\pi\sqrt{(z_1 - z_3)^2 + (R_1 + R_3)^2}} - \frac{2Q_NK(k_{1N})}{\pi\sqrt{(z_1 - z_N)^2 + (R_1 + R_N)^2}} - \frac{q}{\sqrt{(z_1 - b)^2 + (R_1)^2}} = 0
\end{array} \right. \quad (2.23)$$

Для удобства введем следующие обозначения:

$$G_{ij} = \frac{K(k_{ij})}{\sqrt{(z_i - z_j)^2 + (R_i + R_j)^2}}; \quad X_i = \frac{\pi}{2} \frac{q}{\sqrt{(z_i - b)^2 + (R_i)^2}}. \quad (2.24)$$

Поделив каждое уравнение в системе (2.23) на $2/\pi$ и учтя новые обозначения (2.24), приходим к более компактной записи интересующей нас системы:

$$\left\{ \begin{array}{l}
(Q_{total} - Q_2 - Q_3 - \dots - Q_N)G_{12} + Q_3G_{23} + \dots + Q_NG_{2N} + X_2 - Q_2G_{12} - \\
- Q_3G_{13} - Q_NG_{1N} - X_1 = 0 \\
(Q_{total} - Q_2 - Q_3 - \dots - Q_N)G_{13} + Q_2G_{23} + \dots + Q_NG_{3N} + X_3 - Q_2G_{12} - \\
- Q_3G_{13} - Q_NG_{1N} - X_1 = 0 \\
\dots \\
(Q_{total} - Q_2 - Q_3 - \dots - Q_N)G_{1N} + Q_2G_{2N} + \dots + Q_{N-1}G_{(N-1)N} + X_N - Q_2G_{12} - \\
- Q_3G_{13} - Q_NG_{1N} - X_1 = 0
\end{array} \right. \quad (2.25)$$

Собирая все коэффициенты при одинаковых переменных Q_i , получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l}
-2G_{12}Q_2 + (G_{23} - G_{13} - G_{12})Q_3 + \dots + (G_{2N} - G_{1N} - G_{12})Q_N = X_1 - X_2 - Q_{total}G_{12} \\
(G_{23} - G_{12} - G_{13})Q_2 - 2G_{13}Q_3 + \dots + (G_{3N} - G_{1N} - G_{13})Q_N = X_1 - X_3 - Q_{total}G_{13} \\
\dots \\
(G_{2N} - G_{12} - G_{1N})Q_2 + (G_{3N} - G_{13} - G_{1N})Q_3 + \dots - 2G_{1N}Q_N = X_1 - X_N - Q_{total}G_{1N}
\end{array} \right. \quad (2.26)$$

Перепишем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (2.26) в матричном представлении, с которым уже удобно работать:

$$A\vec{x} = \vec{f}, \quad (2.27)$$

где

$$\vec{x} = (Q_2 \quad Q_3 \quad \dots \quad Q_N)^T$$

$$A = \begin{pmatrix} -2G_{12} & G_{23} - G_{13} - G_{12} & \cdots & G_{2N} - G_{1N} - G_{12} \\ G_{23} - G_{12} - G_{13} & -2G_{13} & \cdots & G_{3N} - G_{1N} - G_{13} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{2N} - G_{12} - G_{1N} & G_{3N} - G_{13} - G_{1N} & \cdots & -2G_{1N} \end{pmatrix};$$

$$\vec{f} = (X_1 - X_2 - Q_{total}G_{12} \quad X_1 - X_3 - Q_{total}G_{13} \quad \cdots \quad X_1 - X_N - Q_{total}G_{1N})^T.$$

Таким образом задача о нахождении равновесного распределения зарядов колец Q_2, Q_3, \dots, Q_4 сводится к поиску решений системы линейных алгебраических уравнений (2.27). Величина заряда первого кольца Q_1 определяется из соотношения (2.21).

Прежде чем переходить к решению СЛАУ (2.27), сделаем несколько замечаний, относящихся к её компонентам. Обратимся к матрице A . Все её матричные элементы по своей структуре можно разделить на два типа: диагональные и недиагональные. Значение каждого диагонального элемента A_{ii} можно определить исходя из равенства:

$$A_{ii} = -2G_{1(i+1)}, i = \overline{1, N-1}. \quad (2.28)$$

Недиагональные элементы A_{ij} ($i \neq j$) имеют совершенно иное строение. Запишем их, принимая во внимание свойство симметрии слагаемых G_{ij} относительно перестановки индексов:

$$A_{ij} = G_{(i+1)(j+1)} - G_{1(j+1)} - G_{1(i+1)}, i = \overline{1, N-1}, j = \overline{1, N-1}, i \neq j. \quad (2.29)$$

Теперь имея в распоряжении соотношения (2.28) и (2.29) можно без труда определить все матричные элементы A_{ij} . Важно отметить, что матрица A не содержит никакой информации о точечном заряде. Она определяется исключительно свойствами проводника, поскольку включает в себя только параметры колец разбиения. Поэтому при изменении каких-либо характеристик точечного заряда нет необходимости заново вычислять матричные элементы матрицы A .

Координаты вектора \vec{f} вычисляются довольно просто:

$$f_i = X_1 - X_{i+1} - Q_{total}G_{1(i+1)}, i = \overline{1, N-1} \quad (2.30)$$

Ввиду особенности строения элементов X_i (соотношение (2.24)), наличие их в формуле (2.30) говорит о том, что именно вектор \vec{f} содержит всю информацию о точечном заряде. Поэтому при перемещении точечного заряда в

пространстве (при изменении параметра b), в СЛАУ (2.27) нужно будет заново посчитать только координаты вектора \vec{f} .

2.3.3. Решение СЛАУ с помощью LU – разложения.

Для решения системы (2.27) воспользуемся LU – разложением [Ильина 2003b, Press 1992a]. Этот метод подходит для любых неоднородностей (векторов \vec{f}). LU – разложение основывается на представлении исходной матрицы A в виде произведения ниже-треугольной и выше-треугольной невырожденных матриц L и U соответственно, причем первая матрица имеет единичную диагональ:

$$A = LU, \tag{2.31}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2N} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & A_{N3} & \cdots & A_{NN} \end{pmatrix};$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{N1} & L_{N2} & L_{N3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}; U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & \cdots & U_{1N} \\ 0 & U_{22} & U_{23} & \cdots & U_{2N} \\ 0 & 0 & U_{33} & \cdots & U_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & U_{NN} \end{pmatrix}$$

Существует теорема, согласно которой такое представление единственно при отличных от нуля минорах исходной матрицы.

Разложение (2.31) позволяет свести исходную СЛАУ (2.27) к двум более простым. Для этого подставим вместо матрицы A соответствующее ей LU – разложение и введем новое обозначение $\vec{z} = U\vec{x}$:

$$A\vec{x} = LU\vec{x} = L\vec{z} = \vec{f} \Rightarrow \begin{cases} L\vec{z} = \vec{f} \\ U\vec{x} = \vec{z} \end{cases} \tag{2.32}$$

$$\tag{2.33}$$

Полученные системы (2.32) и (2.33) по построению треугольные, поэтому они легко решаются: первая (2.32) – прямой подстановкой, в вторая (2.33) – обратной.

Таким образом, как можно заключить из вышесказанного, основная сложность данного метода решения СЛАУ заключается в представлении исходной матрицы A в виде двух треугольных (L и U).

Этот процесс разбивают на несколько последовательных стадий:

Первое действие - приравнивание единице всех диагональных элементов матрицы L :

$$L_{ii} = 1, i = \overline{1, N}. \quad (2.34)$$

Далее для j -го столбца матрицы U ($j = \overline{1, N}$) определяют его компоненты U_{ij} , лежащие на диагонали и над ней ($i = \overline{1, j}$). Для этого нужно воспользоваться рекуррентным соотношением:

$$U_{ij} = A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} U_{kj}, (j \geq i) \quad (2.35)$$

(при $i = 1$ сумма заменяется нулем).

С помощью следующего рекуррентного соотношения для i -ой строки матрицы L ($i = \overline{1, N}$) определяют её компоненты L_{ij} , лежащие под диагональю ($j = 1, 2, \dots, i - 1$):

$$L_{ij} = \frac{1}{U_{jj}} (A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} U_{kj}), (j < i). \quad (2.36)$$

Формулы (2.35), (2.36) построены на основе общих свойств произведения матриц и столбцов.

Еще одно вынужденное действие, с которым придется столкнуться при выполнении LU-разложения — это перестановка строк в матрицах. При использовании формулы (2.36) приходится делить на диагональные матричные элементы U_{jj} , и тут важно не допустить деления на ноль. Для этого выполняют следующие действия. При определении с помощью формулы (2.35) диагонального элемента U_{jj} вычисляют все элементы j -го столбца матрицы U при условии $j \leq i \leq N$ и выбирают из них наибольший, который впоследствии и будет диагональным. Затем выбранный элемент путем перестановки строк перемещают на диагональ. После этих манипуляций можно спокойно находить компоненты L_{ij} по формуле (2.36). Важно отметить, что при выполнении перестановок нужно запоминать их последовательность, так как те же перестановки придется произвести и по отношению к элементам вектора \vec{f} (правой части СЛАУ).

Следуя изложенному выше алгоритму, приходим к равновесному распределению зарядов колец. Определив все заряды $Q_i, i = \overline{1, N}$, можно запросто вычислить энергию взаимодействия проводника с точечным зарядом. Для этого достаточно подставить найденные величины Q_i в формулу (2.14).

2.4. Проблемы и недостатки используемых численных методов.

Теперь об основных проблемах, с которыми можно столкнуться при реализации предложенных алгоритмов.

Обсудим сначала метод «минимизации». В процессе минимизации мы варьируем большое число независимых параметров, количество которых N может достигать нескольких тысяч. Чем больше число колец мы выбираем для разбиения наших аксиально-симметричных проводников, тем точнее конечный результат. Однако увеличение их числа негативно сказывается на скорость компьютерных вычислений. Некоторые вычисления могут длиться около суток. Один из возможных приёмов сократить время счета – варьировать, например, каждый десятый заряд, а промежуточные интерполировать. Другой приём – подобрать аналитическую функцию для плотности заряда, у которой небольшое число варьируемых параметров.

Вторая проблема, с которой пришлось столкнуться при использовании метода «минимизации» — это минимизация полного заряда электронейтрального проводника. Если производить процедуру минимизации одновременно и для потенциала, и для полного заряда, то есть составить минимизируемую функцию, в которую входят две указанных характеристики, то алгоритм становится неустойчивым. Для решения данной проблемы в процессе минимизации проводятся следующие действия. В минимизируемую функцию входят только отклонения потенциала от среднего значения. Распределения зарядов при этом минимизируются принудительно. Как это происходит: когда программа минимизации на каждом своем шаге выдает очередную серию зарядов колец (распределение зарядов колец), мы вычитаем из заряда каждого кольца средний заряд всех колец (то есть среднее арифметическое зарядов).

Таким образом происходит довольно быстрая минимизация полного заряда. При этом тангенциальная компонента напряженности на поверхности проводника автоматически благополучно минимизируется и становится равной нулю вдоль всей поверхности. Такой подход замедляет процесс минимизации, но зато приводит к верным результатам.

«Энергетический» подход позволяет получить искомое решение заметно быстрее (за несколько секунд) чем метод «минимизации». Однако и он не лишен недостатков. Главный недостаток – немонотонная плотность заряда на поверхности проводника (происходят осцилляции заряда). Он связан с тем, что при записи СЛАУ не учитывается собственная энергия колец. Она пропорциональна квадрату заряда, поэтому знак заряда на величину энергии не влияет, а величина заряда влияет. Для решения этой проблемы можно добавить в СЛАУ для энергии слагаемые, отвечающие за собственную энергию колец, равные $const(Q_i)^2$, где Q_i – заряд i -го кольца, $const$ – постоянная одинаковая для всех колец, которая подбирается из условия исчезновения осцилляций. При такой добавке увеличение модуля заряда кольца становится энергетически невыгодно.

3. Результаты расчета и их обсуждение.

3.1. Система «сфера-точечный заряд».

Работоспособность алгоритмов проверялась на частных случаях, для которых известно аналитическое решение. Кратко рассмотрим задачу о взаимодействии электронейтральной сферы с точечным зарядом. В разделе «приложение Б» решение данной задачи с помощью метода изображений рассматривается более детально. На рисунке 4(а) представлена схема, поясняющая применение метода изображений для рассматриваемой системы тел. Не ограничивая общности, будем считать, что эти объекты располагаются на оси Oz, причем центр сферы находится в начале координат, а точечный заряд находится справа от нее. Также на рисунке 4(б) графически представлены точные и численные решения данной задачи в виде зависимостей энергии

взаимодействия сферы с точечным зарядом от координаты точечного заряда z . Каждое решение соответствует определенному методу. Сплошной линией обозначено точное решение, полученное путем использования метода изображений, а треугольными и круглыми точками обозначены результаты численного расчёта с использованием метода «минимизации» и «энергетического» метода, соответственно. Из графика видно, что численные решения хорошо согласуются с точным. Метод «минимизации» позволяет получить решение наиболее близкое к точному. Представленные численные решения соответствуют разбиению сферы на $N = 2000$ колец. Важно отметить, что увеличение числа колец N приводит к уменьшению погрешности численных вычислений для обоих методов.

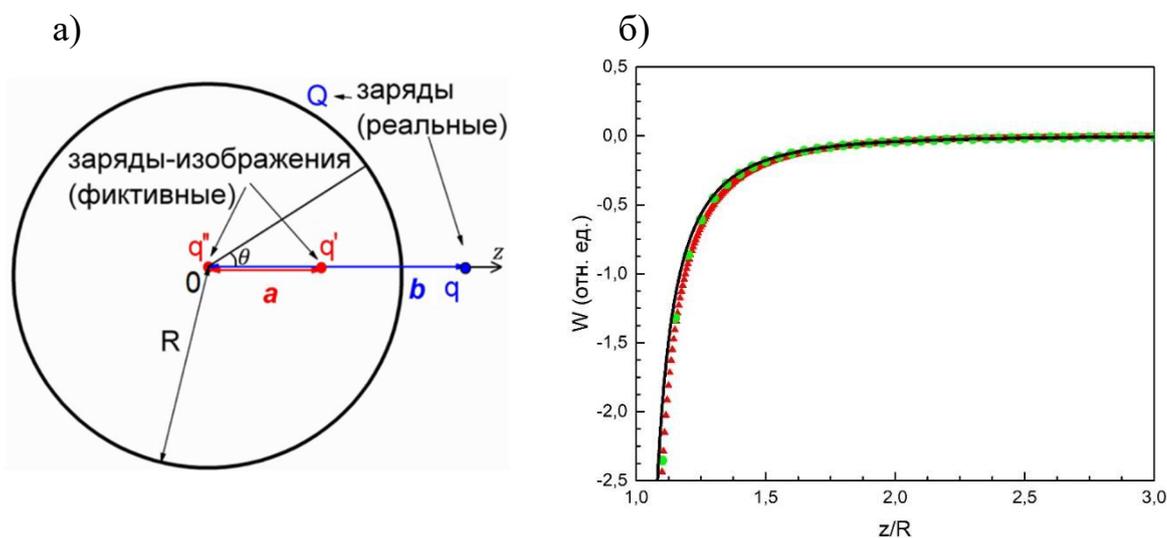


Рисунок 4. а) Схема, поясняющая применение метода изображений для системы "проводящая сфера - точечный заряд". б) Энергия взаимодействия проводящей электронейтральной сферы с точечным зарядом в зависимости от координаты z точечного заряда. Координата z нормирована на R , энергия - на q^2/R , где R – радиус сферы, q – величина заряда точечного заряда. Сплошная линия соответствует точному решению с использованием метода изображений. Точки показывают результаты численного расчета с использованием «энергетического» метода (кружки) и метода «минимизации» (треугольники). Численный расчет проводился для $N = 2000$, где N - число колец, на которые разбивается сфера.

На рисунке 5 представлены полученные с использованием метода «колец» напряженность и потенциал электростатического поля. Из графиков видно, что

значения потенциала внутри и на поверхности проводника совпадают и равны постоянной величине, напряженность внутри проводника и тангенциальная компонента напряжённости на поверхности проводника равны нулю. Резкие скачки вблизи границ проводника – проявление краевых эффектов. Полученные результаты демонстрируют выполнение условия эквипотенциальности поверхности проводника, что подтверждает применимость метода «колец» при исследовании электростатического поля аксиально-симметричных систем.

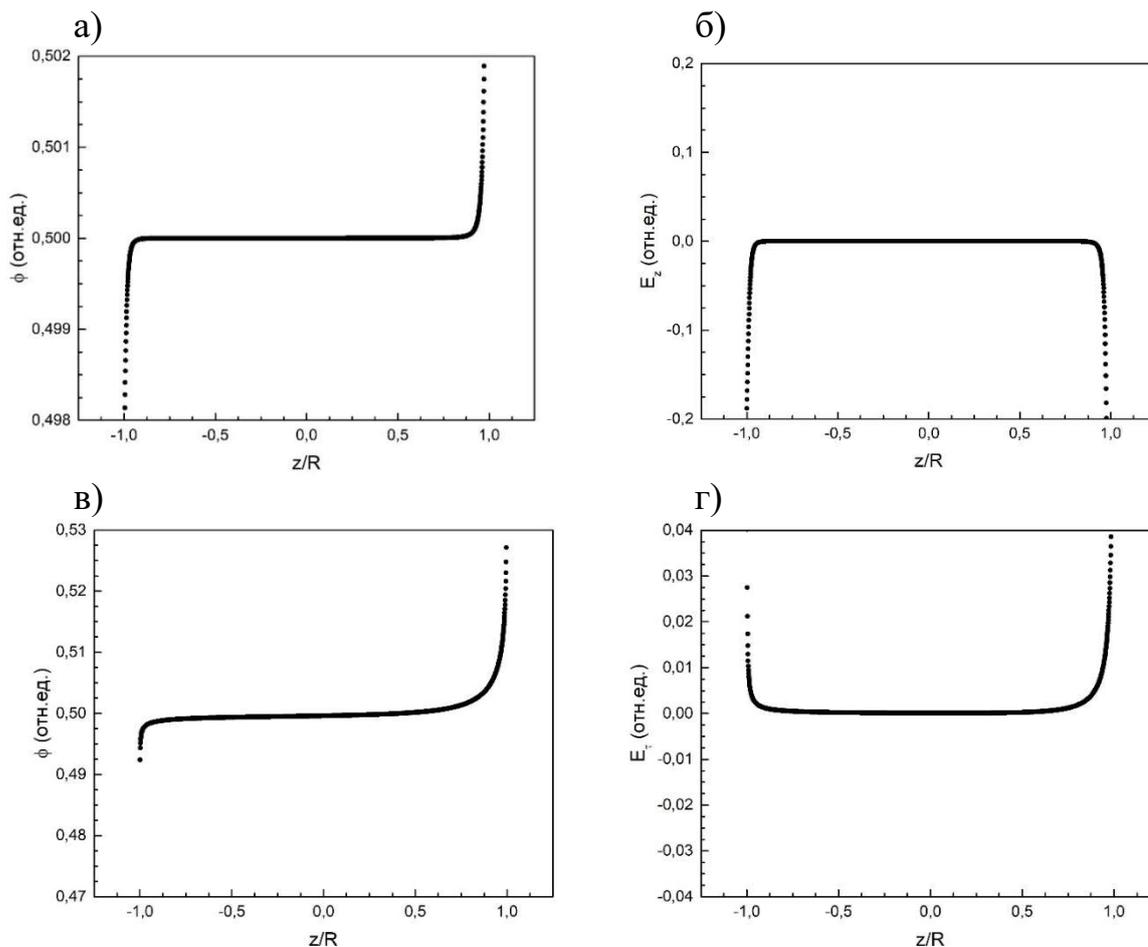


Рисунок 5. Результаты расчета потенциала и напряженности электростатического поля для системы, показанной на рисунке 5. Показаны потенциал (а) и напряженность (б) внутри сферы в точках на оси Oz, а также потенциал (в) и тангенциальная компонента напряженности (г) электрического поля в точках на поверхности сферы в зависимости от координаты z, нормированной на радиус сферы R. Значения потенциала и напряженности нормированы на q/R и q/R^2 , соответственно. Расчет проводился методом "минимизации" с $N=2000$ при фиксированном положении точечного заряда с координатой $z/R = 2$.

3.2. Система «полусфера-точечный заряд».

Перейдем к задаче о взаимодействии полусферы с точечным зарядом, которая также имеет точное решение. Пусть центр полусферы располагается в начале оси координат, а точечный заряд находится справа от неё вдоль оси Oz, как показано на рисунке 6(а).

Прежде, чем переходить к результатам, опишем еще одну применённую к данной системе приближённую аналитическую модель «кольцо - заряд», схема которой представлена на рисунке 7. Идея предложенной в дипломной работе модели состоит в том, что электронейтральная полусфера замещается точечным зарядом и равномерно заряженным кольцом, имеющими противоположные, но одинаковые по модулю заряды Q_+ и Q_- , соответственно. При поднесении внешнего положительно заряженного точечного заряда к нейтральной полусфере, на её поверхности будут индуцироваться заряды: на ближней к заряду области отрицательные, на дальней – положительные. Следовательно кольцо будет иметь отрицательный заряд Q_- , а точечный заряд Q_+ будет положительным. Проводник электронейтральный, поэтому должно выполняться равенство $Q_+ + Q_- = 0$. В рамках данной модели выражение для энергии взаимодействия полусферы с точечным зарядом как функцию координаты точечного заряда можно записать в компактном виде:

$$W(z) = \frac{Q_- q}{\sqrt{z^2 + R^2}} + \frac{Q_+ q}{z + R}, \quad (3.1)$$

где z – координата точечного заряда, R - радиус полусферы.

Величины зарядов Q_+ и Q_- подбираются из условия наилучшего количественного совпадения графика $W(z)$, построенного на основе модели «кольцо-заряд» по формуле (3.1), с точной зависимостью (1.16) из работы [Levin, 2011b]. Для полусферы единичного радиуса ($R = 1$) наилучший результат в рамках модели «кольцо-заряд» достигается при $|Q_1| = |Q_2| = 1/29$. Модель «кольцо - заряд» применима только в случае, если точечный заряд находится вне полости полусферы (при $z > 0$). При нахождении точечного заряда внутри полости проводника ($-R < z < 0$) индуцированные заряды будут распределены

иначе, поэтому в этой области модель работать не будет. Основное достоинство предложенной модели «заряд-кольцо» в простоте и наглядности, недостаток – невозможность найти абсолютные значения зарядов, не прибегая к точному решению.

На рисунке 6 (б) представлены результаты решения рассматриваемой задачи различными методами в виде зависимости энергии взаимодействия рассматриваемых тел от координаты точечного заряда. Сплошная тонкая линия соответствует точному решению из статьи [Levin 2011b], пунктирная толстая линия соответствует решению с использованием модели «кольцо-заряд», а квадратными и треугольными точками обозначены результаты численного расчёта с использованием метода «минимизации» и «энергетического» метода, соответственно. Как и в прошлом случае, решение методом минимизации оказалось наиболее близким к точному решению. Ранее было отмечено, что в данной системе между телами может происходить отталкивание. Действительно из графика видно, что на интервале по оси z/R от 0 до 0.63 энергия взаимодействия убывает. Следовательно сила, которая определяется как минус градиент от энергии будет положительной, что соответствует отталкиванию. Модель «кольцо-заряд» не позволяет получить решение с высокой точностью, однако она хорошо описывает положение минимума энергии, а значит и переход притяжения в отталкивание. Благодаря своей простоте эту модель выгодно использовать для «быстрого» определения поля создаваемого электронейтральной полусферой в системе «полусфера-точечный заряд», не вдаваясь в подробности распределения индуцированных зарядов на проводнике.

С помощью модели «кольцо-заряд» можно легко объяснить причину возникновения отталкивания в системе «полусфера-точечный заряд»: индуцированные заряды противоположного знака (кольцо Q_-) находятся ближе к точечному заряду, чем индуцированные заряды такого же знака (точечный заряд Q_+) как заряд точечного заряда q , однако сила от них направлена "неэффективно" (под большим углом θ к оси симметрии). Таким образом при расположении точечного заряда q вблизи начала координат, где угол θ

наибольший (см. рисунок 7), сила отталкивания со стороны индуцированных зарядов на вершине полусферы (точечный заряд Q_+) преобладает над силой притяжения, обусловленной индуцированными зарядами на краю полусферы (кольцо Q_-), что и вызывает отталкивание.

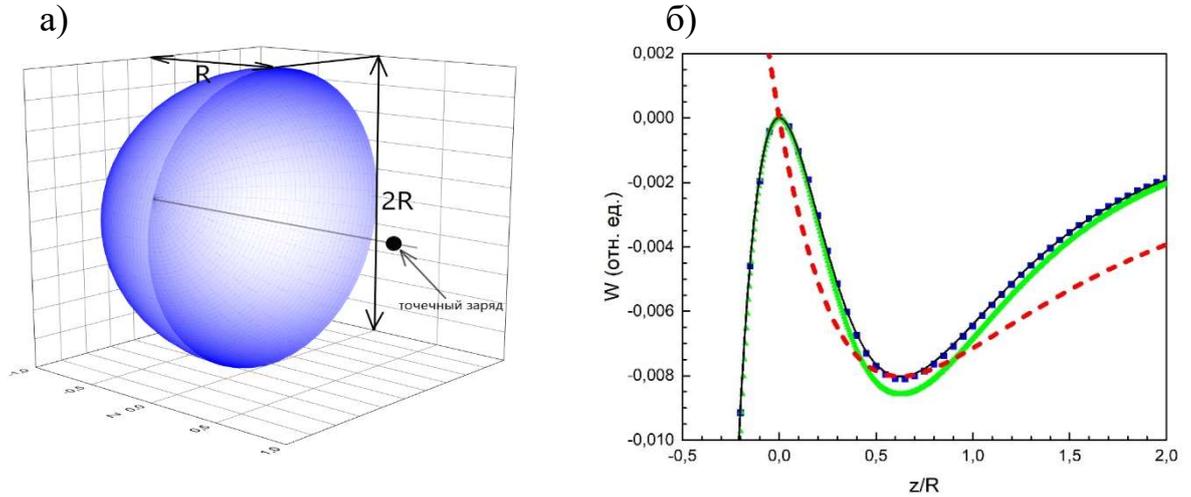


Рисунок 6. а) Схема, поясняющая взаиморасположение тел в системе «полусфера-точечный заряд». б) Энергия взаимодействия проводящей электронейтральной полусферы с точечным зарядом в зависимости от координаты z точечного заряда. Координата z нормирована на R , энергия - на q^2/R , где R – радиус сферы, q – величина заряда точечного заряда. Черная линия соответствует точному решению из работы [Levin, 2011], формуле (1.16). Точки показывают результаты численного расчета с использованием «энергетического» метода (треугольники) и метода «минимизации» (квадраты). Пунктирная линия соответствует результатам, полученным с использованием модели «кольцо-точечный заряд». Численный расчет проводился для $N = 2000$.

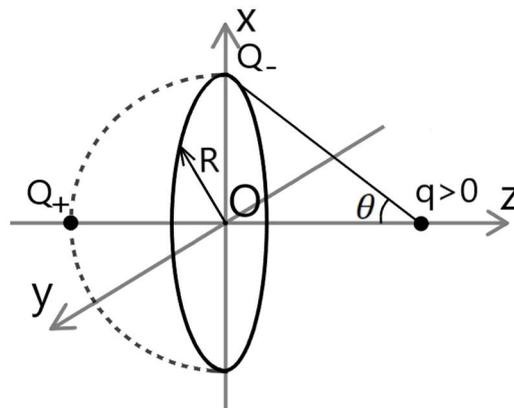


Рисунок 7. Схема, поясняющая расположение кольца и точечного заряда в модели «кольцо-заряд».

Анализируя результаты решения двух рассмотренных задач, можно прийти к выводу, что численные решения хорошо согласуются с точными. Таким

образом разработанные алгоритмы можно использовать для решения других задач.

3.3. Система «полуэллипсоид вращения – точечный заряд».

Рассмотрим теперь задачу о взаимодействии с точечным зарядом для других аксиально – симметричных проводников, не описанных в литературе.

Сначала посмотрим, что будет, если полусферу заменить на полуэллипсоид вращения. Обозначим полуоси полуэллипсоида a , b , c , причем $b = c$ всегда, полуось a ориентирована вдоль оси Oz . Центр полуэллипсоида располагается в начале координат, а точечный заряд находится справа от неё на оси Oz , как показано на рисунке 8(а).

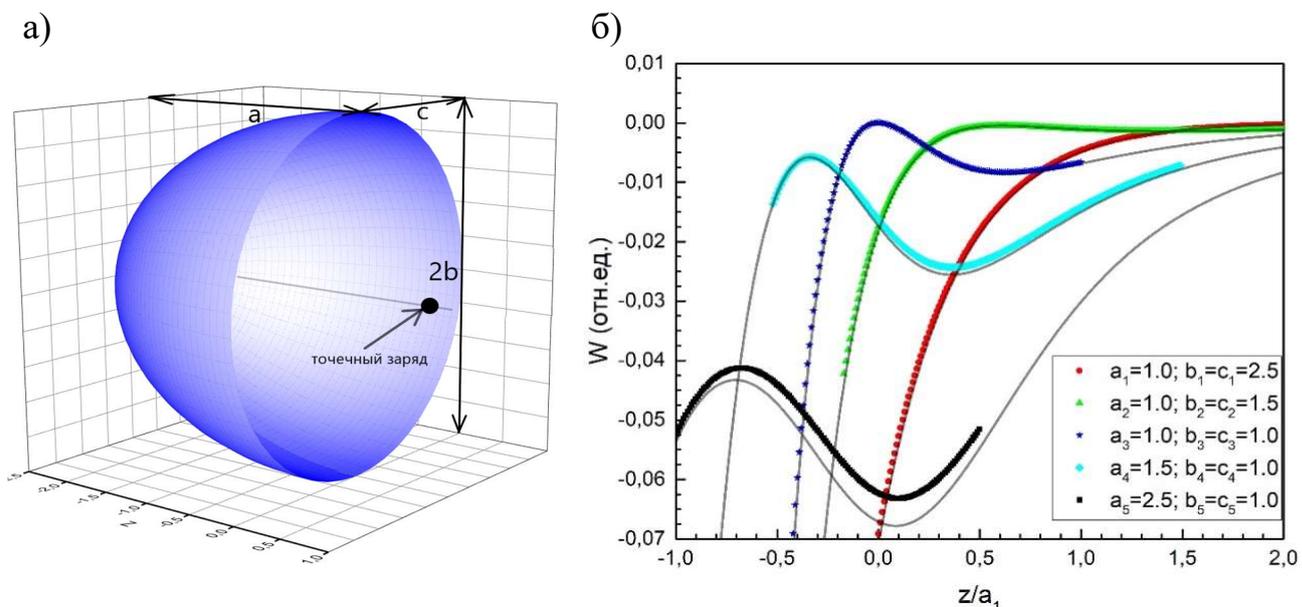


Рисунок 8. а) Схема, поясняющая взаиморасположение тел в системе «полуэллипсоид вращения-точечный заряд». a , b , c - полуоси полуэллипсоида. б) Энергия взаимодействия проводящего электронейтрального полуэллипсоида с точечным зарядом в зависимости от координаты z точечного заряда при различных значениях полуосей проводника. Координата z нормирована на a_1 , энергия - на q^2/a_1 , где $a_1 = 1$ – полуось полуэллипсоида вдоль оси Oz , q – величина заряда точечного заряда. Крупные точки различной формы соответствуют результатам численного расчета с использованием метода «минимизации». Каждому набору значений полуосей полуэллипсоида согласно таблице на графике соответствует своя форма точки. Сплошные линии показывают результаты численного расчета с использованием «энергетического» метода. Численный расчет проводился для $N = 2000$.

На рисунке 8(б) представлены решения данной задачи в виде зависимостей энергии взаимодействия рассматриваемых тел от координаты точечного заряда при различных значениях полуосей полуэллипсоида. Результаты численного расчета с использованием «энергетического» метода обозначены крупными точками различной формы. Каждому набору значений полуосей полуэллипсоида соответствует своя форма точки. Представленная на рисунке 8(б) таблица позволяет ознакомиться с введенными обозначениями точек. Сплошные линии показывают результаты численного расчета с использованием «энергетического» метода. Из графика видно, что при больших значениях полуосей b и c , то есть, когда полуэллипсоид вытянут в поперечном направлении, на зависимости пропадает минимум, а значит исчезает отталкивание. При растяжении полуэллипсоида в продольном направлении (вдоль полуоси a) глубина энергетического минимума и протяженность области отталкивания увеличиваются.

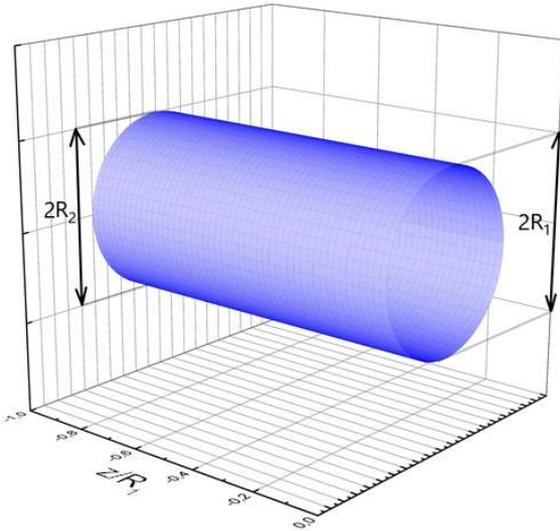
3.4. Система «проводник с отверстием-точечный заряд».

В предыдущих разделах было рассмотрено взаимодействие точечного заряда с электронейтральными тонкостенными проводниками, полость внутри которых ограничена с одной стороны. Представляет интерес рассмотреть случай проводника в виде «трубы» - цилиндрической или конической.

Первым рассмотрим цилиндрический проводник радиуса $R_1 = R_2$ (частный случай усеченного конического проводника с бесконечной высотой), схема которого представлена на рисунке 9(а). Пусть правый торец цилиндра находится в начале координат, а левый торец занимает отрицательную координату R_1 на оси Oz . Сразу договоримся использовать одинаковый радиус R_1 правых торцов для всех проводников, рассматриваемых в данном разделе. Результаты вычисления энергии взаимодействия цилиндра с точечным зарядом в зависимости от координаты точечного заряда показаны на рисунке 9(б). Треугольными точками и сплошной линией обозначены результаты численного расчёта с использованием метода «минимизации» и «энергетического» метода,

соответственно. Введенные обозначения будут распространяться для обозначения решений задач с коническими проводниками. Из графика видно, что точечный заряд вытесняется из трубы в точки локального минимума энергии вблизи торцов цилиндра (снаружи).

а)



б)

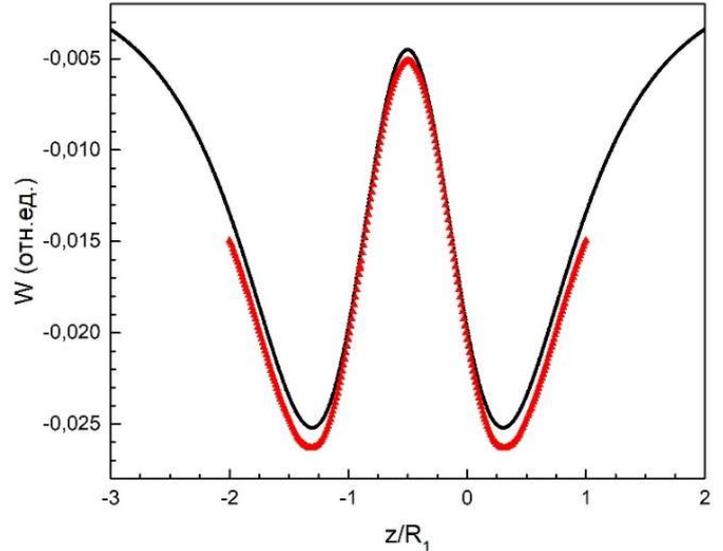


Рисунок 9. а) Схема цилиндрического проводника (радиусы торцов равны $R_1 = R_2$). б) Энергия взаимодействия проводящего электронейтрального цилиндра с точечным зарядом в зависимости от координаты z точечного заряда. Координата z нормирована на R_1 , энергия - на q^2/R_1 , где $R_1 = 1$ - радиус правого торца, q - величина заряда точечного заряда. Треугольные точки соответствуют результатам численного расчета с использованием метода «минимизации». Сплошные линии показывают результаты численного расчета с использованием «энергетического» метода. Численный расчет проводился для $N = 2000$.

Если труба принимает вид усеченного конуса (рисунок 10 (а), рисунок 11(а)), то глубина указанных минимумов зависит от того, у какого торца, широкого или узкого, он (минимум энергии) находится (глубже минимум у узкого торца). Кроме того, при конической форме трубы локальный минимум смещается по сравнению с цилиндрической трубой: к торцу, если он узкий, и от торца, если он широкий. Увеличивая радиус одного торца (R_2) при фиксированном втором (R_1) можно добиться исчезновения минимума энергии вблизи большего отверстия. Это хорошо видно из сравнения рисунков 10 (б)-(г) (напомним, что R_1 для всех вариантов расчетов выбиралась одна и та же).

Как и в случае с полусферическими и полу-эллипсоидальными проводниками электронейтральные «трубы» могут отталкивать заряд, когда он находится поблизости (или внутри). На больших расстояниях между проводником и точечным зарядом действуют, разумеется, силы притяжения.

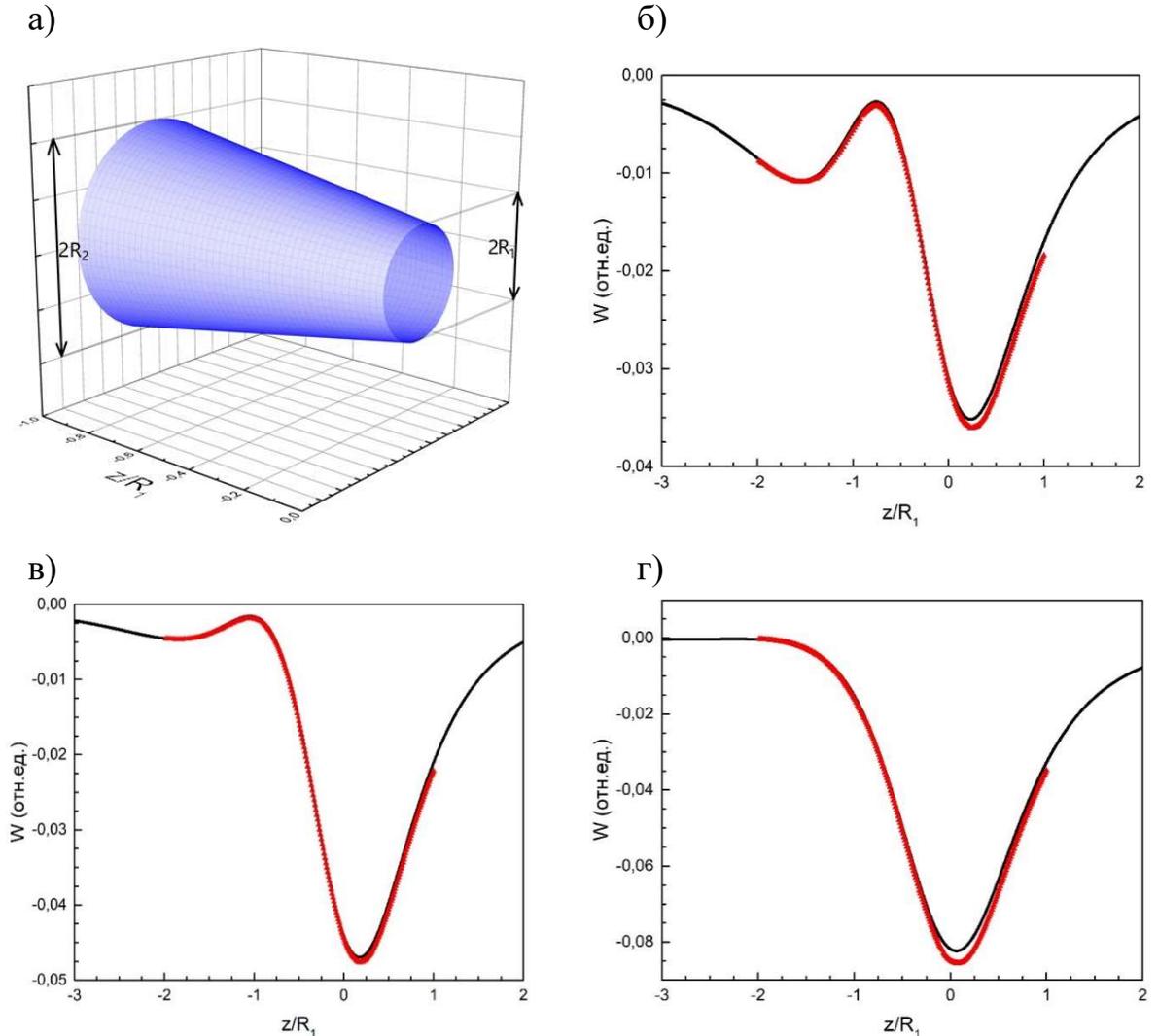


Рисунок 10. а) Схема проводника, имеющего форму усеченного конуса с радиусами торцов R_1 и R_2 , причем $R_1 < R_2$. (б), (в), (г) – зависимости энергии взаимодействия проводящего электронейтрального усеченного конуса с точечным зарядом в зависимости от координаты z точечного заряда при соотношениях радиусов торцов $R_2 = 1.2R_1$, $R_2 = 1.24$, $R_2 = 2R_1$ соответственно. Координата z нормирована на R_1 , энергия - на q^2/R_1 , где $R_1 = 1$ – радиус правого торца, q – величина заряда точечного заряда. Треугольные точки соответствуют результатам численного расчета с использованием метода «минимизации». Сплошные линии показывают результаты численного расчета с использованием «энергетического» метода. Численный расчет проводился для $N = 2000$.

3.5. Система «сфера с отверстием-точечный заряд».

В следующей задаче в роли проводника сфера с отверстием. На рисунке 12 представлена схема проводника: слева изображен целый проводник, справа его сечение. Центр сферы с отверстием находится в начале координат. Символом z_h обозначается координата отверстия, которая отсчитывается по оси Oz.

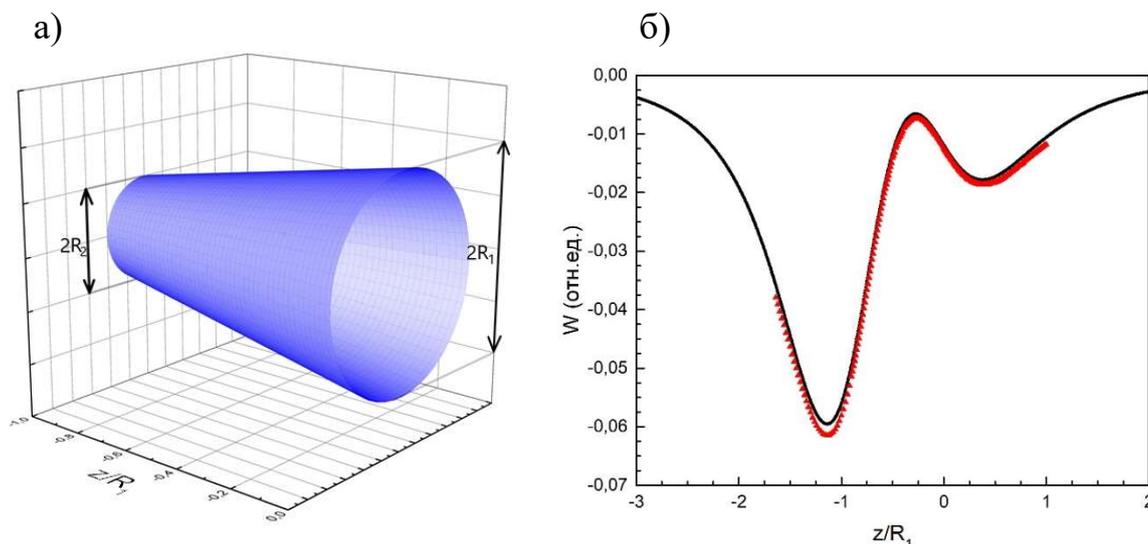


Рисунок 11. а) Схема проводника, имеющего форму усеченного конуса с радиусами торцов R_1 и R_2 , причем $R_1 > R_2$. б) Зависимость энергии взаимодействия проводящего электронейтрального усеченного конуса с точечным зарядом в зависимости от координаты z точечного заряда при соотношении радиусов торцов $R_2 = 0.8R_1$. Координата z нормирована на R_1 , энергия - на q^2/R_1 , где $R_1 = 1$ – радиус правого торца, q – величина заряда точечного заряда. Треугольные точки соответствуют результатам численного расчета с использованием метода «минимизации». Сплошные линии показывают результаты численного расчета с использованием «энергетического» метода. Численный расчет проводился для $N = 2000$.

На рисунке 13 изображены зависимости энергии взаимодействия проводника с точечным зарядом при различных величинах координат отверстий z_h . Точками обозначены результаты вычислений с использованием метода «минимизации». Решения «энергетическим» методом обозначены линиями. Из построенных зависимостей видно, что при увеличении размера отверстия происходит уменьшение глубины локального минимума энергии и его смещение вглубь полости. С помощью графиков на рисунке 14 продемонстрировано как меняется глубина локального минимума энергии W_{min} и его координата z_{min} при

изменении координаты отверстия z_h . Область отталкивания сохраняется для полусферы с отверстиями любых размеров за исключением двух предельных случаев: $z_h = 1$ (задача о взаимодействии сферы с точечным зарядом), $z_h = -1$ (задача о взаимодействии двух точечных зарядов).

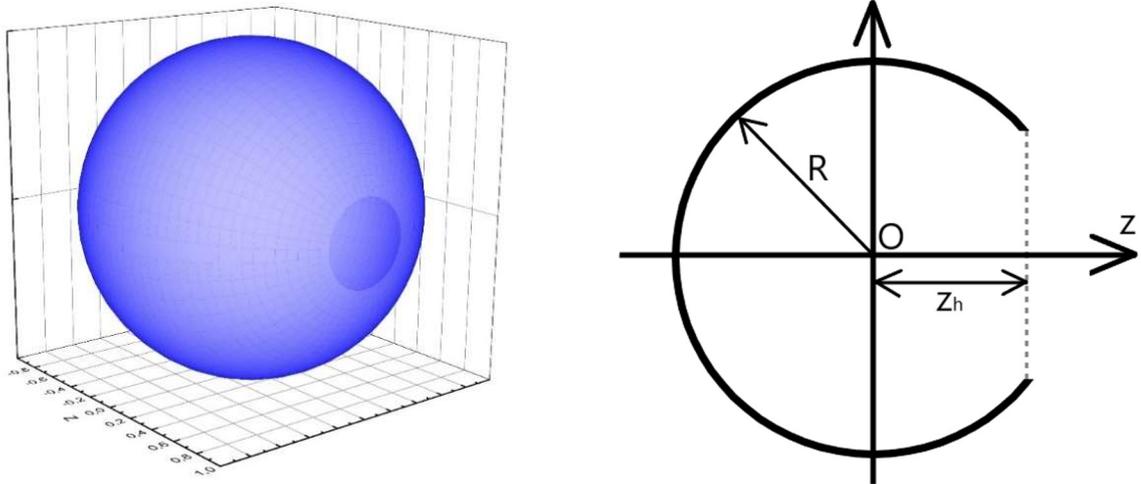


Рисунок 12. Схема, поясняющая расположение отверстия в проводящей сфере. R – радиус сферы, z_h – координата отверстия.

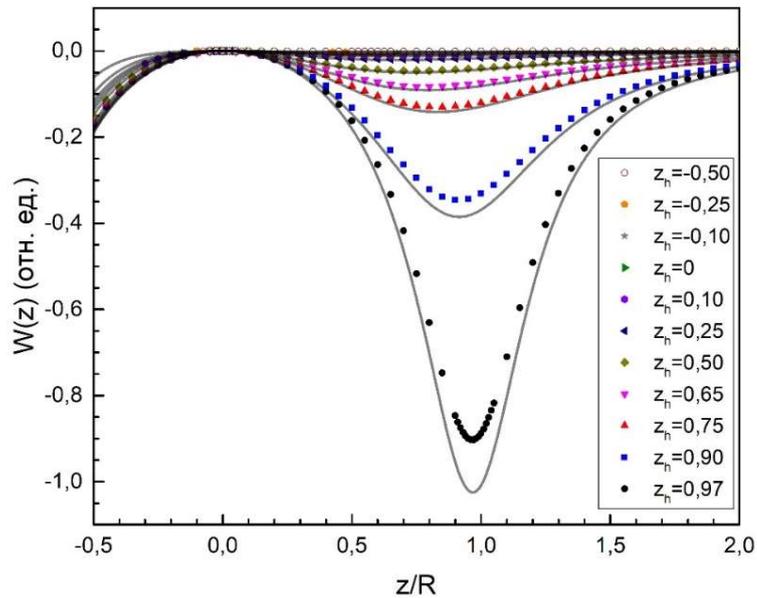


Рисунок 13. Зависимости энергии взаимодействия сферы с отверстием и точечного заряда от координаты точечного заряда при различных размерах отверстия в сфере. Координата z нормирована на R , энергия - на q^2/R , где R – радиус сферы, q – величина заряда точечного заряда. Точки соответствуют результатам численного расчета с использованием метода «минимизации». Сплошные линии вблизи точек показывают результаты численного расчета с использованием «энергетического» метода. Численный расчет проводился для $N = 2000$.

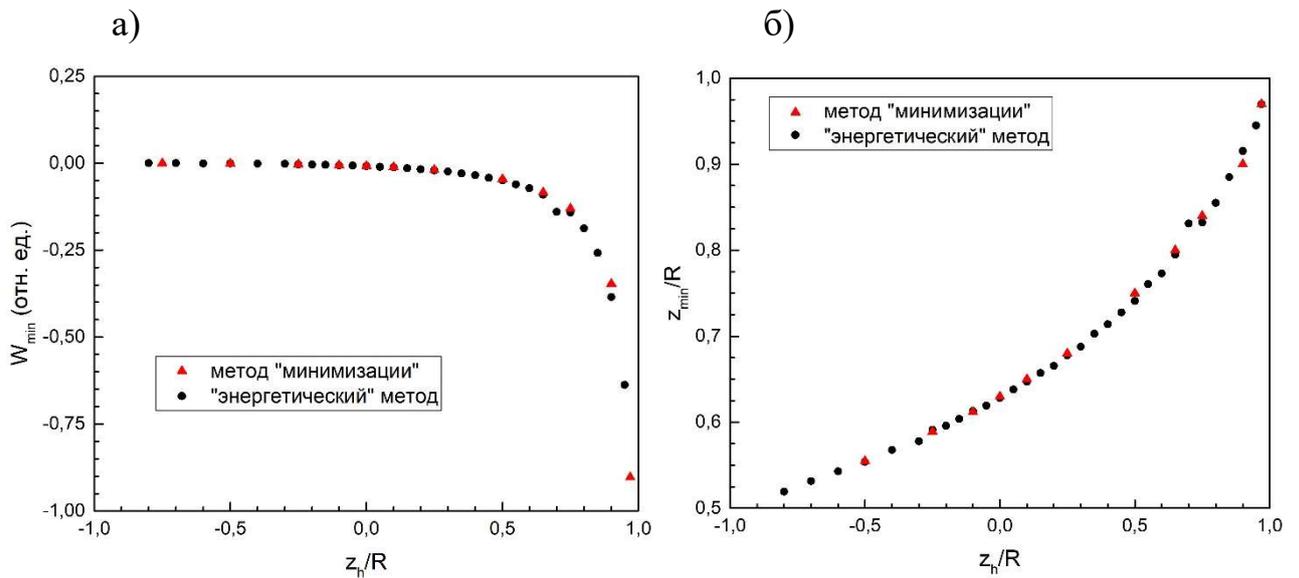


Рисунок 14. а) Зависимость глубины минимума энергии взаимодействия сферы с отверстием и точечного заряда W_{min} от координаты отверстия z_h . б) Зависимость координаты минимума z_{min} на энергетической $W(z)$ от координаты отверстия z_h . На обоих графиках (а) и (б) треугольными и круглыми точками обозначены результаты численного счета с использованием метода «минимизации» и «энергетического» метода соответственно. Координаты z_h и z_{min} нормированы на R , энергия W_{min} - на q^2/R , где R радиус сферы, q – величина заряда точечного заряда. Численный расчет проводился для $N = 2000$.

3.6. Случай заряженной полусферы.

Предложенные в работе алгоритмы позволяют рассматривать и заряженные проводники. Вернемся к задаче с полусферой и точечным зарядом и посмотрим, как изменится характер взаимодействия, если проводник будет иметь ненулевой полный заряд. На рисунке 15 представлено несколько зависимостей энергии взаимодействия полусферы с точечным зарядом от координаты точечного заряда. Точками обозначены численные решения с использованием метода «минимизации», линиями – «энергетического» метода. Каждая кривая соответствует определенной величине полного заряда проводника Q_{total} . Интересно то, что в случае, когда проводник имеет небольшой отрицательный полный заряд, например $Q_{total} = -0.025$, а точечный заряд q положительный существует участок, где разноименно заряженные тела отталкиваются.

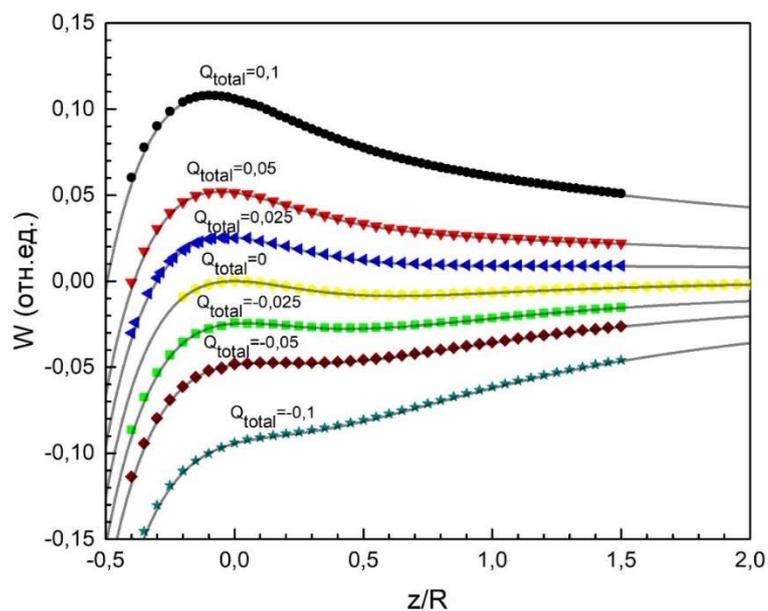


Рисунок 15. Энергия взаимодействия проводящей полусферы с точечным зарядом в зависимости от координаты z точечного заряда при различных значениях полного заряда проводника Q_{total} . Координата z нормирована на R , энергия - на q^2/R , где R – радиус полусферы, q – величина заряда точечного заряда. Точки соответствуют результатам численного расчета с использованием метода «минимизации». Сплошные линии показывают результаты численного расчета с использованием «энергетического» метода. Численный расчет проводился для $N = 2000$.

Заключение.

(1) Реализованы компьютерные методы расчета электростатического поля аксиально-симметричного проводника и точечного заряда, использующие:

а) условие эквипотенциальности поверхности проводника (метод «минимизации»);

б) условие минимума электростатической энергии при равновесном распределении заряда на проводнике («энергетический» метод).

При проверке работоспособности методов первый из них показал наилучшие результаты.

(2) Показано, что эффект отталкивания точечного заряда и электронейтрального проводника возникает для проводников различной формы: сфера с отверстием, полусфера, полуэллипсоид вращения (вытянутый и сплюснутый), цилиндр, конус.

Общее свойство этих проводников – наличие полости (сквозной или несквозной).

(3) Расстояние между электронейтральным проводником с полостью и точечным зарядом, при котором возникает эффект отталкивания, зависит от конкретной формы проводника.

(4) Эффект отталкивания между проводником с полостью и точечным зарядом существует, даже если проводник не электронейтрален, но обладает небольшим полным зарядом другого знака, чем заряд точечного заряда.

Выводы.

В результате изучения влияния формы проводников на электростатические свойства рассмотренных аксиально-симметричных систем типа «проводник-точечный заряд» приходим к следующим выводам:

- (1) Наличие особенностей в форме (геометрии) проводника, таких как углубление или отверстие, может приводить к отталкиванию в системе «электронейтральный проводник-точечный заряд».
- (2) Увеличение протяженности углубления в электронейтральном проводнике приводит к расширению области отталкивания (интервала расстояний между проводником и точечным зарядом, в пределах которого происходит отталкивание).
- (3) Точечный заряд вытесняется из цилиндрической полости электронейтрального проводника.
- (4) Разноименно заряженный точечный заряд и проводник с особенностями в геометрии могут отталкиваться при относительно малой величине полного заряда последнего.
- (5) Основную роль в явлении отталкивания между нейтральным проводником и точечным зарядом играет достаточно глубокая полость внутри проводника. Вблизи неё заряды противоположного знака, по отношению к точечному заряду, приближаются к нему, но притягивают в направлении перпендикулярно оси проводника, а не вдоль. Из-за симметрии системы эти перпендикулярные силы компенсируют друг друга, а продольная сила притяжения оказывается более слабой, чем сила отталкивания зарядов того же знака, хотя и более удаленных, но создающих силу преимущественно вдоль оси.

Список литературы.

- Алешкевич В.А. “Электромагнетизм”. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014, 86-87 (2014).
- Батыгин В. В., Топтыгин И.Н. “Сборник задач по электродинамике-РХД” (2002).
- Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. “Сборник задач по математической физике” (1956).
- Гринберг Г.А. "Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений" (1948).
- Джексон Дж. "Классическая электродинамика" М.: Мир (1965).
- Ильина В.А., Силаев П.К. “Численные методы для физиков-теоретиков”. I, Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 65-69 (2003).
- Ильина В.А., Силаев П.К. “Численные методы для физиков-теоретиков”. I, Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 93-96 (2003).
- Миролубов Н.Н., Костенко М.В., Левинштейн М.Л., Тиходеев Н.Н. "Методы расчета электростатических полей" (1963).
- Поляков П. А. “О новых точных решениях задачи электростатики проводников”, ВМУ. Серия 3 ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 2014 № 6 (2014).
- Смайт В. "Электростатика и электродинамика" М.:ИИЛ (1954).
- Тихонов А.Н., Самарский А.А. “Уравнения математической физики”, Москва (1977).
- Bachas C. P. “Comment on the sign of the Casimir force” J. Phys. A: Math. Theor. 40 9089 (2007).
- Gan Z., Jiang S., Luijten E., Xu Z. “A Hybrid Method for Systems of Closely Spaced Dielectric Spheres and Ions”. SIAM Journal on Scientific Computing, 38(3), B375–B395 (2016).
- Kenneth O., Klich I. “Opposites Attract: A Theorem about the Casimir Force”, PRL 97, 160401 (2006).
- Lekner J., “Electrostatics of two charged conducting spheres”, Proc. R. Soc. A 468, 2829-2848 (2012).
- Levin M., McCauley A. P., Rodriguez A. W., Homer Reid M. T., Johnson S.G. “Casimir Repulsion between Metallic Objects in Vacuum”, PRL 105, 090403 (2010).

Levin M., Johnson S., “Is the electrostatic force between a point charge and a neutral metallic object always attractive? “, *Am. J. Phys.* **79**(3), 843-849 (2011).

Levin M., Johnson S., “The electrostatic energy of a point charge interacting with a neutral metallic hemisphere” <http://dx/doi/org/10.1121/1.3469765> (2011).

Lindell, I. V. “Electrostatic image theory for the dielectric sphere”. *Radio Science*, **27**(1), 1–8 (1992).

Lindgren E. B., Chan Ho-Kei, Stace A. J., Besley E. “Progress in the theory of electrostatic interactions between charged particles”. *Phys. Chem. Chem. Phys.* **10.1039.C5CP07709E** (2016).

Press W. H., Flannery B.P., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. “Numerical Recipes in C”, 2nd Ed. (Cambridge University Press 1992) pp. 43-49 (1992);

Press W. H., Flannery B.P., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. “Numerical Recipes in C”, 2nd Ed. (Cambridge University Press 1992) pp. 261-270 (1992);

Qin J., Li J., Lee V., Jaeger H., de Pablo J. J., Freed K. F. “A theory of interactions between polarizable dielectric spheres”. *Journal of Colloid and Interface Science* **469**, 237–241 (2016).

Trizac E., Samaj L. “Like-charge colloidal attraction: a simple argument”, *arXiv: 1210.5843v1* (2012).

Wu J., Bratko D., Prausnitz J. M. “Interaction between like-charged colloidal spheres in electrolyte solutions”, *Proc. Natl. Acad. Sci.* **95**, 15169–15172 (1998).

Xuea C., Dengb S., “Image systems for the reaction field inside spheroidal dielectric objects and applications”, *Journal of Electrostatics* **90**:153-161 (2017).

Zhu P., “Field distribution of a uniformly charged circular arc”, *Journal of Electrostatics* **63**, 1035-1047 (2005).

Приложение А.

Задача о взаимодействии точечного заряда с бесконечной проводящей электронейтральной плоскостью.

Обычно знакомство методом изображений начинается с рассмотрения задачи по нахождению поля, порождаемого точечным зарядом q , находящимся на расстоянии h над бесконечной проводящей электронейтральной плоскостью (рисунок 1А), которую принимают за эквипотенциальную поверхность [Алешкевич 2014]. Так как проводящая плоскость бесконечна, то ее потенциал равен нулю. Из этих соображений переходят к эквивалентной системе с двумя точечными зарядами противоположных знаков (q и $-q$). Первый заряд - исходный, а второй - его изображение. При этом расстояние между ними равно удвоенному расстоянию между объектами исходной системы, то есть $2h$. В результате приходим к простому выражению для потенциала поля над проводящей плоскостью (в области I):

$$\varphi^I = \frac{q}{r_q} + \frac{(-q)}{r_{-q}}, \quad (\text{A.1})$$

где r_q и r_{-q} расстояния до точечных зарядов q и $-q$ соответственно.

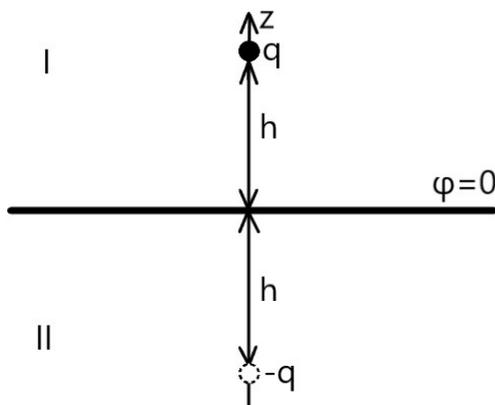


Рисунок 1А. Схема, поясняющая применение метода изображений для системы «бесконечная проводящая плоскость – точечный заряд».

В данном случае метод изображений позволяет получить выражение для порождаемого точечным зарядом q поля, не вдаваясь в подробности о распределении индуцированных зарядов на поверхности бесконечной плотности. При этом, имея выражение для потенциала в верхнем

полупространстве φ^I и зная, что в нижнем полупространстве потенциал принимает постоянное значение $\varphi^{II} = const$, можно получить формулу для плотности зарядов на поверхности проводящей плоскости. Воспользовавшись граничным условием для нормальной компоненты вектора напряженности приходим к искомому выражению:

$$\rho_s = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi^I}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\frac{qh}{2\pi(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (\text{A.2})$$

где x – расстояние до прямой, на которой лежат заряды.

Сила, действующая со стороны пластины на точечный заряд:

$$\vec{F} = -\frac{q^2}{(2h)^2} \vec{e}_z. \quad (\text{A.3})$$

Она всегда отрицательна, поэтому проводящая пластина притягивает точечный заряд при любом расстоянии между ними.

Приложение Б.

Задача о взаимодействии проводящей электронейтральной сферы с точечным зарядом.

Рассмотрим задачу о взаимодействии электронейтральной проводящей сферы с точечным зарядом q . С помощью метода изображений найдем плотность индуцированных на поверхности сферы зарядов, электростатический потенциал во всем пространстве и энергию взаимодействия полусферы с точечным зарядом как функцию координаты точечного заряда.

Не ограничивая общности, поместим центр сферы в начало координат, точечный заряд q поместим вне сферы на оси Oz в координату b (рисунок 1Б). Перейдем к эквивалентной системе, которая в данном случае состоит из трех точечных зарядов, лежащих на одной прямой: один из них q исходный, два других q' и q'' являются зарядами-изображениями и располагаются в области внутри сферы (рисунок 1Б). Для удобства обозначим области вне и внутри сферы как I и II соответственно. Заряды q и q' отвечают за совпадение одной из эквипотенциальных поверхностей порождаемого ими поля со сферой, а заряд q'' ,

располагающийся в центре сферы, определяет полный заряд проводника. Так как по условию рассматриваемая сфера электонейтральная, то должно выполняться следующее соотношение:

$$q' + q'' = Q = 0, \quad (\text{Б. 1})$$

где Q -полный заряд проводника.

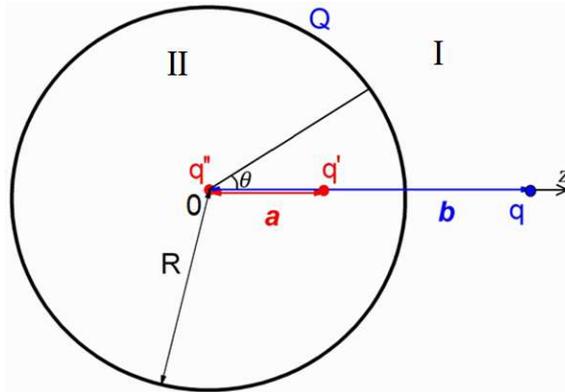


Рисунок 1Б. Схема, поясняющая применение метода изображений для системы "проводящая сфера - точечный заряд".

Таким образом, работая с эквивалентной схемой, в декартовых координатах можно записать формальное выражение для потенциала вне сферы:

$$\varphi^I = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - b)^2}} + \varphi_{\text{возм}}^I, \quad (\text{Б. 2})$$

где $\varphi_{\text{возм}}^I = \frac{q'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} + \frac{q''}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ потенциал создаваемый индуцированными на поверхности сферы зарядами, представленный в виде суммы потенциалов зарядов-изображений.

Внутри сферы (в области II) ввиду отсутствия там зарядов потенциал принимает постоянное значение ($\varphi^{II} = \text{const}$).

Перейдем для удобства к сферической системе координат (r, θ, φ) . Потенциал вне сферы в новых координатах будет иметь вид:

$$\varphi^I = \frac{q}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta}} + \frac{q''}{r} \quad (\text{Б. 3})$$

Искомую поверхностную плотность индуцированных зарядов ρ_s можно найти из следующих граничных условий:

$$\begin{cases} r = R \\ \varphi^I = \varphi^{II} = C = \text{const} \\ \rho_s = \frac{1}{4\pi} (D_n^I - D_n^{II}) \end{cases} \quad (\text{Б. 4})$$

Но перед тем как это сделать, нужно определить величины a , q' и q'' . Для начала определим значение параметра a (координаты точечного заряда q' на оси z). Получим его из следующих соображений. Так как вдоль всей поверхности сферы, то есть для любого аксиального угла θ , должно выполняться условие непрерывности потенциала, то и частная производная от потенциала по этому углу на границе проводника также должна быть непрерывной ($\forall \theta \varphi^I = \varphi^{II} \rightarrow \frac{\partial \varphi^I}{\partial \theta} = \frac{\partial \varphi^{II}}{\partial \theta}$). Записав соответствующее условие приходим выражению:

$$\frac{qbR}{(R^2 + b^2 - 2Rb \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{q'aR}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad (\text{Б. 5})$$

После возведения в квадрат получаем:

$$q^2 b^2 (R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta)^3 = q'^2 a^2 (R^2 + b^2 - 2bR \cos \theta)^3 \quad (\text{Б. 6})$$

Так как функции $\cos \theta$ при различных степенях линейно независимы, приравняем отдельно коэффициенты стоящие перед $\cos \theta$ в нулевой и первой степенях:

$$\cos^0 \theta: q^2 b^2 (R^2 + a^2)^3 = q'^2 a^2 (R^2 + b^2)^3 \quad (\text{Б. 7})$$

$$\cos^1 \theta: q^2 b^2 a (R^2 + a^2)^2 = q'^2 a^2 b (R^2 + b^2)^2 \quad (\text{Б. 8})$$

Поделив первое уравнение на второе, получаем квадратное уравнение:

$$a^2 b - (R^2 + b^2)a + R^2 b = 0 \quad (\text{Б. 9})$$

Решая его относительно переменной a , получаем два решения:

$$a = b; \frac{R^2}{b} \quad (\text{Б. 10})$$

Второе решение $a = \frac{R^2}{b}$ соответствует искомому положению заряда-изображения.

Для нахождения величин q' и q'' подставим полученное выражение для a в соотношение (64):

$$\frac{qb}{(R^2 + b^2 - 2Rb \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{q' \frac{R^2}{b}}{(R^2 + \frac{R^4}{b^2} - 2R \frac{R^2}{b} \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad (\text{Б. 11})$$

Сокращая выражения в скобках находим величину первого заряда-изображения:

$$q' = -\frac{qR}{b} \quad (\text{Б. 12})$$

Из условия электронейтральности сферы ($q' + q'' = 0$) находим величину второго заряда- изображения:

$$q'' = -q' = \frac{qR}{b} \quad (\text{Б. 13})$$

Из граничного условия $\varphi^I|_{r=R} = \varphi^{II}|_{r=R} = \text{const}$ можно определить величину потенциала сферы :

$$\varphi^{II} = \frac{q}{b} \quad (\text{Б. 14})$$

Для нахождения поверхностной плотности заряда из граничного условия для нормальной компоненты вектора электростатической индукции D_n получаем выражение:

$$\rho_s = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi^I}{\partial r} \Big|_{r=R} \quad (\text{Б. 15})$$

Вычислив частную производную по координате r от потенциала в первой области $\varphi^I = \frac{q}{\sqrt{r^2+b^2-2rb \cos \theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2+a^2-2ra \cos \theta}} + \frac{q''}{r}$, приходим к искомому выражению для плотности зарядов на поверхности сферы:

$$\rho_s = \frac{q}{4\pi} \left(\frac{R \left(1 - \frac{b^2}{R^2}\right)}{(R^2 + b^2 - 2Rb \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{bR} \right) \quad (\text{Б. 16})$$

Полученное выражение (Б.16) можно использовать для задания начального приближения при решении задачи о взаимодействии имеющей малое отверстие сферы с точечным зарядом методом «минимизации». С упомянутым методом можно ознакомиться в главе 2 данной работы.

Чтобы удостовериться в корректности формулы (Б.16), можно проверить выполнимость условия электронейтральности проводника, то есть посчитать полный заряд проводника. Для этого нужно вычислить следующий интеграл:

$$Q = \iint \rho_s dS = R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta \rho_s d\theta, \quad (\text{Б. 17})$$

где интегрирование производится по всей поверхности сферы. Вычисление данного интеграла дает нулевой ответ, что означает выполнение условия электронейтральности проводника.

Подставляя в формулу (Б.3) найденные величины a , q' и q'' , получаем окончательное выражения для потенциалов внутри и вне сферы:

$$\varphi^{II} = \frac{q}{b} = const; \varphi^I(r, \theta) = \frac{q}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta}} - \frac{qR}{b\sqrt{r^2 + \frac{R^4}{b^2} - \frac{2rR^2 \cos \theta}{b}}} + \frac{qR}{rb}, \quad (\text{Б. 18})$$

Первое слагаемое в выражении $\varphi^I(r, \theta)$ представляет собой потенциал поля, создаваемого точечным зарядом q , сумма остальных двух слагаемых является потенциалом поля электронейтральной сферы.

Располагая выражением для потенциала (Б.18) не составляет труда записать формулу для энергии взаимодействия электронейтральной сферы с точечным зарядом как функцию координаты точечного заряда:

$$W(b) = -\frac{q^2 R}{\sqrt{b^4 + R^4 - 2b^2 R^2}} + \frac{q^2 R}{b^2} \quad (\text{Б. 19})$$

Данная формула используется при проверке работоспособности предложенных в работе методов.

Применяя операцию градиента к последней формуле и умножая получившийся результат на -1 получаем выражение для силы действующей со стороны сферы на точечный заряд:

$$\vec{F}_{int}(b) = -q^2 \frac{R}{b} \left(\frac{1}{\left(b - \frac{R^2}{b}\right)^2} - \frac{1}{b^2} \right) \vec{e}_r. \quad (\text{Б. 20})$$

Следует обратить внимание, что оно принимает только отрицательные значения, за исключением случая, когда сфера стягивается в точку ($R=0$). Следовательно электронейтральный проводник притягивает точечный заряд.

Приложение В.

Таблица 1В. Примеры работ по изучению систем диэлектриков с использованием метода изображений.

Работы	Объекты исследования	Комментарии
[Qin 2016]	Ансамбль диэлектрических частиц	На основе метода изображений разработан способ описания многочастичных систем, состоящих из частиц – диэлектриков. Алгоритм не требует знания подробностей распределения зарядов на поверхности частиц.
[Хуе 2017]	Вытянутый или сжатый сфероидальный диэлектрик	С помощью метода изображений описывается воздействие поляризованной среды на сфероидальный диэлектрик. Полученные результаты успешно протестированы при моделировании жидкой воды.
[GAN 2016]	Система из близко расположенных диэлектрических сфер и ионов	Разработанный гибридный метод решения уравнения Пуассона позволяет исследовать электростатические поля в композитах, представляющих собой произвольное распределение диэлектрических сфер и ионов.
[Lindell 1991]	Диэлектрическая сфера	Развитие теории метода изображений для диэлектрической сферы.