

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА» ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

**«ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФЕМТОСЕКУНДНЫХ ИМПУЛЬСОВ С
ПОМОЩЬЮ ОДНОМЕРНЫХ ФРАКТАЛЬНЫХ ФОТОННЫХ
КРИСТАЛЛОВ »**

Выполнил студент
405 группы
Речкин Артем Вадимович

Научный руководитель:
к.ф.-м.н. Свяховский Сергей Евгеньевич

Допущена к защите
Зав. кафедрой _____

МОСКВА

2021

Содержание

1	Введение	4
2	Актуальность	5
3	Обзор литературы	7
3.1	Фотонная запрещенная зона кристалла	7
3.2	Распространение монохроматического лазерного излучения . . .	8
3.3	Фрактальный фотонный кристалл	12
3.3.1	Фрактальная структура на основе последовательности Фибоначчи	13
3.3.2	Фрактал Кантора	13
3.3.3	Фрактальная структура на основе фрактала Кантора . .	14
3.4	Дефекты в фотонных кристаллах	15
4	Метод исследования	17
5	Полученные результаты	21
5.1	Изменение параметров сигнала	21
5.1.1	Изменение длительности импульса	21
5.1.2	Изменение пиковой частоты сигнала	22
5.2	Изменение параметров кристалла	24
5.2.1	Изменение количества итераций	25
5.2.2	Изменение разности коэффициентов преломления сред .	26
6	Выводы	27
7	Заключение	27

1 Введение

Объектом изучения в данном исследовании являются фотонные кристаллы – структуры, характеризующиеся периодическим изменением диэлектрической проницаемости в масштабах порядка длины волны видимого или инфракрасного диапазонов. Интерес к данному виду структур подогревают вновь и вновь обнаруживаемые свойства, имеющие прикладное значения во многих областях. Явления, которые наблюдаются при исследовании фотонных кри-

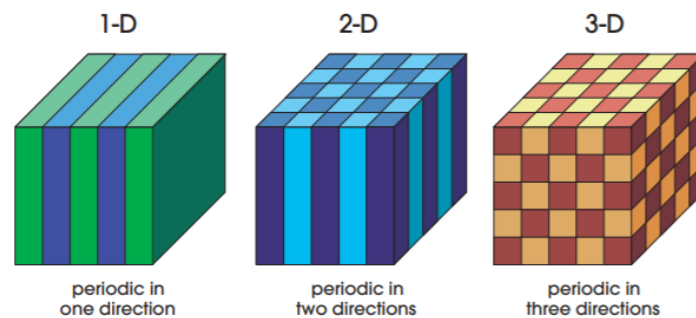


Рис. 1: Упрощенные примеры одно, двух и трехмерных фотонных кристаллов. Разные цвета соответствуют материалам с разными диэлектрическими проницаемостями [7].

сталлов, стали интересны благодаря открытию ряда фактов о представителях флоры и фауны. Периодические структуры с выраженной интерференционной окраской часто встречаются в живой природе. Структурами с одномерной периодичностью являются, например, покрытия на крыльях некоторых бабочек, хвостовых перьях павлина, панцирях некоторых жуков. Структуры с двумерной периодичностью присутствуют в строении глаз насекомых (например, моли), а также человека и других млекопитающих, в строении некоторых видов водорослей. Функциональность строения живых организмов, сформировавшихся под влиянием естественного отбора, приводит к мысли о целевом использовании оптических свойств периодических структур в живой природе. Такая целесообразность не должна вызывать сомнений. Регулярная пористая структура глаз насекомых и роговицы глаз млекопитающих является эффективным антиотражающим интерфейсом, обеспечивающим прохождение света без френелевского отражения с одновременной возможностью физико-химического обмена с окружающей средой для внутренних тканей глаза. Од-



Рис. 2: Природные фотонные кристаллы

нако, структуры, рассматриваемые в природе, не являются строго периодическими, т.е. являются нерегулярными. Несмотря на свою неидеальность, они работают, что говорит о том, что данные структуры стоит исследовать внимательнее. Некоторые периодические структуры, выстроенные в соответствии с их природными аналогами уже используются на практике. Говоря о фотонных кристаллах, изучаемых в лабораториях, можно сказать, что это материалы, в которых в строгом порядке чередуются участки материалов с различными коэффициентами преломления. Особенностью данных структур, соответственно, объектом изучения в лаборатории являются запрещенные зоны-интервалы частот, излучение в которых не может распространяться внутри кристалла. Данное явление имеет большое количество возможных применений на практике, о нем пойдет речь ниже. Также уточним, что периодичность структуры может быть выражена в одном, двух и трех измерениях (рис.1). Многослойные пленки-типичные одномерные фотонные кристаллы-были известны задолго до появления самого термина. Такие структуры просты в изготовлении, что делает их идеальными образцами для изучения. Именно об этом виде фотонных кристаллов пойдет речь в дальнейшем.

2 Актуальность

Сегодня многие прикладные задачи требуют генерации последовательностей фемтосекундных импульсов заданной формы. Существуют различные подходы к генерации подобных сигналов, и один из них – преобразование

гауссовых импульсов в импульсы заданной формы. Одним из самых ярких примеров применения оптических последовательностей является волоконно-оптическая связь-способ передачи информации, использующий в качестве носителя информационного сигнала электромагнитное излучение оптического (ближнего инфракрасного) диапазона, а в качестве направляющих систем [1] — волоконно-оптические кабели. Благодаря высокой несущей частоте и широким возможностям мультиплексирования пропускная способность волоконно-оптических линий многократно превышает пропускную способность всех других систем связи и может измеряться терабитами в секунду. Другим примером области применения генерации последовательностей сигналов является оптическая обработка сигналов-один из трех известных и применяемых в настоящее время методов обработки сигналов: аналоговый, цифровой и оптический. Аналоговая и цифровая обработка сигналов - наиболее разработанные и наиболее широко применяемые в настоящее время вид обработки. Их развитие способствовало разработке общей теории обработки сигналов. Но не смотря на то, что аналоговая обработка [2] сигналов все время развивается, существуют объективные ограничения на характеристики аналоговых устройств; создание многоканальных параллельных устройств сопряжено с большими аппаратными затратами, затруднено создание адаптивных устройств. Цифровые устройства обработки сигналов отличает большая универсальность, высокая точность и высокие возможности при создании адаптивных и многофункциональных устройств. Однако они обладают невысоким быстродействием. Оптические устройства обработки сигналов-наиболее молодой и бурно развивающийся вид устройств обработки. Первые работы в данном направлении были выполнены в пятидесятые годы в Мичиганском университете. Но эта работа была выполнена еще до появления лазеров, в качестве источника света в ней применялась ртутная лампа, поэтому наибольший прогресс в области оптической обработки сигналов начался в 60-е годы с изобретением тех самых лазеров. С момента их появления специалистов привлекают весьма высокие возможности по производительности и быстродействию обработки (особенно многоканальной), очень простая конструкция при выполнении достаточно сложных операций. Однако, хотя есть весьма впечатляющие примеры успешного

их применения при обработке радиолокационных сигналов, сигналов фазированных антенных решеток, многоканального спектрального анализа и др., реальные параметры устройств оптической обработки сигналов еще далеки от теоретических пределов. Этот разрыв в большой степени объясняется несовершенством устройств ввода сигналов в оптический "процессор" а также с недостаточной вариативностью генерации оптических импульсов.

3 Обзор литературы

3.1 Фотонная запрещенная зона кристалла

Трансляционная симметрия обеспечивает одно из самых важных свойств фотонных кристаллов, о котором уже упоминалось выше: падающий на структуру свет в определенном диапазоне частот не может распространяться внутри кристалла и полностью отражается. Появляется понятия фотонной запрещен-

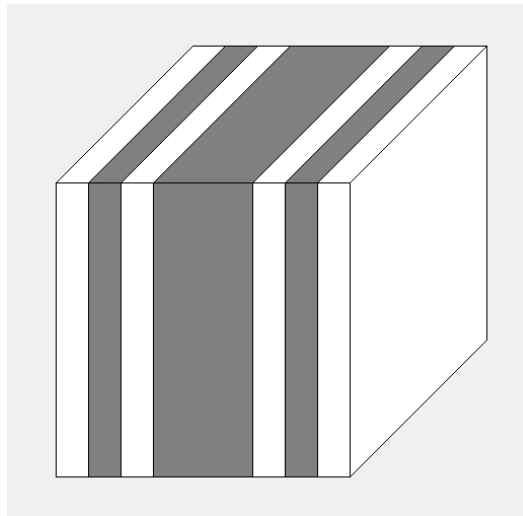


Рис. 3: Слоистая структура, построенная на основе третьей итерации последовательности Кантора.

ной зоны. Она образуется в результате интерференции световых волн, отраженных от областей с различными показателями преломления. Интерференция волн, отраженных от пары слоев, будет конструктивной при выполнении условия Брэгга [3]: $2(n_1d_1 + n_2d_2) = m\lambda_m$. Тогда получим, что максимумы в спектре коэффициента отражения R и минимумы в пропускании T для длин

волн, соответствующих серединам фотонных запрещенных зон, задаются уравнением $\lambda_m = 2(n_1d_1 + n_2d_2)/m$. Для нас будет важно следствие для основной фотонной запрещенной зоны ($m = 1$): $n_1d_1 = n_2d_2 = \lambda_1/4$. Этой формулой будет задаваться структура кристаллов в нашем исследовании [4].

3.2 Распространение монохроматического лазерного излучения

Рассмотрим задачу о распространении монохроматического лазерного излучения через среду с трансляционной симметрией более подробно. Такой процесс в периодической среде описывается уравнениями Максвелла:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= i\omega\varepsilon\mathbf{E} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -i\omega\mu\mathbf{H}\end{aligned}\tag{1}$$

По теореме Блоха в периодической диэлектрической среде распространяется собственная монохроматическая волна вида:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\mathbf{K}}(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{x}} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_{\mathbf{K}}(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{x}},\end{aligned}\tag{2}$$

где $\mathbf{E}_{\mathbf{K}}$ и $\mathbf{H}_{\mathbf{K}}$ -периодические функции, \mathbf{K} -блоховский эффективный волновой вектор. Определим явный вид $\mathbf{E}_{\mathbf{K}}$ и $\mathbf{H}_{\mathbf{K}}$ и дисперсионную зависимость $\omega = \omega(\mathbf{K})$. Для этого запишем волновое уравнение для заданной периодической среды:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \omega^2\mu\varepsilon\mathbf{E} = 0\tag{3}$$

Так как среда периодическая, то мы можем разложить тензор ε в ряд Фурье:

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{G}} \varepsilon_{\mathbf{G}} e^{-i\mathbf{G}\cdot\mathbf{x}},\tag{4}$$

где \mathbf{G} -так называемый вектор обратной решетки. В нашем одномерном случае можно записать:

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= l\mathbf{g} = l\frac{2\pi}{\Lambda}\mathbf{z}, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \\ \varepsilon(z) &= \sum_l \varepsilon_l e^{-il(2\pi/\Lambda)z}\end{aligned}\tag{5}$$

В одномерной периодической среде вектор g направлен вдоль оси z . В этой периодической структуре вектор электрического поля можно разложить в интеграл Фурье:

$$E = \int d^3k A(k) e^{-ik \cdot x} \quad (6)$$

Подставляя формулы (4) и (6) в волновое уравнение (3) получаем:

$$\int d^3k k \times [k \times A(k)] e^{-ik \cdot x} + \omega^2 \mu \sum_G \int d^3k \varepsilon_G A(k - G) e^{-ik \cdot x} = 0 \quad (7)$$

Объединяя два слагаемых в один интеграл получим, что равенство выполнено только в случае равенства нулю множителя при $e^{-ik \cdot x}$. Тогда мы получим:

$$k \times [k \times A(k)] + \omega^2 \mu \sum_G \varepsilon_G A(k - G) = 0 \quad (8)$$

Данное уравнение представляет собой систему бесконечного количества уравнений относительно неизвестных коэффициентов $A(k)$, так как оно верно для любого значения k . Заметим, что не все коэффициенты $A(k)$ связаны между собой. Связаны лишь коэффициенты вида $A(k - G)$. Тогда наша система разобьется на множество маленьких подсистемок относительно $A(k)$ и $A(k - G)$, каждой из которых будет соответствовать свой вектор K . Для одной такой подсистемы, характеризующейся вектором G можем записать решение в виде:

$$\begin{aligned} E_K &= \sum_G A(K - G) e^{-i(K-G) \cdot r} = \\ &= e^{-iK \cdot r} \sum_G A(K - G) e^{iG \cdot r} = \\ &= e^{-iK \cdot r} E_K(r) \end{aligned} \quad (9)$$

В одномерно случае можно записать, что $G = lg = 12\pi \hat{z} / \Lambda$. Тогда:

$$E_K(r) = \sum_l A(K - lg) e^{il(2\pi/\Lambda)z} \quad (10)$$

Если среда однородна в направлениях x и y , то есть ε не зависит от x и y , то для блоховской моды электрического поля получим:

$$E = e^{-i(K_x x + K_y y)} e^{-iK_z z} E_K(z) \quad (11)$$

Из уравнения (8) можем задать ω и набор величин (K_x, K_y) и определить K_z из уравнения (11). Существуют области значений ω , при которых K_z становится комплексным числом, и блоховская волна, в таком случае, оказывается затухающей. Падающее излучения от этих областей будет полностью отражаться. Учитывая то, что мы будем исследовать явления, связанные непосредственно с запрещенной зоной кристалла, будем искать решения для блоховских волн, когда условие Брэгга выполняется, хотя бы приблизительно. Кроме того, для простоты предположим, что волна распространяется вдоль оси z , т.е. $K_x = K_y = 0$. Вектор поля будет перпендикулярен волновому вектору. Также будем предполагать среду изотропной, т.е. считать, что ε_l является скалярной величиной. Тогда система уравнений (8) примет вид:

$$k^2 A(k) - \omega^2 \mu \sum_l \varepsilon_l A(k - lg) = 0 \quad (12)$$

Для нахождения блоховской волны с волновым числом K , требуется решить систему уравнений (12) с $k = K, K \pm g, K \pm 2g, \dots$. Запишем несколько первых членов для $k = K$ в уравнении (12):

$$K^2 A(K) - \omega^2 \mu \varepsilon_0 A(K) - \omega^2 \mu \varepsilon_1 A(K - g) - \omega^2 \mu \varepsilon_{-1} A(K + g) - \dots = 0 \quad (13)$$

Это уравнение можно переписать несколько в ином виде:

$$A(K) = \frac{1}{K^2 - \omega^2 \mu \varepsilon_0} [\omega^2 \mu \varepsilon_1 A(K - g) + \omega^2 \mu \varepsilon_{-1} A(K + g) + \dots] \quad (14)$$

Аналогично, для случаев $k = K + g$ и $k = K - g$ получим следующие выражения:

$$A(K - g) = \frac{1}{(K - g)^2 - \omega^2 \mu \varepsilon_0} [\omega^2 \mu \varepsilon_1 A(K - 2g) + \omega^2 \mu \varepsilon_{-1} A(K) + \dots] \quad (15)$$

$$A(K + g) = \frac{1}{(K + g)^2 - \omega^2 \mu \varepsilon_0} [\omega^2 \mu \varepsilon_1 A(K) + \omega^2 \mu \varepsilon_{-1} A(K + 2g) + \dots] \quad (16)$$

Из уравнений (13), (14) и (16) следует, что при условиях

$$\begin{aligned} |K - g| &\approx K \\ K^2 &\approx \omega^2 \mu \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (17)$$

основной вклад дают члены $A(K)$ и $A(K - g)$. Пренебрегая всеми другими слагаемыми систему уравнений для блоховских волн можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} (K^2 - \omega^2 \mu \varepsilon_0) A(K) - \omega^2 \mu \varepsilon_1 A(K - g) &= 0 \\ -\omega^2 \mu \varepsilon_{-1} A(K) + [(K - g)^2 - \omega^2 \mu \varepsilon_0] A(K - g) &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Уравнения (18) представляют собой систему линейных уравнений для амплитуд поля $A(K)$ и $A(K - g)$. Она имеет нетривиальные решения только тогда, когда определитель соответствующей матрицы равен нулю.

$$\begin{vmatrix} K^2 - \omega^2 \mu \varepsilon_0 & -\omega^2 \mu \varepsilon_1 \\ -\omega^2 \mu \varepsilon_{-1} & (K - g)^2 - \omega^2 \mu \varepsilon_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (19)$$

или

$$(K^2 - \omega^2 \mu \varepsilon_0) [(K - g)^2 - \omega^2 \mu \varepsilon_0] - (\omega^2 \mu |\varepsilon_1|)^2 = 0 \quad (20)$$

Получившееся уравнение представляет собой явную запись дисперсионного уравнения, определяющего зависимость $\omega(K)$. Условия Брэгга (18) точно выполняются при $K = (1/2)g = \pi/\Lambda$. При таком значении K из уравнения (20) получаются следующие корни для ω :

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{K^2}{\mu (\varepsilon_0 \pm |\varepsilon_1|)} \quad (21)$$

При частотах ω между ω_+ и ω_- корни уравнения (20) для K являются комплексными числами, вещественная часть которых равна π/Λ . Волны при этом являются затухающими, а их спектральный диапазон называется «запрещенной зоной», волны в которой не проходят через структуру. При частотах ω , лежащих вне этой запрещенной зоны, корни уравнения (20) для K являются вещественными и решения отвечают распространяющимся волнам. На рис.3 представлено графическое изображение дисперсионного уравнения (20) для типичной периодической среды. Волны с частотами в запрещенных зонах не могут распространяться, поскольку вследствие брэгговского отражения они затухают. Это нетрудно показать, если вычислить волновое число K в центре запрещенной зоны при $\omega^2 = (g/2)^2/\mu \varepsilon_0$ и $K = g/2 + x$, где $|x| \ll g/2$. При

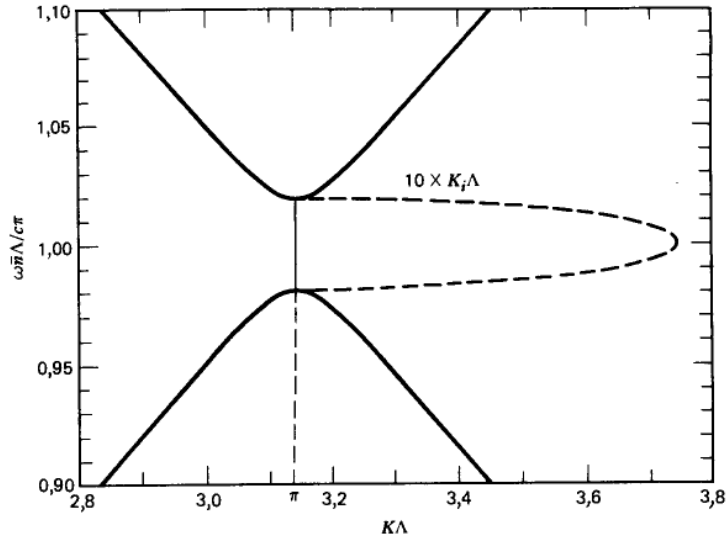


Рис. 4: Визуализация фотонной запрещенной зоны структуры с трансляционной симметрией [7]

этом дисперсионное уравнение (20) принимает вид

$$g^2 x^2 + \left(\frac{|\varepsilon_1|}{\varepsilon_0} \right)^2 \left(\frac{1}{4} g^2 \right)^2 = 0 \quad (22)$$

где мы пренебрегли числом, пропорциональным x^4 . Из уравнения (22) можно найти волновое число K в центре запрещенной зоны

$$K = \frac{1}{2} g \left(1 \pm i \frac{|\varepsilon_1|}{2\varepsilon_0} \right) \quad (23)$$

Поскольку это волновое число является комплексным, оно отвечает экспоненциально затухающей амплитуде. Следует отметить, что это пространственное затухание существенно зависит от коэффициента ε_1 в фурье-разложении. Ширина запрещенной зоны [6] определяется величиной разности корней (21) $\Delta\omega_{\text{gap}} = |\omega_+ - \omega_-|$ и, соответственно, задается выражением [7]:

$$\Delta\omega_{\text{gap}} = \omega \frac{|\varepsilon_1|}{\varepsilon_0} \quad (24)$$

3.3 Фрактальный фотонный кристалл

Структуру кристаллов, а именно толщину чередующихся слоев можно сделать различной, но подчиняющейся определенному порядку. Интересными для

рассмотрения являются фотонные кристаллы фрактальной структуры-кристаллы, толщины слоев которого пропорциональны элементам фрактальных последовательностей таких, как последовательности Кантора, Фибоначчи, двойного периода, Туэ-Морса (Thue-Morse).

3.3.1 Фрактальная структура на основе последовательности Фибоначчи

Последовательность Фибоначчи - последовательность, в которой первые два элемента равны 0 и 1, а каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел. При построении структуры мы немного отойдем от привычного вида числового ряда и перейдем к бинарной форме последовательности. Последовательность или так называемое "Слово" Фибоначчи образуется путем повторного скрепления двух предыдущих "слов" ряда таким же образом, что и числа Фибоначчи образуются путем многократного сложения. Пусть S_0 будет "0", а S_1 - "1". Теперь, имея рекуррентное соотношение $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$ (скрепление двух предшествующих элементов последовательности), у нас есть:

$$S_0 \quad 0$$

$$S_1 \quad 1$$

$$S_2 \quad 10$$

$$S_3 \quad 101$$

$$S_4 \quad 10110$$

$$S_5 \quad 10110101$$

... Заменив "0" на "A", а "1" на "B"-слои с коэффициентами преломления n_1 и n_2 , мы получаем фрактальную структуру, основанную на последовательности Фибоначчи. Основным свойством, делающим эту последовательность интересной для изучения, является ее симметричность относительно перестановки 1 и 0 [8].

3.3.2 Фрактал Кантора

В нашей работе будут рассматриваться структуры, построенные на основе последовательности Кантора. Покажем, как она строится. Возьмем еди-

ничный отрезок $C_0 = [0, 1]$ и удалим из него среднюю треть, то есть интервал $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Оставшееся точечное множество обозначим через C_1 . Множество $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ состоит из двух отрезков. Удалим теперь из каждого отрезка



Рис. 5: Визуализация последовательности Кантора

его среднюю треть, и оставшееся множество обозначим через C_2 . Повторив эту процедуру опять, удаляя средние трети у всех четырёх отрезков, получаем C_3 . Дальше таким же образом получаем последовательность замкнутых множеств $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots$. Пересечение $C = \bigcap_{i=0}^{\infty} C_i$ и называется канторовым множеством. Несколько итераций этой последовательности изображено на рис.5. Примитивным примером фрактальной структуры служит кристалл, изображенный на (рис.3).

3.3.3 Фрактальная структура на основе фрактала Кантора

Введем некоторые обозначения, которые позволят нам описывать процесс формирования структуры, основанной на фрактале Кантора, более понятно. Пусть элементы периодичности кристалла с коэффициентом преломления n_1 будут обозначаться буквой B , элементы с коэффициентом преломления n_2 - буквой A . Тогда алгоритм построения структуры в таких обозначениях выглядит следующим образом. Мы берем нулевую итерацию - однородный кристалл с коэффициентом преломления n_1 , иначе говоря элемент B . Этот элемент мы разбиваем на три элемента равных размеров в порядке BAB . Получаем первую итерацию последовательности. Далее каждый элемент B первой итерации мы аналогичным образом разбиваем на три одинаковых элемента в порядке BAB . Получаем некий алгоритм генерации структуры, основанной на последовательности Кантора. Базовую структуру BAB назовем BAB -генератором.

Введем другой генератор вида $BAAB$ [9]. При серии первой итерации ($S = 1$) этот кристалл состоит из 4 частей, заполненных слоями B, A, A, B соответ-

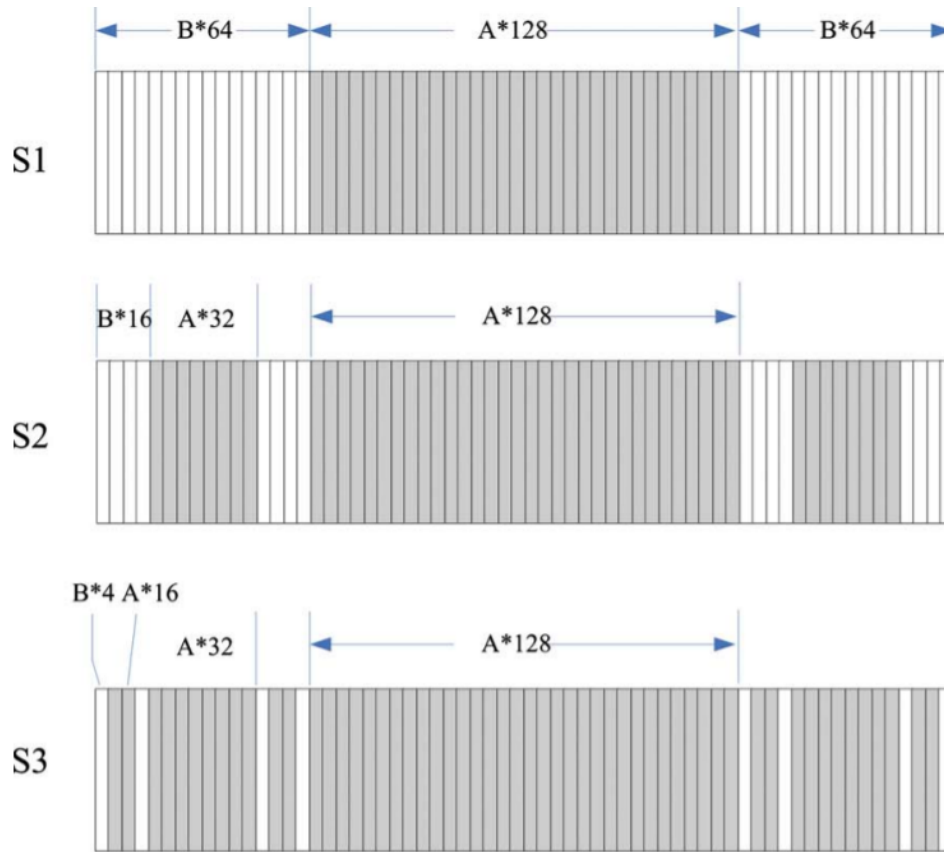


Рис. 6: Канторовская структура кристалла на основе ВААВ-генератора [8]

ственно. В каждой части по 64 слоя. Когда номер итерации S увеличивается до 2, каждая часть B разделяется на 4 части заполненных слоями B , A , A , B соответственно (рис. 7). По мере того, как этот процесс продолжается, когда серия имеет значение S , количество частей B равно 2^S , и каждая часть B составляет $(\frac{1}{4})^S$ часть от общего числа слоев.

Спектры таких структур в зависимости от итерации меняются так, как показано на рисунке:

3.4 Дефекты в фотонных кристаллах

Для будущей экспериментальной проверки понадобится учитывать естественные дефекты исследуемых кристаллов. В общем случае это может быть любое нарушение периодичности: как точечные дефекты, локализованные в структуре, так и протяженные. Для одномерного случая дефект чаще всего заключается в измененном значении оптической толщины одного из слоев. В

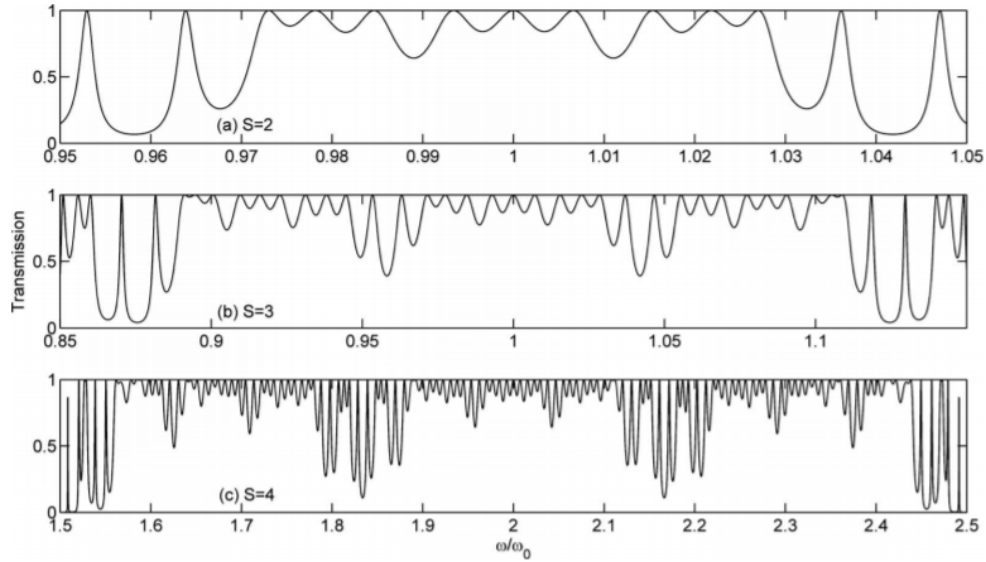


Рис. 7: Спектр фрактального фотонного кристалла Кантора в зависимости от номера итерации [8]

таким случае очевидна аналогия с резонатором Фабри-Перо, так как рассматриваемый слой (считаем его центральным) оказывается расположен между двумя брэгговскими зеркалами, обладающими характерным большим коэффициентом отражения в запрещенной зоне. Это приводит к локализации электромагнитного излучения в дефекте, но лишь для некоторого дискретного набора частот, для которых соблюдаются граничные условия. Эти резонансные моды определяются как

$$\frac{2\pi L\omega}{n_1 c} + 2\varphi = 2\pi k$$

где k — целое число, L — толщина дефектного слоя, n_1 — его показатель преломления, φ — фазовая компонента коэффициента отражения от брэгговского зеркала. Итак, дефектную моду можно представить как стоячую волну, и число таких мод в резонаторе пропорционально его длине. Смещение дефекта к границе раздела образца с вакуумом приводит к уменьшению добротности резонатора, и как следствие, к уширению полосы пропускания [10]. Если же ФК обладает двумя одинаковыми дефектами решетки, будут видны отличия в спектре отражения при различных расстояниях между ними. Длина, характерная для области локализации электромагнитной моды вблизи дефекта равна $l = 1/q$, где q — коэффициент затухания. При этих расстояниях лока-

лизованные моды сильно связаны, наблюдается расщепление частот. По мере увеличения расстояния связь мод ослабевает, и возникает вырождение частот локализованных электромагнитных мод - две кривые пропускания дефектных мод сливаются в одну.

4 Метод исследования

Для исследования отраженного от структуры света, с учетом простоты одномерной структуры, рациональнее всего использовать быстрый и эффективный метод матриц переноса. Уравнения, описывающие распространение света, линейны, и непрерывность тангенциальных компонент электрического и магнитного полей световой волны на границе между двумя изотропными средами можно записать с помощью линейного (2×2) -матричного преобразования. Рас-

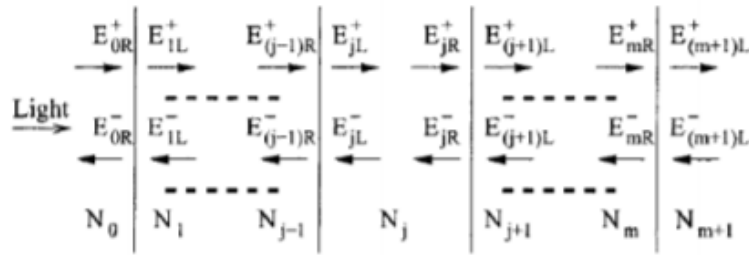


Рис. 8: Волна в многослойной структуре

смотрим падение плоской электромагнитной волны вида $E^+ = Ee^{i(kx - \omega t)}$ под некоторым углом к нормали на среду, представляющую собой чередующиеся слои толщиной d_1 и d_2 с показателями преломления n_1 и n_2 (рис.8). Задача заключается в нахождении коэффициента отражения при учете многолучевой интерференции в каждом из слоев. Напряженности поля прошедшей и отраженной волны в i -ом слое E_i^+ и E_i^- образуют двухкомпонентный столбец. Чтобы охарактеризовать преобразование волны при переходе через границу между i -м и j -м слоем, вводим матрицу, связывающую поле прямо перед границей в i -м слое и поле сразу после границы в j -м слое. Обозначим ее как M_{ij} :

$$E_i = M_{ij}E_j \quad (25)$$

Далее необходимо выписать, как соотносятся амплитуды полей перед и после границы раздела:

$$\begin{aligned} E_j^+ &= E_i^+ t_{ij} + E_j^- r_{ji} \\ E_i^- &= E_j^- t_{ji}, \end{aligned} \quad (26)$$

где коэффициенты прохождения и отражения на границе определяются формулами Френеля:

$$t_{ij} = \frac{2 \sin(\phi_i) \cos(\phi_j)}{\sin(\phi_i + \phi_j)} r_{ij} = -\frac{\sin(\phi_i \phi_j)}{\sin(\phi_i + \phi_j)}, \quad (27)$$

для s -поляризованного луча,

$$t_{ij} = \frac{2 \sin(\phi_j) \cos(\phi_i)}{\sin(\phi_j + \phi_i)} r_{ij} = -\frac{\tan(\phi_i \phi_j)}{\tan(\phi_i + \phi_j)}, \quad (28)$$

для p -поляризованного луча. Угол преломления в слое j определяется законом Снеллиуса. Формулы Френеля выводятся из граничных условий для тангенциальных и нормальных компонент поля [10]. Для удобства сгруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned} E_i^+ &= \frac{1}{t_{ij}} (E_i^+ - E_j^- r_{ji}) \\ E_i^- &= \frac{1}{t_{ij}} (E_j^+ (t_{ij} t_{ji} - r_{ij} r_{ji}) + E_j^- r_{ij}) \end{aligned} \quad (29)$$

Сравнив затем такую систему с матричной записью, находим, чему равна матрица M_{ij} :

$$M_{ij} = \frac{1}{t_{ij}} \begin{pmatrix} 1 & -r_{ji} \\ r_{ij} & t_{ij} t_{ji} - r_{ij} r_{ji} \end{pmatrix} \quad (30)$$

Из соотношений Френеля, между тем, следует, что $r_{ij} = r_{ji}$, $t_{ij} t_{ji} r_{ij} r_{ji} = 1$.

Дальнейшее прохождение через j -ый слой также описывается с помощью матрицы [9]:

$$E_j(z_j + d) = {}_j(d) E_j(z_j), \quad (31)$$

где

$$\Phi_j(d) = \begin{pmatrix} e^{ik_z d} & 0 \\ 0 & e^{ik_z d} \end{pmatrix} \quad (32)$$

так как для плоской волны зависимость электрической компоненты поля от координаты задана известным образом, то есть появится фазовая добавка на выходе из слоя.

Таким образом, полная матрица [11] распространения через многослойную среду будет выражаться как произведение матриц, характеризующих каждый слой:

$$T \equiv T_{0(N+1)} = M_{01} \dots \Phi_N M_{N(N+1)} \quad (33)$$

В нашем случае в области $(N + 1)$ -го слоя нет волны, распространяющейся назад, а на первый слой падает волна единичной амплитуды. Можно записать связь между полем первого и последнего слоя в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

Отсюда получим, что коэффициент отражения r выражается через матричные элементы T :

$$r = \frac{T_{21}}{T_{11}} \quad (35)$$

Энергетический коэффициент отражения, то есть соотношение интенсивностей, связан с амплитудным коэффициентом [12]:

$$R = |r|^2 \quad (36)$$

Заметим, что метод ограничен тем, что не предусматривает изменения структуры кристалла со временем, дефекты кристалла, а также анизотропию. В общем случае диэлектрическая проницаемость среды представляет собой тензор. Сигнал должен распространяться бесконечно, что ограничивает нас в работе с импульсами. Если в материале проявляются анизотропные свойства, то мы также должны их учесть. Обычно волну можно разложить на две моды с s - и p - поляризацией, но теперь на границе раздела падающая волна делится на обыкновенную и необыкновенную волну, что приводит к необходимости рассматривать четыре моды. Следовательно, матрица преобразования становится размера (4×4) , теперь сюда включены также компоненты магнитного поля. Матрица Берремана определяет линейное преобразование между четырьмя тангенциальными компонентами электрического и магнитного полей на входе оптической системы с соответствующими компонентами на выходе, и позволяет с учетом интерференционных эффектов многократного отражения одновременно находить как пропускание, так и отражение при произвольном угле падения световой волны на оптическую среду. Для одноосной оптической среды

были получены аналитические решения для нахождения матриц Берремана. Рассмотрим плоскую монохроматическую волну, падающую в плоскости (XZ) на анизотропную среду под произвольным углом к нормали. Так как периодичность наблюдается в направлении z , компонента волнового вектора по оси x не изменяется, а по оси y равна нулю. Внутри каждого слоя z -компонента также не изменяется. Преобразования уравнений Максвелла, записанных в матричном (6×6) виде [13], путем исключения компонент с известной зависимостью от времени приводят к следующему матричному соотношению для тангенциальных компонент электрического и магнитного полей световой волны:

$$\frac{\partial}{\partial z} \xi = \frac{i\omega}{c} \Delta \xi, \quad (37)$$

где

$$\xi = \begin{pmatrix} E_x \\ H_y \\ E_y \\ -H_x \end{pmatrix} \quad (38)$$

– тангенциальные компоненты электрического и магнитного полей. В общем случае компоненты матрицы выражаются через компоненты диэлектрического и магнитного тензоров и тензора оптических вращений. Пренебрегая магнитной анизотропией и оптической активностью, число ненулевых компонент матрицы можно уменьшить до 10:

$$\begin{pmatrix} -i \frac{kc \varepsilon_{xz}}{\omega \varepsilon_{zz}} & 1 - \frac{1}{\varepsilon_{zz}} \left(\frac{kc}{w} \right)^2 & -i \frac{kc \varepsilon_{yz}}{\omega \varepsilon_{zz}} & 0 \\ \frac{\varepsilon_{xz}^2}{\varepsilon_{zz}} - \varepsilon_{xx} & \left(-i \frac{kc \varepsilon_{xz}}{\omega \varepsilon_{zz}} \right) & \frac{\varepsilon_{xz} \varepsilon_{yz}}{\varepsilon_{zz}} - \varepsilon_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\varepsilon_{xz} \varepsilon_{yz}}{\varepsilon_{zz}} - \varepsilon_{xy} & \left(-i \frac{kc \varepsilon_{yz}}{\omega \varepsilon_{zz}} \right) & \frac{\varepsilon_{yz}^2}{\varepsilon_{zz}} - \varepsilon_{yy} + \left(\frac{kc}{w} \right)^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (39)$$

Далее, с учетом одноосности, матрица может быть преобразована к виду:

$$\begin{pmatrix} -\sin \theta \frac{(n_o^2 - n_c^2) \sin \varphi_l \cos \varphi_l}{n_o^2 \sin^2 \varphi_l + n_c^2 \cos^2 \varphi_l} & 1 - (\sin^2 \theta) \frac{1}{n_o^2 \sin^2 \varphi_l + n_c^2 \cos^2 \varphi_l} & 0 & 0 \\ \frac{(n_o^2 n_c^2)}{n_o^2 \sin^2 \varphi_l + n_c^2 \cos^2 \varphi_l} & -\sin \theta \frac{(n_o^2 - n_c^2) \sin \varphi_l \cos \varphi_l}{n_o^2 \sin^2 \varphi_l + n_c^2 \cos^2 \varphi_l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & n_o^2 - \sin^2 \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (40)$$

5 Полученные результаты

В данном разделе будут представлены результаты исследования прошедшего через канторовскую периодическую структуру оптического сигнала. В качестве входного был выбран Гауссов "колокол". При изменении геометрических и оптических параметров кристалла, а также параметров сигнала наблюдаются изменения в форме элементов сформировавшейся последовательности импульсов.

5.1 Изменение параметров сигнала

Исследование формы сигнала в зависимости от параметров сигнала проводилось при изменении длительности импульса и пиковой частоты.

5.1.1 Изменение длительности импульса

Спектр кристалла с базовой толщиной слоев 50 нм и количеством слоев 4096, а также спектр сигналов с пиковыми частотами $\omega_0 = 0.38 \cdot 10^{15}$ и изменяющейся длительностью изображены на графике (рис.9):

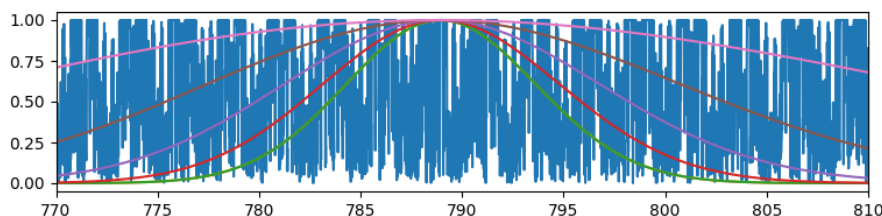


Рис. 9: Эволюция формы сигнала при изменении длительности импульса от 5 до 50 фс. Более широкий сигнал соответствует более короткому импульсу.

При изменении длительности импульса наблюдается слияние пиков. Данная закономерность была получена на примере сигнала с пиковой частотой $\omega_0 = 0.38 \cdot 10^{15}$, изменяя длительность импульса в диапазоне от 5 до 50 фс.

Исследование проводилось на кристалле канторовской структуры ВААВ генератора, 5 итерации, с базовой толщиной слоев 50 нм. Сигналы длительностью до 50 фс на практике получить трудно. Данная закономерность несет в себе более теоретическое, нежели практическое значение.

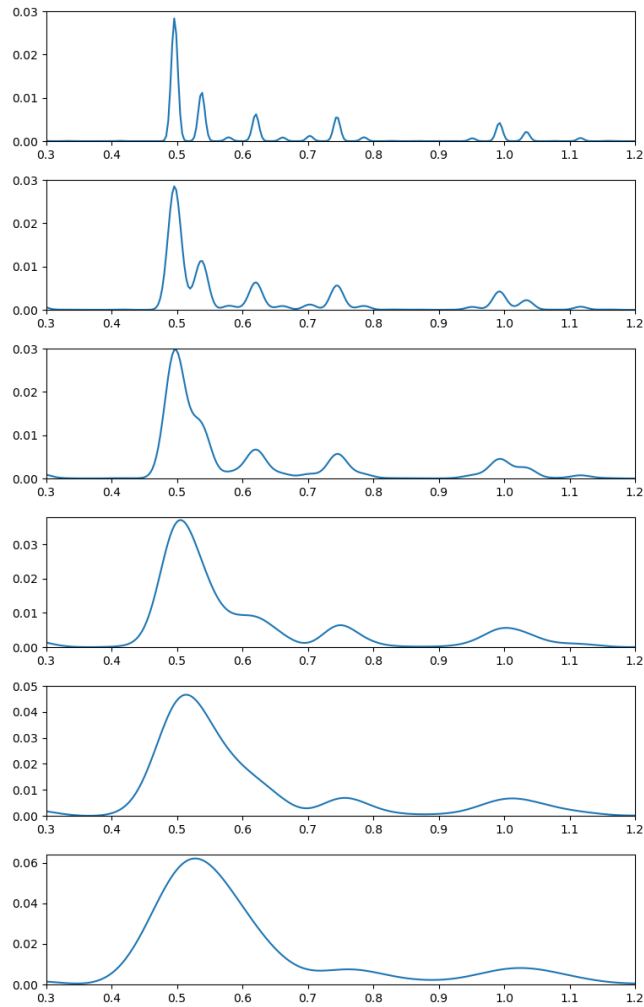


Рис. 10: Эволюция формы сигнала при изменении длительности импульса от 5 до 50 фм

5.1.2 Изменение пиковой частоты сигнала

Для кристалла, построенного на основе третьей, т.е. нечетной итерации последовательности, можно видеть четкую периодичность формы импульса. Как видно по рисунку 11, при изменении пиковой частоты сигнала с $0.26 \cdot 10^{15}$ до $0.38 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$ форма сигнала возвращается к первоначальному виду и преобразуется далее аналогично уже увиденному. Также можно заметить, что главный(нулевой) пик каждого элемента последовательности становится ниже-меньшей интенсивности. Данное исследование проводилось для сигнала длительностью 50 фм. Это значит, что изменением несущей частоты сигнала можно управлять формой сигнала в приложении к практическим задачам.

Для шестой, т.е.четной итерации результаты несколько иные. Спектр этого

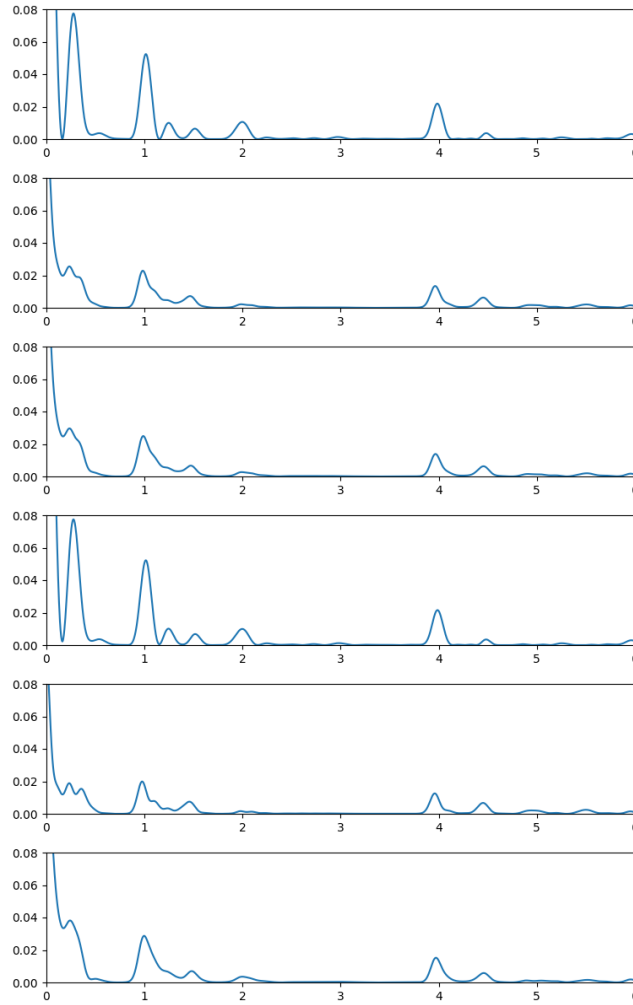


Рис. 11: Форма прошедшего через кристалл сигнала. Несущая частота уменьшается от $0.26 \cdot 10^{15}$ до $0.38 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$ с равномерным шагом

кристалла и сигналов с пиковыми частотами от $0.26 \cdot 10^{15}$ до $0.30 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$ выглядит так, как показано на рисунке 12. Мы получаем аналогичное слияние пиков до некоторой критической частоты, при преодолении которой сигнал не изменяет форму и уменьшает интенсивность пиков. Даже при большом скачке по оси частот видно, что форма сигнала остается прежней, изменяется лишь интенсивность пиков. При увеличении несущей частоты можно заметить, что пики стремятся к уравниванию своей интенсивности между собой, не получается сделать нулевой пик малым относительно остальных. Как можно заметить, изменение структуры таким образом не изменяет интенсивности, идет лишь перераспределение энергии между пиками внутри элемента последовательности.

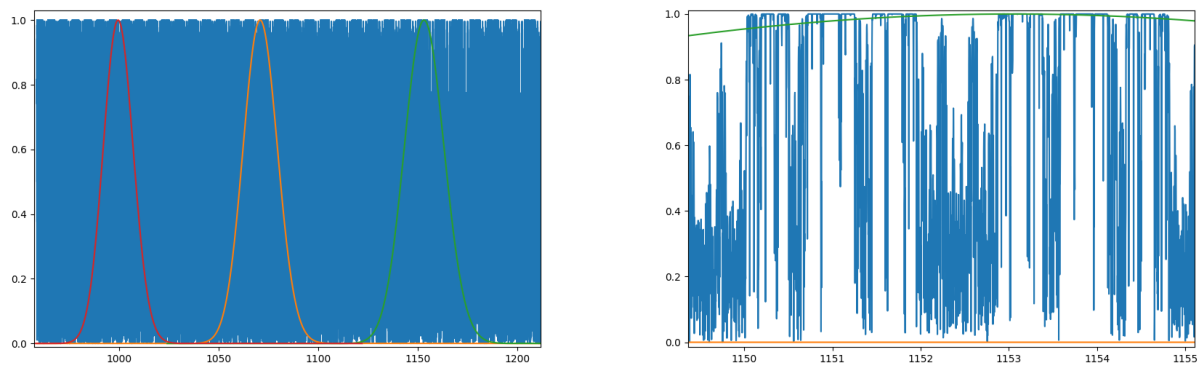


Рис. 12: Спектр этого кристалла, построенного на 6 итерации, и сигналов с пиковыми частотами от $0.26 \cdot 10^{15}$ до $0.30 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$

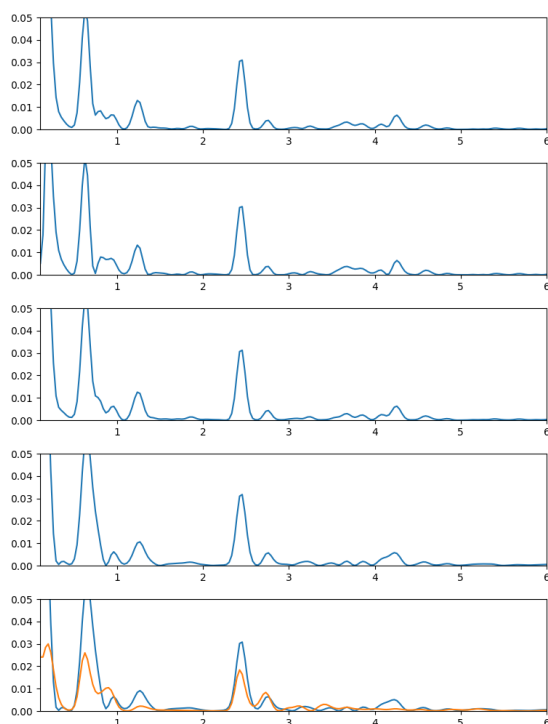


Рис. 13: Форма прошедшего через кристалл сигнала. Несущая частота уменьшается от $0.26 \cdot 10^{15}$ до $0.38 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$ с равномерным шагом. Оранжевым цветом показан скачок на $0.1 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$.

5.2 Изменение параметров кристалла

При неизменном входном сигнале форму выходного сигнала можно изменять за счет изменения структуры фрактального фотонного кристалла.

5.2.1 Изменение количества итераций

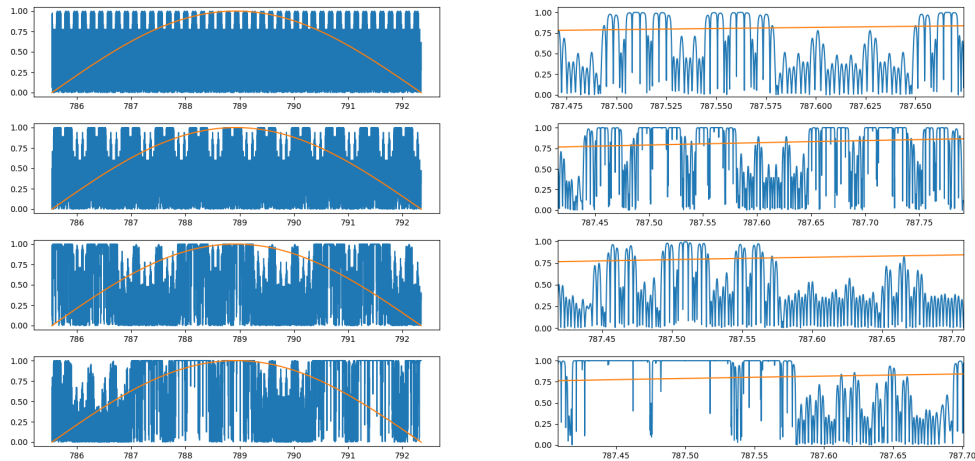


Рис. 14: Изменение формы сигнала в зависимости от номера итерации последовательности, на которой создан кристалл. Пиковая частота сигнала- $0.34 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$, длительность импульса-50 фс

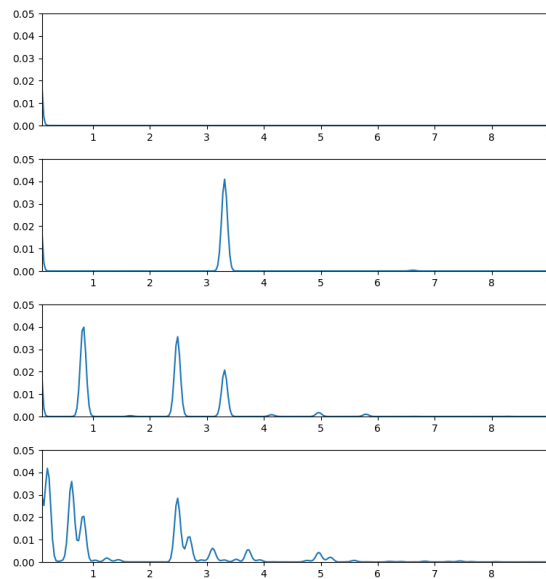


Рис. 15: Спектры исследуемых кристаллов исследуемых при изменении номера итерации

Количество итераций, как и предполагалось, отвечает за количество пиков в элементах последовательности. Спектр исследуемых кристаллов (рис.13) изменялся в зависимости от номера итераций с 3 по 6, количество базовых слоев равнялось 4096, толщина базового слоя равнялась 50 нм, коэффициенты преломления равны $n_1 = 2.3$ и $n_2 = 1.41$. При Увеличении количества итераций в структуре, созданной генератором ВААВ нужно учитывать, что количество

базовых слоев не должно быть меньше, чем 4^e , где e -номер итерации. Форма выходного сигнала изменялась так, как показано на графике на рис.15.

5.2.2 Изменение разности коэффициентов преломления сред

Изменение разницы (в нашем случае уменьшение) между коэффициентами преломления сред приводит к сужению ФЗЗ. Начальный спектр исследуемой

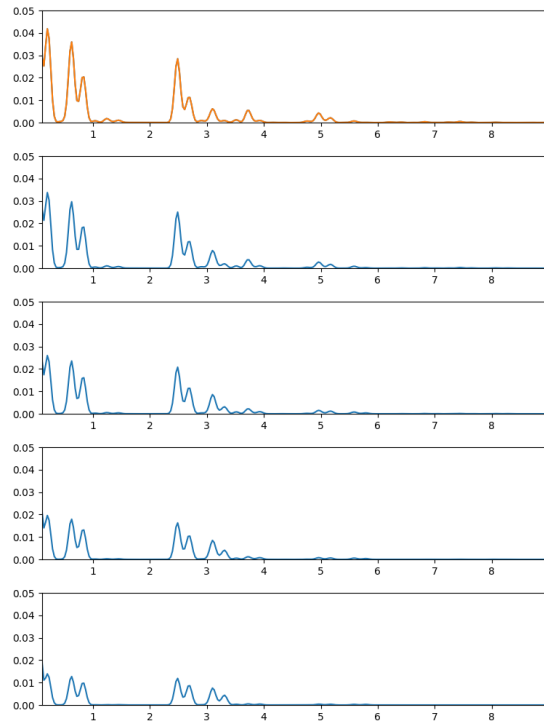


Рис. 16: Изменение формы выходного сигнала с уменьшением разности между n_1 и n_2 . Изначально разница составляла 0.89, каждый следующий шаг уменьшал ее на 0.1.

структуры совпадает со спектром, изображенным на рисунке 9. Сигнал имеет пиковую частоту $0.38 \cdot 10^{15} \text{с}^{-1}$ и длительность 50 фс. Как можно увидеть, это отражается на форме сигнала. Интенсивность каждого пика уменьшается. Так же можно заметить тенденцию к уравниванию интенсивностей первого и последующих элементов последовательности. Исследование проводилось для таких n_1 и n_2 , что их разность уменьшалась, а сумма сохранялась постоянной. Это означает, что сама запрещенная зона не сдвигалась, а лишь изменяла ширину.

6 Выводы

После изучения теоретических оснований для появления фотонных запрещенных зон и получения соотношений, необходимых для определения параметров, влияющих на спектр прошедшего через структуру сигнала, были исследованы закономерности преобразования этого сигнала. 1. Моделирование спектра прохождения оказалось крайне интересной задачей. Пришлось исследовать метод расчета фотонных кристаллов. Метод оказался громоздким с точки зрения математических выкладок, но был сильно упрощен изотропностью среды. 2. Были смоделированы сигналы, прошедшие через фрактальные фотонные кристаллы. Исследована связь формы сигналов с изменением различных параметров: длительности сигнала, пиковой частоты, итерации последовательности, толщины слоев и разницы в коэффициентах преломления (ширине ФЗЗ). Общую форму и общую структуру сигналов можно контролировать изменяя параметры входного сигнала или кристаллов, но не было замечено тенденции к контролируемому изменению интенсивности и, соответственно, высоты пиков.

7 Заключение

Задача генерации импульсов с заведомо заданной формой сейчас стоит очень остро. Многие потенциально прогрессивные технологии смогу раскрыть себя благодаря прогрессу в этой области. Преобразование гауссовского сигнала в фотонных кристаллах-относительно новый, и многообещающий вариант получения сигналов заданной наперед формы.

Каждая фрактальная структура уникальна и трудно описывается математическим аппаратом. Решение соответствующей задачи о распространении сигнала внутри структуры не универсально, что делает исследование свойств кристалла сложным с точки зрения теории.

На смену сугубо теоретическому описанию приходит моделирование. С помощью описанных методов были исследованы закономерности преобразования формы сигнала. Показан способ формирования последовательностей импуль-

сов. Явно показано, как можно контролировать количество пиков в элементе последовательности. Взаимную высоту пиков контролировать полноценно не получается, Корреляция между интенсивностью пиков со свойствами кристалла и входного сигнала наблюдается, но недостаточна для ее контроля.

Список литературы

- [1] А. Н. Боголюбов, А. А. Петухов, Н. Е. Шапкина, Математическое моделирование волноводов, содержащих локальные вставки с фрактальной структурой, ВМУ. Серия 3, Физика. Астрономия. 2011
- [2] Akihiro Maruta, Optical Signal Processing Based on All-Optical Analog-to-Digital Conversion, Article in Optics and Photonics News · April 2008
- [3] A. A. Skorynin*, V. A. Bushuev, and B. I. Mantsyzov, Dynamical Bragg Diffraction of Optical Pulses in Photonic Crystals in the Laue Geometry: Diffraction-Induced Splitting, Selective Compression, and Focusing of Pulses, Journal of Experimental and Theoretical Physics, 2012, Vol. 115, No. 1, pp. 56–67
- [4] Свяховский Сергей Евгеньевич, диссертационная работа, Динамическая дифракция фемтосекундных лазерных импульсов в одномерных фотонных кристалла // 2014, 15-24
- [5] Steven J. Byrnes, Multilayer optical calculations // 2021, 3-10
- [6] Sergey E. Svyakhovskiy, Anton I. Maydykovskiy, Vladimir B. Novikov, Viktor O. Kompanets, Aleksandr A. Skorynin, Vladimir A. Bushuev, Sergey V. Chekalin, Tatiana V. Murzina, and Boris I. Mantsyzov, dynamical bragg diffraction in the Laue geometry in 1-D porous silicon-based photonic crystals // 2015
- [7] Amnon Yariv, Pochi Yeh, Оптические волны в кристаллах, 168-200
- [8] Pan Xu, HuiPing Tian, YueFeng Ji, One-dimensional fractal photonic crystal and its characteristics // 2010. J. Opt. Soc. Am. B. 641-644

- [9] Mehdi Tavakoli, Yousef Seyed Jalili, One-dimensional Fibonacci fractal photonic crystals and their optical characteristics, 1-5
- [10] Mantsyzov B. I. Laue soliton in a resonantly absorbing photonic crystal // Optics communications. - 2001. - Vol. 189, no. 4. - P. 275 – 280.
- [11] Шабанов В. Ф., Ветров С. Я. Оптика реальных фотонных кристаллов. Жидкокристаллические дефекты, неоднородности. - Изд-во СО РАН, 2005
- [12] Tianhua Xu, Digital Signal Processing for Optical Communications and Networks, Department of Electronic and Electrical Engineering, University College London, London, United Kingdom, 2017
- [13] Andrey M.Vyunishev, Rashid G. Bikbaev, Sergey E. Svyakhovskiy, Ivan V. Timofeev, Pavel S. Pankin, Stanislav A. Evlashin,6 Stepan Ya. Vetrov, Sergey A. Myslivets, Vasily G. Arkhipkin, // 2018
- [14] Физическая оптика, Ахманов С.А., Никитин С.Ю., 2004.
- [15] Berreman D.W. Optics in stratified and anisotropic media: 4x4 matrix formulation //J. Opt. Soc. Am. 62, 502-510 (1972).