

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

**«ИССЛЕДОВАНИЕ ПОСТОЯННЫХ МАГНИТОВ СО СЛОЖНОЙ  
СТРУКТУРОЙ»**

Выполнил студент

205М группы

Кулезнев Никита Евгеньевич

---

Научный руководитель

д.ф.-м.н., профессор

Поляков Петр Александрович

---

Допущена к защите \_\_\_\_\_

Зав. кафедрой д.ф.-м.н. проф. Салецкий А.М.

---

Москва

2020 год

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
ГЛАВА 1. ПОНДЕРОМОТОРНАЯ СИЛА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СИСТЕМЫ ПОСТОЯННЫХ МАГНИТОВ .....	6
1.1 Зависимость силы магнитного взаимодействия от периметра магнитной системы.....	6
1.2 Зависимость силы магнитного взаимодействия от направления намагниченности и расположения системы магнитов .....	11
ГЛАВА 2. ИЗМЕРЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ МЕТОДОМ МАГНИТНОЙ ЛОКАЦИИ .....	15
2.1 Физические принципы измерения магнитного поля методом магнитной локации .....	15
2.2 Экспериментальные данные измерения магнитного поля методом магнитной локации.....	19
ГЛАВА 3. ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ ДЕФЕКТА В ОБЪЕМЕ ПОСТОЯННОГО МАГНИТА .....	25
3.1 Нахождение дефекта в магните с помощью датчика Холла .....	25
3.2 Нахождение дефекта в магните методом магнитной локации.....	28
ВЫВОДЫ .....	35
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	37
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	39

## ВВЕДЕНИЕ

Системы постоянных магнитов находят применение во многих практических приложениях и технологиях самых разных отраслей науки и техники [1, 2]. Благодаря развитию современных микро- и нанотехнологий, в последние десятилетия были разработаны постоянные магниты состава  $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$  [3, 4] с уникальными физическими параметрами: рекордными значениями константы магнитной кристаллографической анизотропии [5] и высокими значениями намагниченности насыщения [6]. Были разработаны магнито жесткие материалы (постоянные магниты) с рекордным значением энергетического произведения  $(B \cdot H)_{max} \sim 474$  кДж/м<sup>3</sup> [7, 8]. Уникальные свойства постоянных магнитов неодим-железо-бор во многом определяются технологией спекания этих магнитов из микро- или наночастиц [9, 10].

Одной из важнейших задач в области магнетизма является создание сильно намагниченных постоянных магнитов. Сильные постоянные магниты могут быть использованы в производстве более эффективных, компактных и легких двигателей, тем самым сильно намагниченные постоянные магниты могут способствовать экономии топлива [11]. Однако сильное взаимодействие постоянного магнита с ферромагнетиком может быть достигнуто не только посредством создания спеченных редкоземельных постоянных магнитов с высокими значениями коэрцитивности и остаточной намагниченности. Значительного увеличения силы взаимодействия постоянного магнита с ферромагнетиком можно добиться посредством специального расположения постоянных магнитов относительно ферромагнетика. В данной работе теоретически и экспериментально изучены различные конфигурации систем сильно намагниченных постоянных магнитов и рассмотрено, как эти конфигурации влияют на силу взаимодействия магнитов с ферромагнетиками.

Решение прямой задачи магнитостатики ранее было доступно только для таких нетривиальных примеров намагниченных тел как однородно намагниченный эллипсоид и его предельные случаи [12]. Для тел более сложных

форм магнитное поле зачастую рассчитывается исключительно численными методами, приводящим к неустойчивостям [13, 14]. Аналитическое же решение прямой задачи магнитостатики для таких сложных форм как, например, однородно намагниченный прямоугольный параллелепипед [15-17], открывает возможности для новых уникальных методов исследования магнитного поля. Благодаря этому решению, в работе [18] нам удалось разработать новый метод измерения магнитного поля с использованием зонда, исключающий необходимость непосредственного контакта с источником магнитного поля. Такой метод измерения магнитного поля может оказаться особенно эффективным в труднодоступных средах, в которых традиционные методы измерения магнитного поля недоступны. В данной работе проведено дальнейшее изучение этого метода и исследование его точности и эффективности в других конфигурациях.

Проблема регистрации магнитных неоднородностей в магнитах также является важной прикладной задачей. Однако решение этой проблемы сопряжено с большими как теоретическими, так и экспериментальными трудностями, так как эта задача является некорректной обратной задачей магнитостатики [19]. Так, например, в работе [20] разработано сканирующее устройство на базе чувствительного датчика Холла (магнитный микроскоп), которое позволяет по измерению значений проекций магнитного поля в некоторых точках исследуемого пространства определять с требуемой точностью источник магнитного поля. В данном случае источником магнитного поля является небольшой круговой виток с током. Для решения этой некорректной задачи предполагали известными следующие дополнительные сведения об источнике: источником является круговой виток, лежащий в горизонтальной плоскости с неизвестным радиусом и неизвестными координатами на плоскости. Указанные неопределенные три параметра источника определялись из условия наилучшего совпадения с измеренным множеством значений проекций магнитного поля. Таким образом, в работе [20]

продемонстрирована высокая точность нахождения источника магнитной неоднородности.

В данной же работе аналогичная задача нахождения магнитной неоднородности в постоянных магнитах была решена экспериментально с хорошей точностью в трехмерном случае. В качестве априорной информации для решения некорректной обратной задачи магнитостатики предполагалось, что магнитная неоднородность может быть представлена в виде магнитного диполя. В качестве варьируемых параметров решения этой задачи использовалось шесть величин: 3 декартовы координаты магнитного диполя и 3 проекции его магнитного дипольного момента. Регистрация магнитного поля в пространстве осуществлялась посредством оригинального устройства (магнитостатического локатора [21]), который позволял измерять в реальном времени 12 компонент вектора напряженности магнитного поля в 4 пространственных точках. Решение обратной задачи магнитостатики находит применение как при решении прикладных задач в области медицины [22] и безопасности [23], так и при поиске дефектов при изготовлении редкоземельных постоянных магнитов.

# ГЛАВА 1. ПОНДЕРОМОТОРНАЯ СИЛА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СИСТЕМЫ ПОСТОЯННЫХ МАГНИТОВ

## 1.1 Зависимость силы магнитного взаимодействия от периметра магнитной системы

Рассмотрим взаимодействие однородно намагниченного вдоль вертикальной оси  $z$  высококоэрцитивного постоянного магнита прямоугольной формы толщиной  $h$  с массивным ферромагнетиком с эффективной магнитной проницаемостью  $\mu \gg 1$ . Будем полагать, что этот ферромагнетик можно рассматривать как полубесконечную среду с плоской верхней границей. Тогда силу взаимодействия рассматриваемого постоянного магнита с этой магнитной средой, если он находится от нее на расстоянии  $\delta$ , можно свести к силе взаимодействия прямоугольного магнита с его «изображением», расположенным от него на расстоянии  $2\delta$ . (рисунок 1) [24].

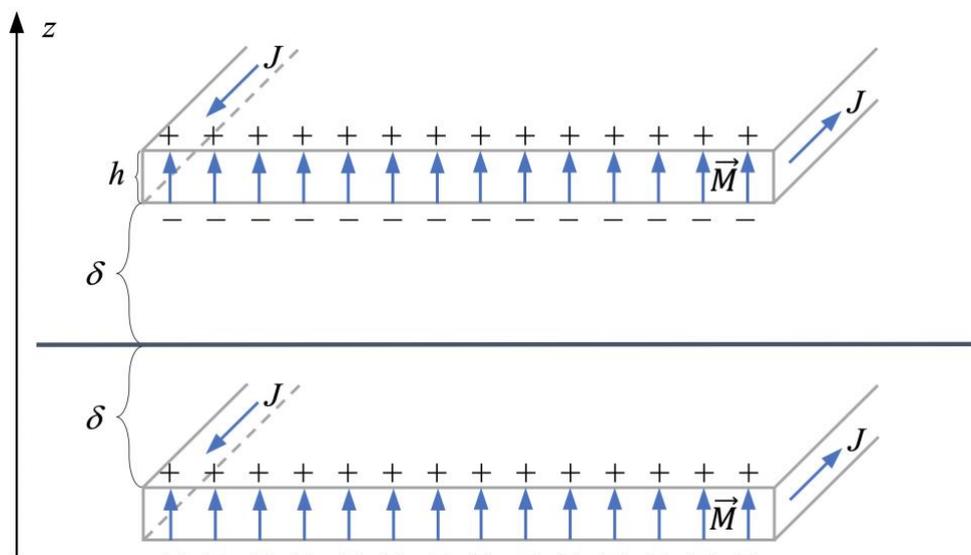


Рисунок 1. Магнитные токи внутри магнита, взаимодействующего со своим изображением

Эту силу магнитостатического взаимодействия можно рассчитать в рамках двух формализмов: методом магнитостатических зарядов и методом молекулярных токов Ампера. В данной работе мы воспользовались методом

молекулярных токов, который сводит данную задачу к взаимодействию поверхностных молекулярных токов, текущих по боковым поверхностям прямоугольного магнита. Поверхностная плотность тока  $J$  в рассматриваемом нами однородно намагниченном магните равна  $J = |\vec{M}|$  [25].

Пусть рассматриваемый нами магнит имеет конечные размеры  $l$ ,  $b$  и  $h$  (рисунок 2). Тогда по теореме о циркуляции магнитного поля [26]:

$$2\pi r dB_y(z) = \mu_0 J dz', \quad (1)$$

где  $B_y(z)$  – проекция магнитного поля в точке  $z$  на ось  $y$ ,  $\mu_0$  – магнитная постоянная ( $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м),  $r$  – радиус-вектор точки  $z$ ,  $J$  – плотность молекулярных токов.

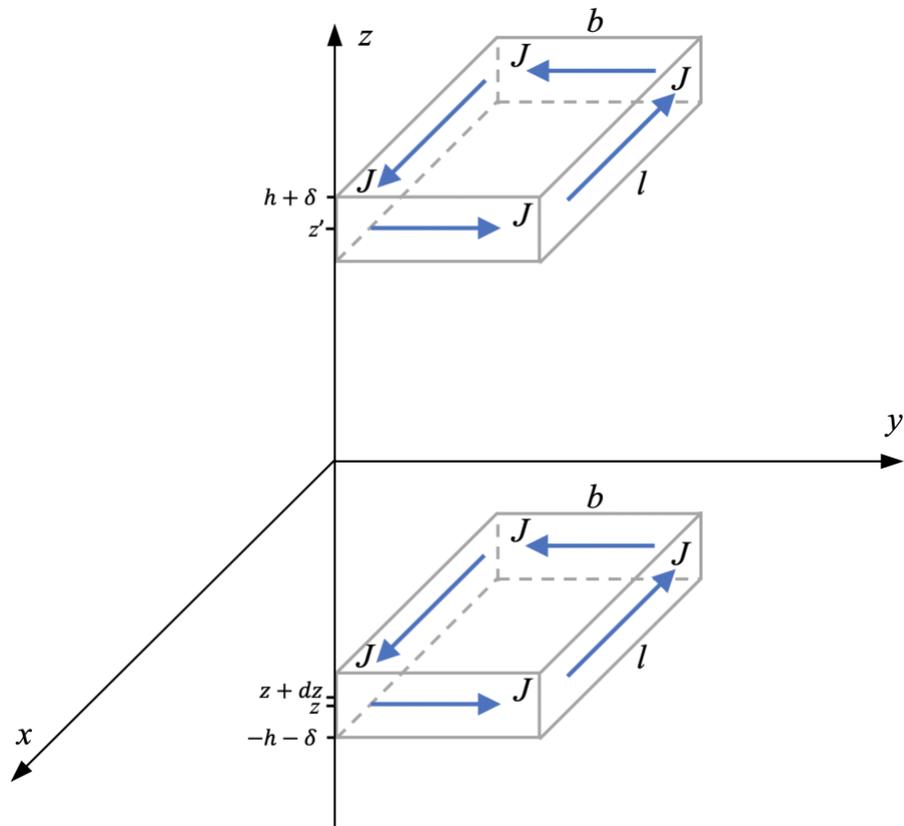


Рисунок 2. Взаимодействие прямоугольного магнита конечного размера со своим изображением

Из (1):

$$dB_y(z) = \frac{\mu_0 J dz'}{2\pi(z' - z)}$$

$$B_y(z) = \int_{\delta}^{h+\delta} \frac{\mu_0 J dz'}{2\pi(z' - z)} = \frac{\mu_0 J}{2\pi} \ln(z' - z) \Big|_{\delta}^{h+\delta} = \frac{\mu_0 J}{2\pi} [\ln(h + \delta - z) - \ln(\delta - z)]$$

На протекающие по сторонам магнита молекулярные токи действует сила Ампера. Рассмотрим ток, текущий вдоль стороны с длиной  $l$  в точке  $z$  через участок шириной  $dz$ . Проекция на ось  $z$  силы Ампера, действующей на такой ток в точке  $z$ :

$$dF_z = J dz l B_y(z)$$

Определим величину силы Ампера, действующей на единицу длины молекулярного тока:

$$df_z = \frac{dF_z}{l} = J dz B_y(z)$$

$$f_z = \int_{-h-\delta}^{-\delta} J dz B_y(z) = J \int_{-h-\delta}^{-\delta} dz \frac{\mu_0 J}{2\pi} [\ln(h + \delta - z) - \ln(\delta - z)]$$

Произведем в этом выражении замену  $-z = t$ , тогда  $dz = -dt$ .

$$f_z = \frac{\mu_0 J^2}{2\pi} \int_{\delta}^{h+\delta} dt [\ln(h + \delta + t) - \ln(\delta + t)] =$$

$$= \frac{\mu_0 J^2}{2\pi} [(h + \delta + t) \ln(h + \delta + t) - (h + \delta + t) - (\delta + t) \ln(\delta + t) +$$

$$+ (\delta + t)] \Big|_{\delta}^{h+\delta} =$$

$$= \frac{\mu_0 J^2}{2\pi} \left[ h \ln(h + \delta + t) + (\delta + t) \ln \frac{h + \delta + t}{\delta + t} - h \right] \Big|_{\delta}^{h+\delta} =$$

$$= \frac{\mu_0 J^2}{2\pi} \left[ h \ln \frac{(2h + 2\delta)}{h + 2\delta} + (2\delta + h) \ln \frac{2h + 2\delta}{h + 2\delta} - 2\delta \ln \frac{h + 2\delta}{2\delta} - h \right]$$

Рассмотрим теперь случай, в котором  $h \gg \delta$ , то есть толщина магнита намного больше, чем расстояние от него до его изображения. Тогда

$$f_z = \frac{\mu_0 J^2}{2\pi} \left[ 2h \ln 2 - 2\delta \ln \frac{h}{2\delta} - h \right] = \frac{\mu_0 J^2}{2\pi} h \left[ 2 \ln 2 - \frac{2\delta}{h} \ln \frac{h}{2\delta} - 1 \right].$$

В таком случае, если  $\frac{h}{2\delta} = x$  – большое число, то  $-\frac{\ln x}{x}$  при условии, что  $x \gg 1$ , убывает как  $\frac{1}{x}$ , то есть  $-\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ . Тогда

$$f_z \cong \frac{\mu_0 J^2 h}{\pi} \ln 2.$$

Таким образом, проекция силы Ампера, действующей на молекулярный ток, текущий по стороне с длиной  $l$  магнита, будет равна

$$F_z = f_z \cdot l = \frac{\mu_0 J^2 h}{\pi} \ln 2 \cdot l = A \cdot l,$$

где  $A = \frac{\mu_0 J^2 h}{\pi} \ln 2$  – некий коэффициент, а  $l$  – сторона прямоугольного магнита. Если размеры прямоугольного магнита велики по сравнению с расстоянием между магнитом и его изображением, то полную силу Ампера, действующую на молекулярные токи, текущие по всем сторонам магнита, можно рассчитать, сложив силы Ампера, действующие на молекулярные токи, текущие по каждому сторонам магнита, то есть по периметру.

Для того, чтобы понять значение полученного выражения, рассмотрим следующую модель. Возьмем тонкую прямоугольную пластину со сторонами  $2l_0$  и  $3l_0$ . В случае, если эта пластина является магнитом, однородно намагниченным вдоль оси, перпендикулярной ее плоскости, то проекция силы Ампера на эту ось, действующая на пластину при её взаимодействии со своим изображением, будет равна  $F_z = A \cdot 10l_0$ . А если мы разрежем эту пластину на три одинаковых пластины со сторонами  $l_0$  и  $2l_0$  и раздвинем на расстояние порядка  $l_0$ , то суммарная проекция силы Ампера на ту же ось будет равна  $F_z = 3 \cdot A \cdot 6l_0 = A \cdot 18l_0$ . Таким образом, силы Ампера в таких конфигурациях отличаются в 1,8 раз.

Для подтверждения этой теории был проведен эксперимент. Были взяты три однородно намагниченных постоянных магнита составом NdFeB размерами  $10 \times 5 \times 1$  мм. На рисунке 3 они обозначены цифрами 1, 2 и 3, и их намагниченность направлена вертикально вниз непосредственно к стальной подложке 4. Закреплены они вместе блоком 5, к которому и прикладывается

направленная вверх, перпендикулярно большей поверхностям магнитов, сила отрыва  $\vec{F}_{\text{отрыва}}$ , эквивалентная в данном случае силе Ампера. Таким образом, когда достаточная  $\vec{F}_{\text{отрыва}}$  прикладывается к блоку 5, взаимодействующие со своим изображением в стальной подложке 4 магниты 1, 2 и 3 отрываются от подложки 4.

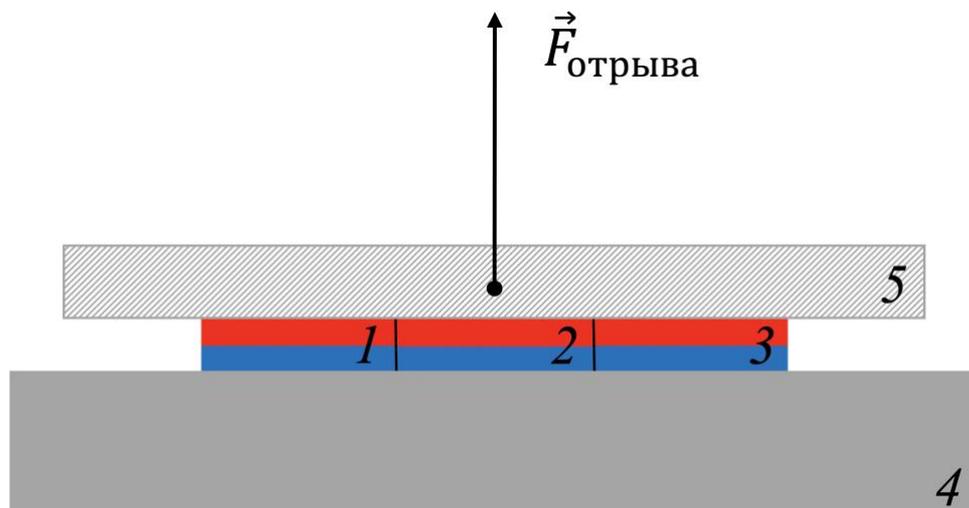


Рисунок 3. Измерение силы отрыва трех магнитов, расположенных вместе

Затем был проведен аналогичный эксперимент, однако на этот раз магниты 1, 2 и 3 были раздвинуты друг от друга на равное расстояние  $d$  (рисунок 4).

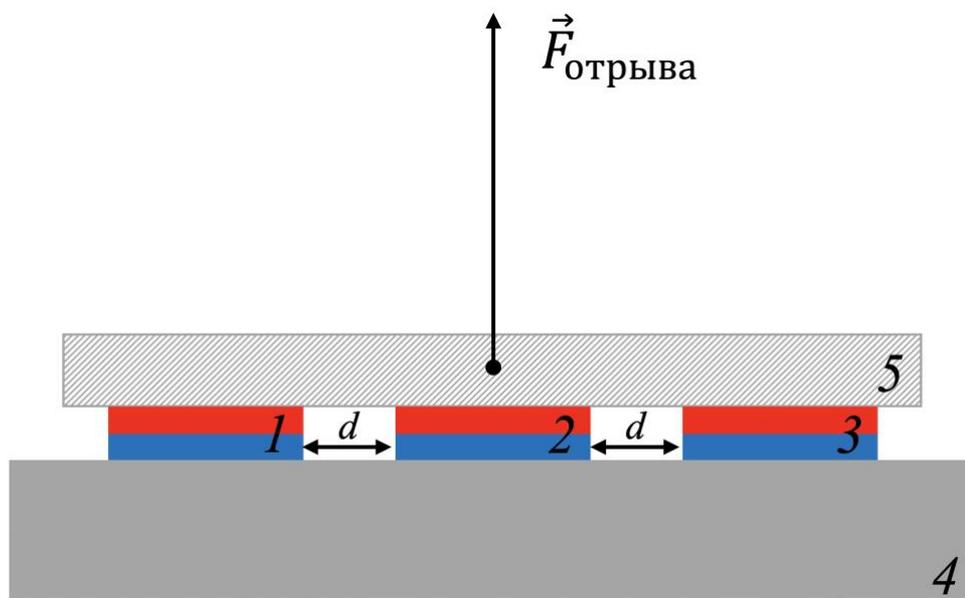


Рисунок 4. Измерение силы отрыва трех магнитов, расположенных на расстоянии  $d$

В результате измерений стало видно, что сила отрыва во втором эксперименте больше той, что в первом эксперименте, в 1,83 раз. Так как

конфигурация постоянных магнитов аналогична рассмотренной выше конфигурации пластин, эксперимент подтверждает приведенную выше теоретическую модель.

Таким образом видно, что сила взаимодействия магнитной системы с поверхностью ферромагнетика тем больше, чем больше периметр этой магнитной системы.

## 1.2 Зависимость силы магнитного взаимодействия от направления намагниченности и расположения системы магнитов

После осмысления полученных выше результатов, нам стало интересно, есть ли другие методы увеличения магнитной силы взаимодействия системы магнитов с их изображением. Тогда нами были проведены эксперименты в двух конфигурациях. В первой конфигурации, изображенной на рисунке 5, прямоугольные магниты 1 и 2 размерами  $5 \times 5 \times 5$  мм расположены друг от друга на расстоянии  $d$  так, чтобы их намагниченность была направлена в одну сторону. Они взаимодействуют со своим изображением в подложке 3. Магниты закреплены вместе матрицей 4, к которой и прикладывается сила отрыва  $\vec{F}_{\text{отрыва}}$ .

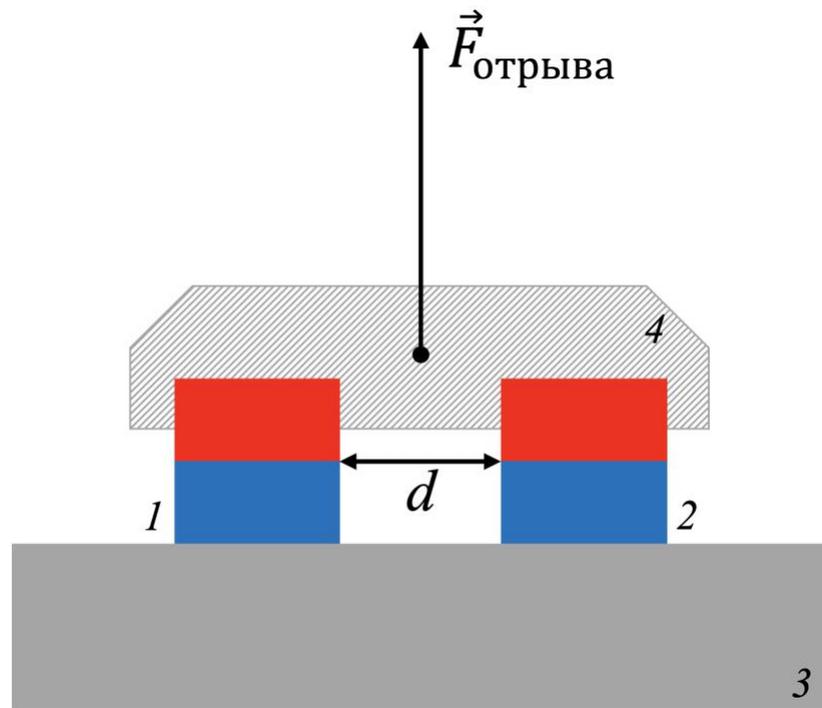


Рисунок 5. Измерение силы отрыва двух магнитов, намагниченности которых направлены в одну сторону

Затем был проведен аналогичный эксперимент, однако магниты 1 и 2 были расположены так, чтобы их намагниченности были направлены в противоположные стороны (рисунок 6).

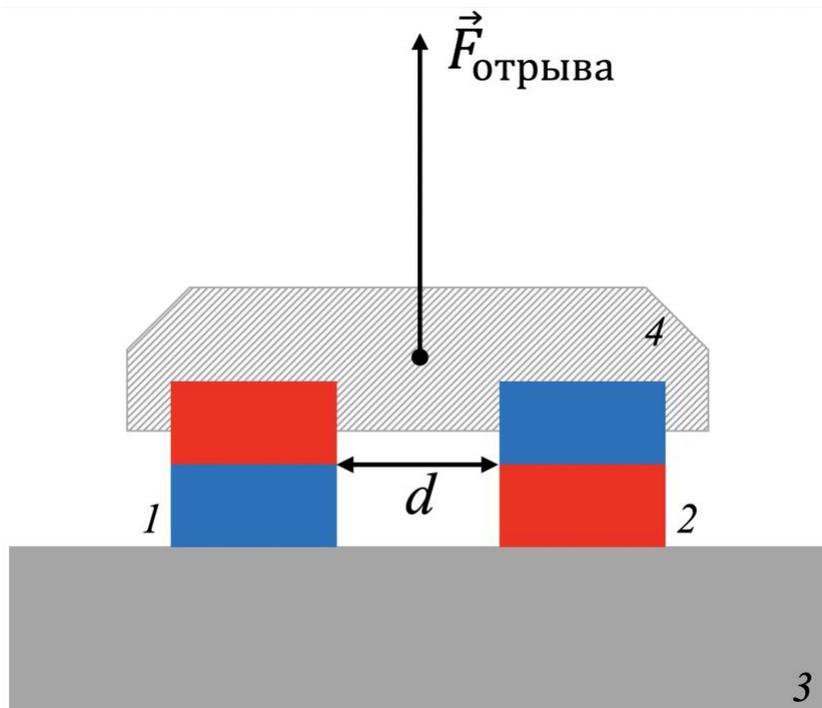


Рисунок 6. Измерение силы отрыва двух магнитов, намагниченности которых направлены в противоположные стороны

В ходе обоих экспериментов измерения снимались при различных расстояниях  $d$  между магнитами 1 и 2. Результаты измерений для случая, когда намагниченности магнитов 1 и 2 направлены в одну сторону, изображены на рисунке 7.

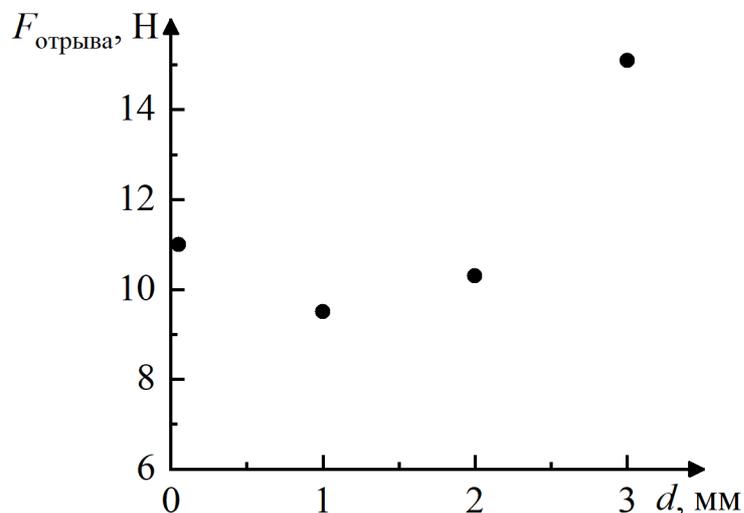


Рисунок 7. Зависимость силы отрыва двух магнитов, намагниченности которых направлены в одну сторону, от расстояния между ними

Результаты измерений для случая, когда намагниченности магнитов 1 и 2 направлены в противоположные стороны, изображены на рисунке 8.

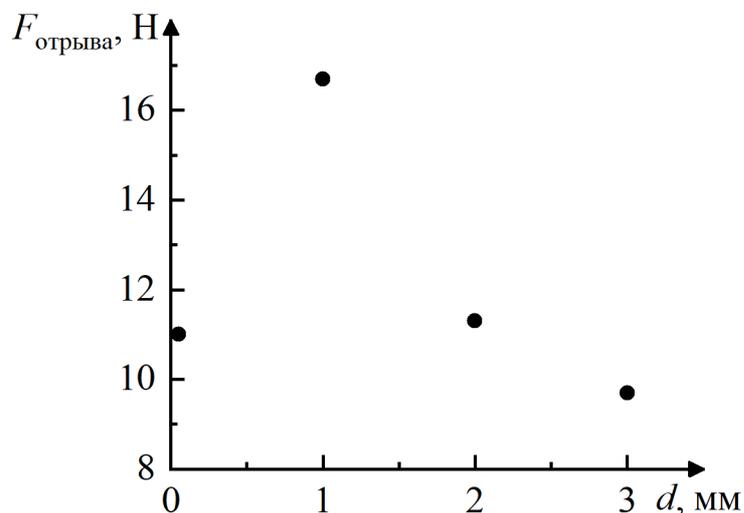


Рисунок 8. Зависимость силы отрыва двух магнитов, намагниченности которых направлены в противоположные стороны, от расстояния между ними

Из полученных результатов видно, что в случае, когда намагниченности магнитов 1 и 2 направлены в одну сторону, сила отрыва  $F_{\text{отрыва}}$  наименьшая тогда, когда магниты 1 и 2 находятся друг от друга на расстоянии  $d = 1$  мм. В то же

время в случае, когда намагниченности магнитов  $1$  и  $2$  направлены в противоположные стороны, сила отрыва  $F_{\text{отрыва}}$  наибольшая тогда, когда магниты  $1$  и  $2$  находятся друг от друга на том же расстоянии  $d = 1$  мм. Причем при расстоянии между магнитами  $1$  и  $2$   $d = 1$  мм сила отрыва  $F_{\text{отрыва}}$  в случае, когда намагниченности магнитов  $1$  и  $2$  направлены в противоположные стороны, больше той, что в случае, когда намагниченности магнитов  $1$  и  $2$  направлены в одну сторону, в 1,76 раз. Значение силы отрыва  $F_{\text{отрыва}}$  в таком случае даже превышает максимальную силу отрыва  $F_{\text{отрыва}}$  в случае, когда намагниченности магнитов  $1$  и  $2$  направлены в одну сторону, при расстоянии между магнитами  $1$  и  $2$   $d = 3$  мм в 1,1 раз.

## ГЛАВА 2. ИЗМЕРЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ МЕТОДОМ МАГНИТНОЙ ЛОКАЦИИ

Методика измерения магнитных полей — важный раздел экспериментальной физики [27]. Стандартный способ измерения магнитного поля в данной точке пространства сводится к размещению щупа с датчиком (например, с датчиком Холла, магниторезистивным датчика, сверхпроводящим квантовым интерферометром) в интересующую область пространства. В этих случаях датчики контактируют с проводниками, передающими сигналы измерения на обрабатывающее устройство. В работе [18] удалось разработать и экспериментально реализовать новый метод измерения магнитного поля с помощью метода магнитной локации [28-30]. Экспериментально метод был опробован на измерении магнитного поля однородно намагниченного магнита в форме прямоугольного параллелепипеда, для которого имеется общее аналитическое решение прямой задачи магнитостатики [31].

### 2.1 Физические принципы измерения магнитного поля методом магнитной локации

Принцип магнитной локации разъясняет схема на рисунке 9 [32, 33]. Источники магнитного поля — магнитные диполи с магнитными моментами  $\vec{p}_i$  расположены в некоторой области ограниченной замкнутой кривой. Линии напряженности магнитного поля показаны качественно в виде линий со стрелками.

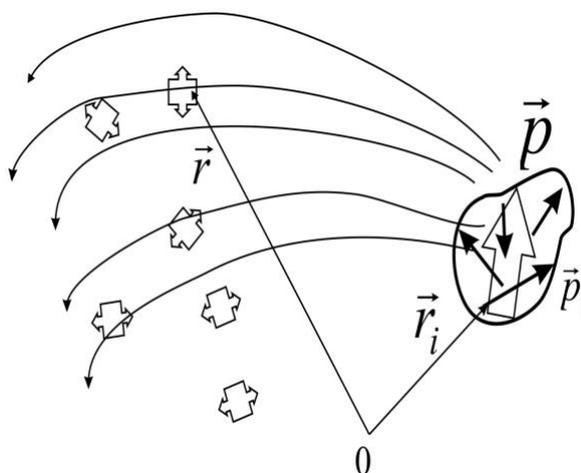


Рисунок 9. Схематическое объяснение метода магнитной локации

Задача магнитной локации сводится к определению источников магнитного поля по результатам измерения магнитного поля с помощью нескольких датчиков магнитного поля, расположенных в некоторой области пространства. На рисунке 9 датчики показаны в виде двойных широких стрелок.

Это является типичной обратной задачей нахождения источника магнитного поля по результатам измерения в нескольких пространственных точках векторов напряженности магнитного поля  $\vec{H}_1, \vec{H}_2, \dots, \vec{H}_N$ . К сожалению, решение данной задачи не является математически корректным, так как измерение магнитного поля неточно и содержит погрешности, что приводит в обратных задачах к большим погрешностям вычисления параметров источников магнитного поля. В данном случае это приводит к большой погрешности измерения координат и величины магнитного диполя. Поэтому решение данной задачи требует применения процедуры регуляризации, то есть выбора наиболее вероятного источника магнитного поля из бесконечного количества различных реализаций. Наиболее эффективным методом приближенного решения данной задачи является способ выбора наиболее вероятного решения посредством минимизации функционала магнитостатической энергии, который может быть реализован различными способами с учетом дополнительной априорной информации о системе.

Если  $\vec{r}_i$  – радиус-вектор местоположения  $i$ -го магнитного момента, то магнитное поле в точке пространства с радиус-вектором  $\vec{r}$  будет равно

$$\vec{H} = \sum_i \left( \frac{3(\vec{p}_i(\vec{r} - \vec{r}_i))(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^5} - \frac{\vec{p}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \right).$$

Пусть  $3N$  магниторезистивных датчиков измерили напряженности магнитного поля  $\vec{H}_1, \vec{H}_2, \dots, \vec{H}_N$  в местах расположения датчиков. Тогда, математически задача сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений, в которой неизвестными являются  $\vec{r}_i$  и  $\vec{p}_i$ . Для решения этой задачи в нашей лаборатории был разработан оригинальный эффективный метод, состоящий в замене этой задачи на эквивалентную задачу о нахождении минимума некоторого функционала

$$F(\vec{H}_1, \vec{H}_2, \dots, \vec{H}_N; \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N; \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \min.$$

Если область, занимаемая источниками магнитного поля, мала по сравнению с расстояниями, на которых регистрируется магнитное поле, то эти источники можно рассматривать как магнитный диполь с магнитным моментом

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i.$$

В этом случае задачу можно упростить и свести ее к нахождению координат и вектора магнитного момента этого диполя.

В нашей лаборатории был создан численный алгоритм определения координат и ориентации магнитного диполя по показаниям четырех 3-хосевых магниторезистивных датчиков, расположенных так, чтобы три магниторезистивных датчика были расположены в одной плоскости относительно друг друга, а четвертый – непосредственно над одним из датчиков (рисунок 10).

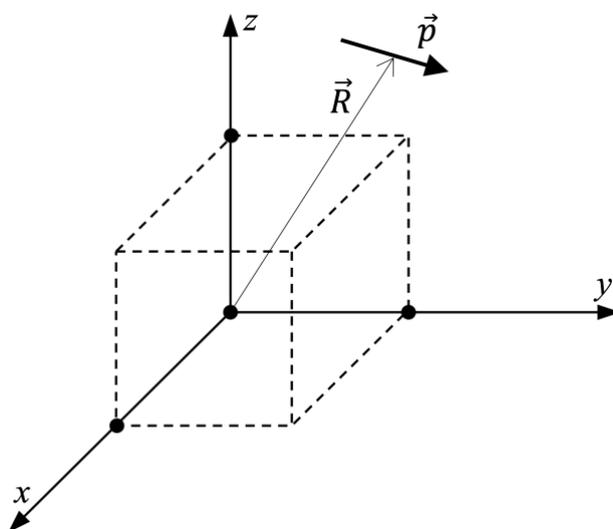


Рисунок 10. Схема расположения четырех 3-хосевых датчиков, фиксирующих величину и направление вектора напряженности магнитного поля (обозначены точками).

Датчики находятся в вершинах куба.

Прибор, основанный на данной теории и численном алгоритме решения, был назван магнитостатическим локатором [21]. Датчики в его структуре являются высокоточными 3-хосевыми анизотропными магниторезистивными датчиками НМС5983 с максимальным разрешением 0,73 мГс и диапазоном измерений  $\pm 8$  Гс (рисунок 11).

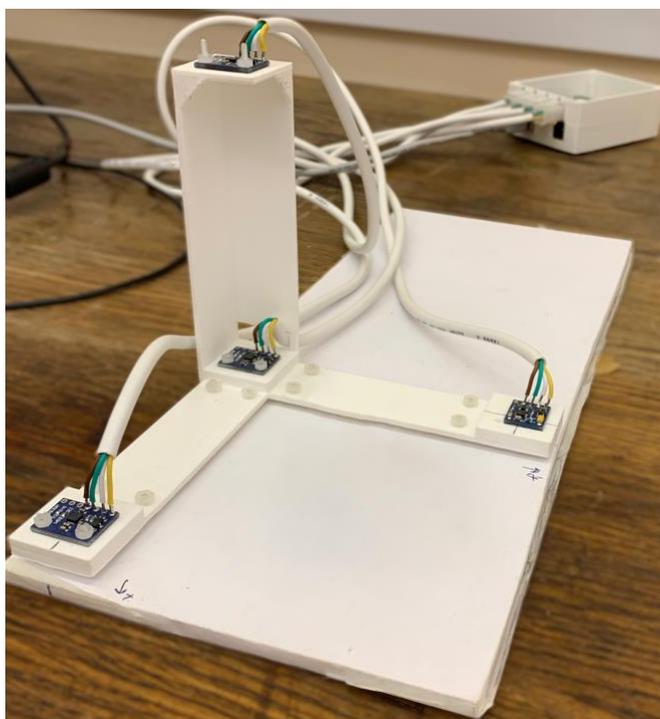


Рисунок 11. Магнитостатический локатор

Данное устройство позволяет с высокой точностью измерять вектор магнитного момента небольшого намагниченного тела (например, железного шарика) и определять его положение в пространстве.

## 2.2 Экспериментальные данные измерения магнитного поля методом магнитной локации

В работе [18] предлагался новый способ измерения индукции магнитного поля с помощью магнитостатического локатора и помещаемого в исследуемое магнитное поле зонда из ферромагнетика. В данной работе проведены последующие исследования в области измерения индукции магнитного поля с помощью магнитостатического локатора.

Для проведения первого эксперимента в качестве источника магнитного поля были взяты шесть постоянных сильно намагниченных магнитов составом неодим-железо-бор размерами  $5 \times 5 \times 3$  мм. Если положить эти магниты друг на друга таким образом, чтобы направления их векторов намагниченности совпадали, то их можно рассматривать как один магнит с намагниченностью  $4\pi M_s = 13,1$  кЭ, изображенный на рисунке 12 как магнит  $I$ . В качестве зонда, намагничиваемого внешним полем магнита  $I$ , был взят стальной шарик радиусом  $R = 3,5$  мм. Шарик был помещен над центром лежащей в плоскости  $xOy$  грани магнита и перемещался перпендикулярно ей вдоль оси  $Oz$  на расстояние  $d$ . Магнитостатическим локатором измерялись проекции на оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  магнитного дипольного момента шарика.

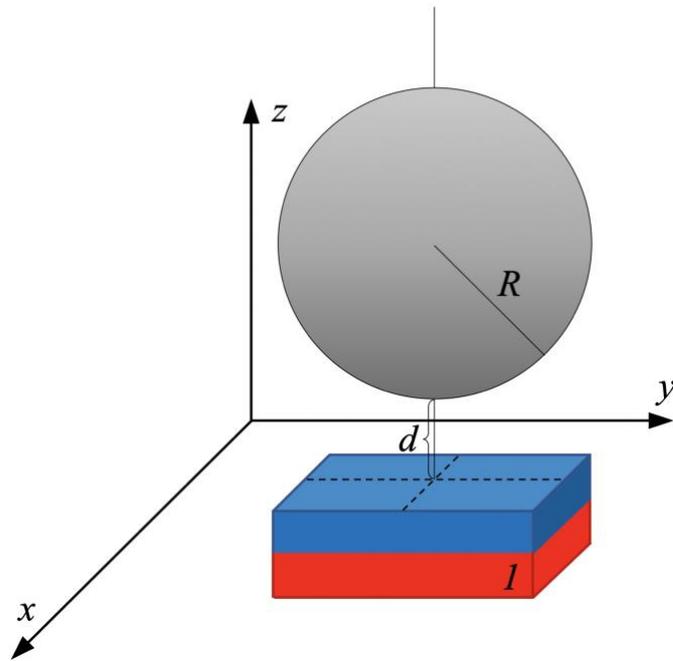


Рисунок 12. Измерение магнитного момента стального шарика радиусом  $R = 3,5$  мм, намагниченного от постоянного магнита  $l$  в зависимости от расстояния между ними  $d$

Результаты эксперимента были представлены в виде зависимости проекции на ось  $z$  вектора намагниченности стального шарика  $4\pi\vec{M}$  от проекции на ту же ось вектора индукции магнитного поля (внешнего), создаваемого магнитом. На рисунке 13 точками изображены экспериментальные результаты, а прямой – линейная аппроксимация методом наименьших квадратов с угловым коэффициентом  $k = 2,93 \pm 0,02$ .

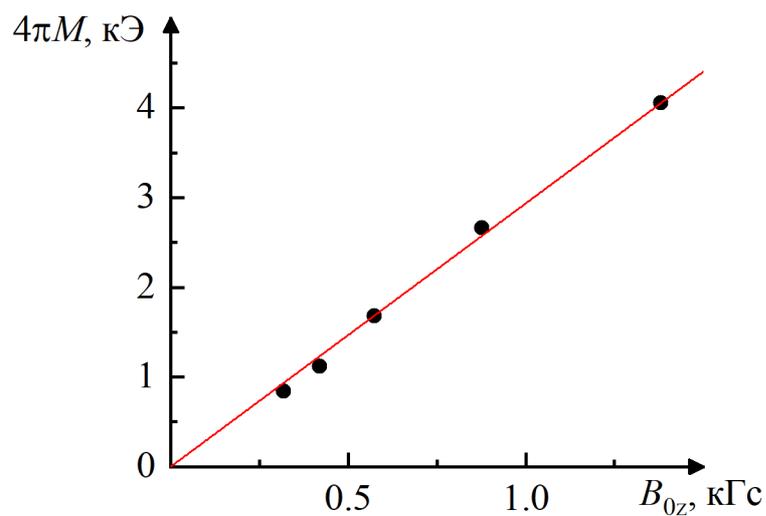


Рисунок 13. Зависимость проекции на ось  $z$  вектора намагниченности стального шарика  $\vec{M}$  от проекции на ось  $z$  вектора индукции внешнего магнитного поля  $\vec{B}_0$

Полученный результат объясняется следующей теорией. В системе СГС вектор напряженности магнитного поля определяется следующим выражением [26]:

$$\vec{H} = \vec{B} + 4\pi\vec{M}, \quad (2)$$

где  $\vec{B}$  – вектор магнитной индукции,  $\vec{M}$  – вектор намагниченности. Вектор магнитной индукции связан с вектором напряженности магнитного поля выражением

$$\vec{B} = \mu\vec{H}, \quad (3)$$

где  $\mu$  – магнитная проницаемость вещества.

Если во внешнее однородное магнитное поле с напряженностью  $\vec{H}_0$  внести ферромагнетик эллипсоидальной формы, то поле внутри него  $\vec{H}$  будет однородным и может быть представлено в виде

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_p, \quad (4)$$

где  $\vec{H}_p$  – размагничивающее поле, определяющееся через размагничивающий фактор  $\beta$  как  $\vec{H}_p = -\beta\vec{M}$ . В случае, когда ферромагнетик имеет форму шара, размагничивающий фактор  $\beta = \frac{4\pi}{3}$ , что значит, его размагничивающее поле  $\vec{H}_p$  определяется так:

$$\vec{H}_p = -\frac{4\pi}{3}\vec{M}. \quad (5)$$

Таким образом, из (2) и (3):

$$\vec{H}(\mu - 1) = 4\pi\vec{M}. \quad (6)$$

Из (4) и (5):

$$\vec{H} = \vec{H}_0 - \frac{4\pi}{3}\vec{M}. \quad (7)$$

Следовательно, из (6) и (7):

$$\left(\vec{H}_0 - \frac{4\pi}{3}\vec{M}\right)(\mu - 1) = 4\pi\vec{M} \quad (8)$$

$$\vec{H}_0 = \frac{4\pi}{\mu - 1}\vec{M} + \frac{4\pi}{3}\vec{M} = 4\pi\vec{M} \left( \frac{1}{\mu - 1} + \frac{1}{3} \right) = \frac{4\pi\vec{M}}{3} \frac{\mu + 2}{\mu - 1} \quad (9)$$

В проведенном нами эксперименте шарик сделан из стали. Магнитная проницаемость стали  $\mu \gg 1$ , поэтому можно принять

$$4\pi\vec{M} = 3\vec{H}_0. \quad (10)$$

А так как в СГС в воздухе  $\vec{B}_0 = \vec{H}_0$ , то

$$4\pi\vec{M} = 3\vec{B}_0. \quad (11)$$

Для рассмотренного выше эксперимента, исходя из линейной аппроксимации методом наименьших квадратов, коэффициент  $k$  близок  $\frac{4\pi M}{B_{0z}} = 3$ , что соответствует выражению (11). Для сравнения было проведено еще два аналогичных эксперимента.

На этот раз шарик радиусом  $R = 3,5$  мм был положен на сильно намагниченный постоянный магнит  $1$  по центру, как изображено на рисунке 14. Для увеличения магнитного поля, намагничивающего шарик, под магнит  $1$  подкладывались такие же магниты  $2, 3$  и  $4$ .

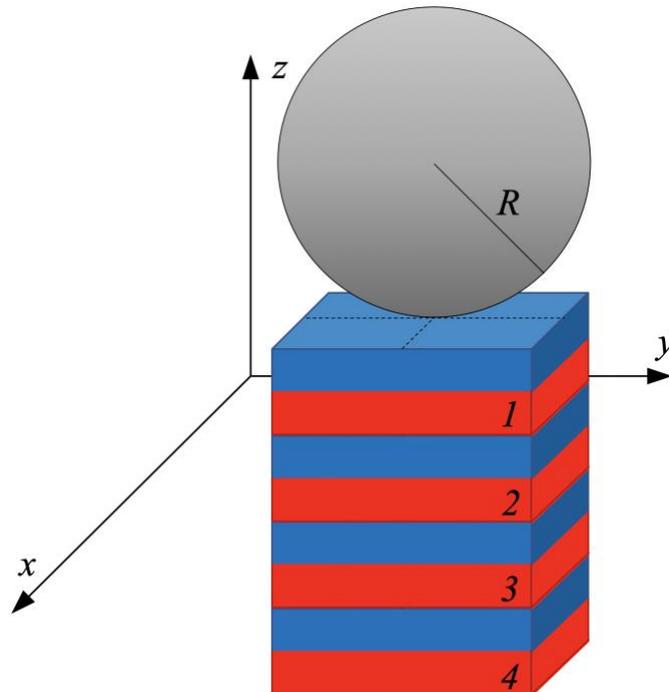


Рисунок 14. Измерение магнитного момента стального шарика радиусом  $R = 3,5$  мм, намагничиваемого постоянными магнитами, в зависимости от их количества

Для начала под шарик подкладывалось вплоть до четырех прямоугольных магнитов составом неодим-железо-бор размерами  $5 \times 5 \times 3$  мм. Результаты этого эксперимента с линейной аппроксимацией методом наименьших квадратов

представлены на рисунке 15. Угловой коэффициент линейной аппроксимации  $k = 2,70 \pm 0,03$ .

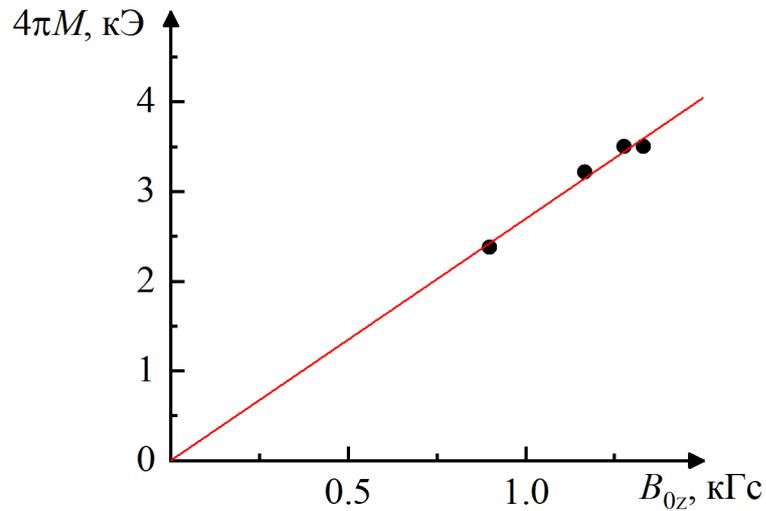


Рисунок 15. Зависимость проекции на ось  $z$  вектора намагниченности стального шарика  $\vec{M}$  от проекции на ось  $z$  вектора индукции внешнего магнитного поля  $\vec{B}_0$

Затем был проведен заключительный эксперимент, аналогичный предыдущему, в котором под шарик подкладывалось вплоть до девяти прямоугольных постоянных магнитов составом неодим-железо-бор размерами  $10 \times 5 \times 1$  мм. Результаты этого заключительного эксперимента с линейной аппроксимацией методом наименьших квадратов представлены на рисунке 16. Угловой коэффициент линейной аппроксимации  $k = 2,340 \pm 0,012$ .

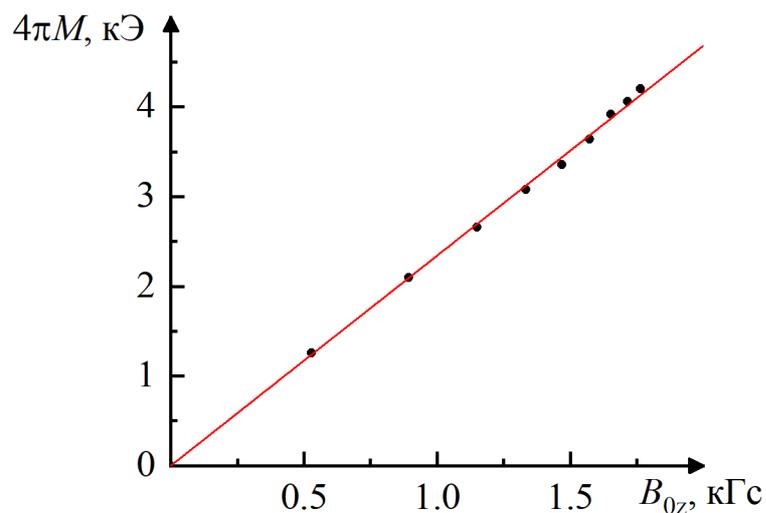


Рисунок 16. Зависимость проекции на ось  $z$  вектора намагниченности стального шарика  $\vec{M}$  от проекции на ось  $z$  вектора индукции внешнего магнитного поля  $\vec{B}_0$

Видно, что в первом эксперименте отношение намагниченности шарика  $4\pi M$  к индукции внешнего магнитного поля  $B_0$  практически сходится с теоретическим значением  $\frac{4\pi M}{B_{0z}} = 3$  и отличается от него лишь на 10 %. Однако во третьем эксперименте, в котором использовались тонкие магниты толщиной 1 мм, полученное отношение отличается от теоретического значения существенно больше – на 22 %. Это можно объяснить неоднородностью, вызванной данной конфигурацией магнитов.

## ГЛАВА 3. ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ ДЕФЕКТА В ОБЪЕМЕ ПОСТОЯННОГО МАГНИТА

Наличие дефектов в объемах постоянных магнитов приводит к возникновению локальных магнитных неоднородностей, которые в первом приближении могут быть смоделированы наличием в данном магните некоторой области с неким эффективным дипольным моментом. Поэтому математически задача нахождения дефекта в постоянном магните сводится к решению обратной магнитостатической задачи о нахождении в нём источника локальной магнитной неоднородности. Экспериментально задача может быть сведена к исследованию распределения магнитного поля, порождаемого постоянным магнитом за его пределами, и к пространственному анализу этого распределения на предмет выявления в нем наличия источника локальной неоднородности. Метод выявления и исследования таких дефектов и получения более точного понимания вида магнитного поля, создаваемого магнитом с дефектами, был представлен в работе [34]. Этот метод нуждался, однако, в совершенствовании.

### 3.1 Нахождение дефекта в магните с помощью датчика Холла

В работе [34] были проведены исследования постоянного магнита прямоугольной формы размером  $35 \times 28 \times 15$  мм с дефектом в виде срезанного угла. Магнит составом NdFeB был намагничен однородно, однако срез создавал неоднородность. Поле, создаваемое таким магнитом, было исследовано с помощью датчика Холла с эффективным размером порядка 2 мм и чувствительностью порядка 1-5 Э [35]. Измерения проекции на ось  $z$  вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  проводились вдоль линии, параллельной поверхности магнита, и проходящей над срезом (рисунок 17).

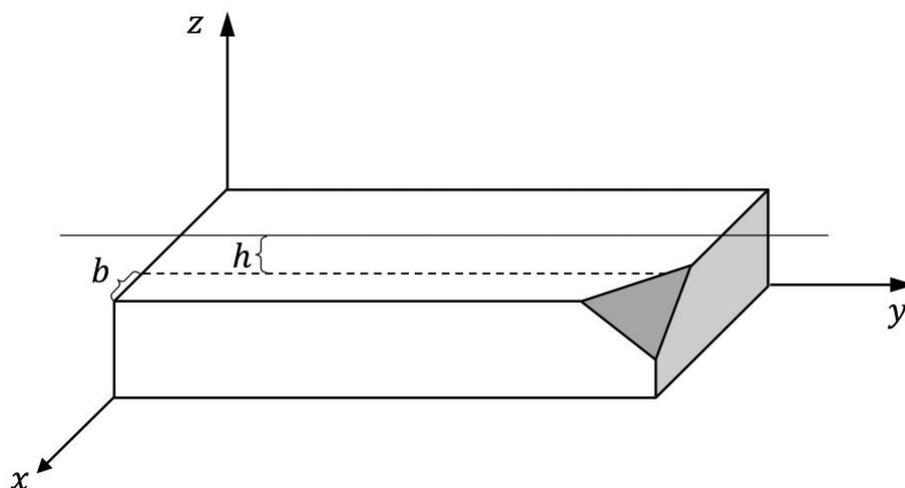


Рисунок 17. Измерение проекции на ось  $z$  индукции магнитного поля  $\vec{B}$ .

Линия параллельна оси  $Oy$ ,  $h = 0,9$  мм,  $b = 2$  мм.

Полученные экспериментальные значения были наложены на теоретическую кривую, описывающую распределение магнитного поля вдоль той же прямой такого же магнита в форме прямоугольного параллелепипеда с такими же размерами, но без среза (рисунок 18).

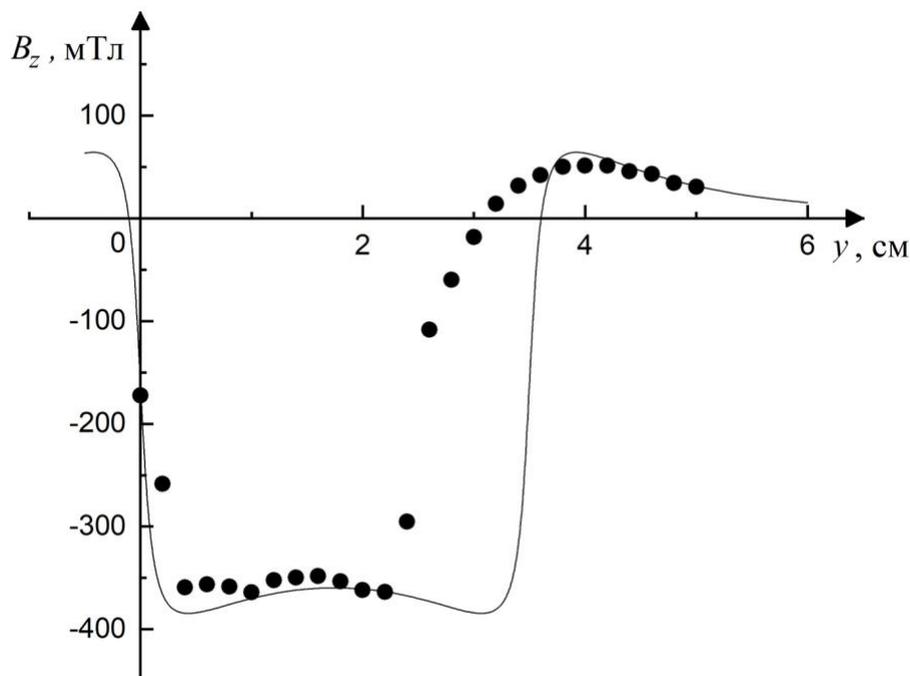


Рисунок 18. Экспериментальные значения проекции на ось  $z$  индукции магнитного поля  $\vec{B}$  магнита со срезом вдоль параллельной оси  $Oy$  линии (точки) и теоретическая зависимость вдоль той же линии для магнита без среза (сплошная линия)

Затем экспериментальные значения для магнита со срезом были вычтены из теоретических значений для магнита без среза для получения зависимости,

определяющей вид магнитного поля, создаваемого самим срезом. Полученная зависимость была аппроксимирована кривой, описывающей магнитное поле, создаваемое диполем, находящимся в геометрическом центре среза. И его магнитный дипольный момент был подобран так, чтобы зависимости совпадали наилучшим образом (рисунок 19).

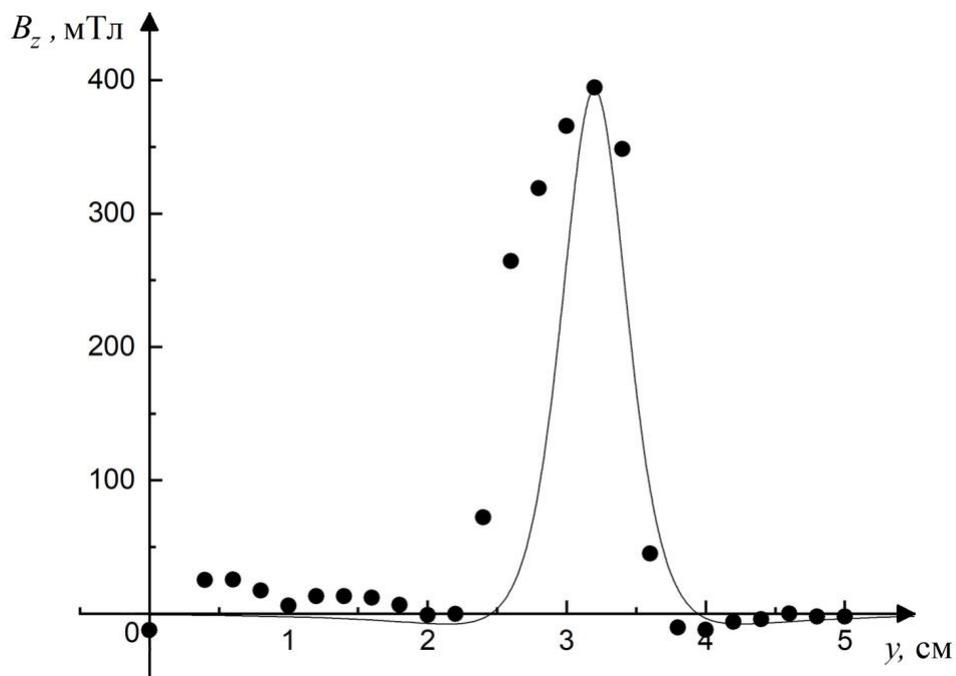


Рисунок 19. Экспериментальная (точки) и теоретическая (сплошная линия) зависимости проекции на ось  $z$  индукции магнитного поля  $\vec{B}$  диполя вдоль параллельной оси  $Oy$  линии

Исходя из величины подобранного магнитного дипольного момента, был определен эффективный объем среза  $V_{эфф} = 311,6 \text{ мм}^3$ , отличающийся от реального  $V_{реал} = 338 \text{ мм}^3$  на 8 %. Однако если бы положение среза было заранее неизвестно, измерения приходилось бы проводить вдоль многих прямых с некоторым небольшим шагом, среди которых по результатам измерений приходилось бы искать ту, измеренное вдоль которой магнитное поле наиболее отличалось от теоретического. Это намного более время- и трудозатратный метод, чем изначально предполагалось. Однако таким образом была практически впервые решена обратная задача магнитостатики об обнаружении дефекта в объеме магнита.

### 3.2 Нахождение дефекта в магните методом магнитной локации

В новом эксперименте был использован магнитостатический локаатор. Для симуляции неоднородности в структуре однородно намагниченного постоянного прямоугольного магнита, были взяты маленькие постоянные прямоугольные магниты и поставлены вместе в разных конфигурациях.

Была проведена серия экспериментов по обнаружению неоднородности в структуре прямоугольного магнита с использованием метода магнитной локации.

На рисунке 20 представлена схема проведения первого эксперимента этой серии. Были взяты шесть однородно намагниченных постоянных магнитов составом NdFeB размерами  $5 \times 5 \times 5$  мм и помещены вместе так, чтобы вектор намагниченности каждого из них был направлен по оси  $z$ . Такую конфигурацию из шести магнитов можно рассматривать как один большой однородно намагниченный прямоугольный магнит размерами  $10 \times 15 \times 5$  мм (рисунок 20а). Затем из этих шести магнитов был изъят один магнит так, чтобы структура большого общего магнита перестала быть прямоугольной (рисунок 20б). Таким образом была создана неоднородность в объеме большого магнита.

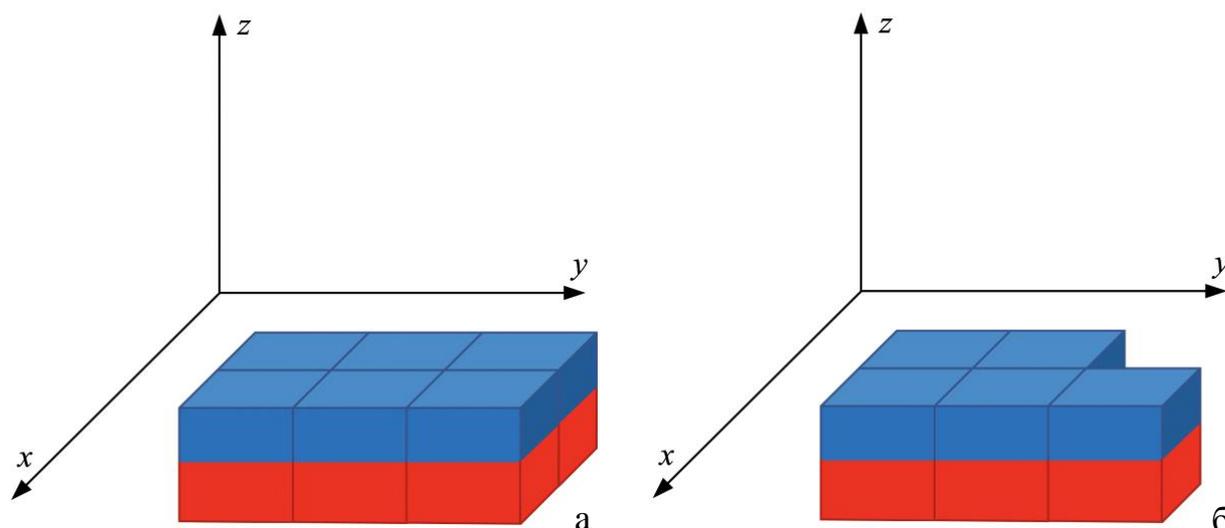


Рисунок 20. Конфигурация проведения эксперимента по обнаружению неоднородности в структуре прямоугольного магнита, состоящего из шести магнитов  
а) конфигурация из шести магнитов; б) конфигурация из пяти магнитов

Магнитостатический локализатор измерял напряженность магнитного поля в обеих конфигурациях, и вычитая из величины «фонового» магнитного поля (того, которое создавалось шестью магнитами) то поле, которое создавалось пятью магнитами, получал значение проекций вектора магнитного дипольного момента, создаваемого диполем, гипотетически помещенным в геометрический центр изъятого из шести магнитов маленького магнита, а также определял положение это гипотетического диполя.

Ниже в таблице 1 представлены результаты этого эксперимента в СИ в единицах измерения  $\text{мА} \cdot \text{м}^2$ . Магнитостатический локализатор определял проекции магнитного дипольного момента на оси  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Затем величина магнитного дипольного момента была определена следующим образом:  $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$ . Всего было сделано четыре измерения и из них было взято среднее значение  $\bar{p}$ .

$i$	$p_{xi}$	$p_{yi}$	$p_{zi}$	$p_i$	$\bar{p}$
1	20,6	2,21	121,7	123,4	130,3
2	10,7	1,8	118,14	118,6	
3	45,7	35	127,6	140	
4	65	119,5	28,9	139,11	

Таблица 1. Результаты эксперимента по обнаружению неоднородности в структуре прямоугольного магнита, состоящего из шести магнитов.

Магнитный дипольный момент измеряется в  $\text{мА} \cdot \text{м}^2$

Ранее было установлено [38], что намагниченность насыщения используемых в эксперименте магнитов состава неодим-железо-бор определяется как  $4\pi M_s = 13,1 \text{ кЭ}$ , что эквивалентно  $M_s = 1042 \frac{\text{кА}}{\text{м}}$ .

Исходя из полученного выше среднего значения магнитного момента гипотетического диполя, помещенного в геометрический центр дефекта, представленного в виде изъятого из составного большого прямоугольного магнита одного маленького магнитика, можно определить объем этого дефекта через  $V = \frac{p}{M_s}$ . Таким образом, полученный эффективный объем равен  $V_{\text{эфф}} = 125,05 \text{ мм}^3$ .

Затем был проведен аналогичный эксперимент, в котором использовалось девять магнитов размерами  $5 \times 5 \times 5$  мм помещенных вместе так чтобы вектор намагниченности каждого из них был направлен по оси  $z$ , создавая таким образом общий прямоугольный магнит  $15 \times 15 \times 5$  мм (рисунок 21).

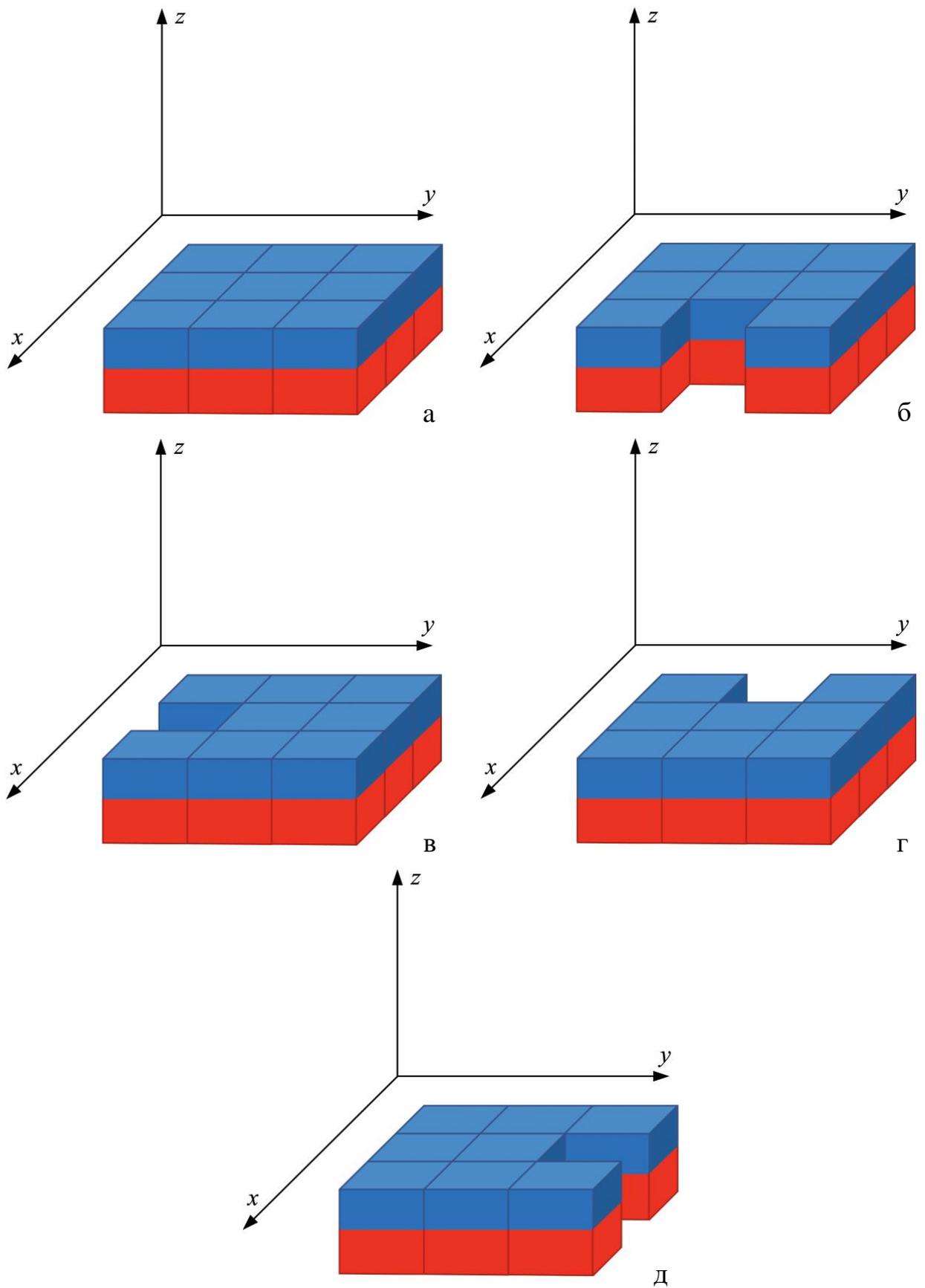


Рисунок 21. Конфигурация проведения эксперимента по обнаружению неоднородности в структуре прямоугольного магнита, состоящего из девяти магнитов  
 а) конфигурация из девяти магнитов; б-д) конфигурации из восьми магнитов

Результаты четырех измерений этого эксперимента представлены в таблице 2 в единицах измерения  $\text{мА} \cdot \text{м}^2$ .

$i$	$p_{xi}$	$p_{yi}$	$p_{zi}$	$p_i$	$\bar{p}$
1	25,7	10,21	119,9	123,07	122,7
2	10,14	16,4	121,5	122,9	
3	13,6	13,5	122,12	123,6	
4	15,8	15	119,14	121,11	

Таблица 2. Результаты эксперимента по обнаружению неоднородности в структуре прямоугольного магнита, состоящего из девяти магнитов.

Магнитный дипольный момент измеряется в  $\text{мА} \cdot \text{м}^2$

Для получения эффективного объема были проведены вычисления аналогичные тем, что были проведены в первом эксперименте. Таким образом, полученный в этом эксперименте объем гипотетического диполя, помещенного в геометрический центр дефекта составного большого магнита, равен  $V_{\text{эфф}} = 117,7 \text{ мм}^3$ .

И наконец, в третьем проведенном эксперименте были взяты девять магнитов размерами  $5 \times 5 \times 5 \text{ мм}$  и поставлены вместе так, чтобы их вектор намагниченности был направлен параллельно оси  $y$  в противоположную сторону (рисунок 22).

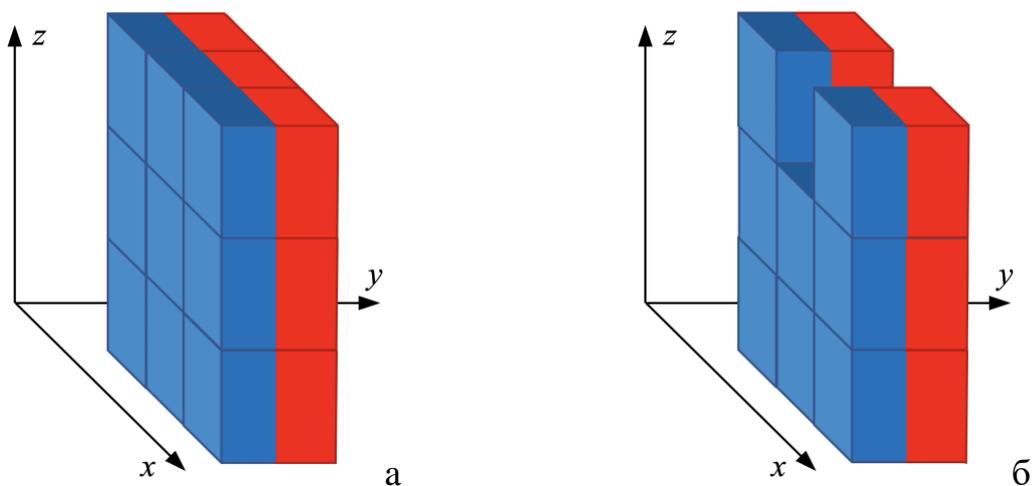


Рисунок 22. Конфигурация проведения эксперимента по обнаружению неоднородности в структуре прямоугольного магнита, состоящего из девяти магнитов, с вектором намагниченности, направленным параллельно оси  $y$  в противоположную сторону  
а) конфигурация из девяти магнитов; б) конфигурации из восьми магнитов

Результаты заключительного эксперимента представлены в таблице 3. Так же, как и в предыдущих экспериментах, измерения проводились четыре раза. В таблице величина магнитного момента представлена в  $\text{мА} \cdot \text{м}^2$ .

$i$	$p_{xi}$	$p_{yi}$	$p_{zi}$	$p_i$	$\bar{p}$
1	8,3	119,4	13,8	120,5	119,6
2	8,6	118,1	15,4	119,4	
3	9,2	118,5	10,3	119,3	
4	6,4	118,3	12,6	119,1	

Таблица 3. Результаты эксперимента по обнаружению неоднородности в структуре прямоугольного магнита, состоящего из девяти магнитов, вектор намагниченности которых направлен параллельно оси  $y$  в противоположную сторону.

Магнитный дипольный момент измеряется в  $\text{мА} \cdot \text{м}^2$

Полученный эффективный объем дефекта в объеме магнита в случае, когда вектор намагниченности девяти магнитов, составляющих большой прямоугольный магнит, направлен параллельно оси  $y$ , равен  $V_{\text{эфф}} = 114,8 \text{ мм}^3$ .

В итоге было проведено три эксперимента, определяющих объем дефекта внутри прямоугольного магнита. В реальности объем дефекта соответственно равен объему магнита размерами  $5 \times 5 \times 5 \text{ мм}$ , изъятого из объема составного большого магнита из шести или из девяти магнитов, то есть  $V_{\text{деф}} = 125 \text{ мм}^3$ . Экспериментальные же значения эффективного объема отличались от реального на 6 % и на 8 %. Однако в первом проведенном эксперименте, в котором использовалось лишь шесть магнитов, получившийся в результате эффективный объем оказался практически равным реальному.

Новый метод обнаружения дефекта в объеме магнита, в котором использовался магнитостатический локатор, оказался существенно более быстрым чем тот, в котором использовался датчик Холла, так как в методе с использованием датчика Холла необходимо производить измерения вручную вдоль нескольких линий. Однако метод с использованием магнитостатического локатора не всегда оказывался точным, хотя ошибка ни в том, ни в другом методе не превысила 8 %.

Существуют системы, позволяющие автоматизировано измерять магнитное поле магнита с помощью датчика Холла по всей поверхности вдоль многих прямых с точностью до миллиметра [37]. Таким образом, вероятность нахождения дефекта при таком измерении очень велика.

В то же время магнитостатический локатор может засечь только большие дефекты в небольших магнитах. В случае, когда в область измерения локатора помещается большой магнит, создающий очень большое магнитное поле, показания магнитного локатора будут зашкаливать. Таким образом, если в объеме большого магнита находится маленький дефект, магнитный локатор не будет способен его засечь. В проведенном нами эксперименте видно, что точность определения магнитного момента диполя, гипотетически помещенного в геометрический центр дефекта, снижается на 6 – 8 %, что подтверждает этот недостаток метода магнитной локации для определения дефекта в объеме магнита. Такая проблема не наблюдается в методе обнаружения дефекта датчиком Холла.

## ВЫВОДЫ

На основании изложенного в данной диссертации материала можно сделать следующие выводы:

1. Пондеромоторная сила магнитного взаимодействия зависит от расположения и конфигурации магнитов относительно ферромагнетика. В случаях, когда магнит плотно прилегает к плоской поверхности ферромагнетика, сила отрыва этого магнита от ферромагнетика тем больше, чем больше периметр этого магнита. Таким образом, для увеличения силы взаимодействия магнита с ферромагнетиком с плоской поверхностью, достаточно разделить этот магнит на части, увеличивая тем самым периметр магнитной системы, без необходимости увеличения магнитного поля, создаваемого этим магнитом.
2. В магнитной системе, состоящей из двух магнитов, плотно взаимодействующей с ферромагнетиком с плоской поверхностью, сила магнитного взаимодействия зависит как от расстояния между этими двумя магнитами, так и от направления их векторов намагниченности. При различных конфигурациях направления вектора намагниченности двух магнитов наблюдается экстремум значения силы магнитного взаимодействия в зависимости от расстояния между этими магнитами.
3. Разработан и усовершенствован метод измерения магнитного поля с использованием маленького ферромагнитного шарика в качестве зонда и магнитостатического локатора. Неоднородности, возникающие в результате расположения зонда в магнитном поле, позволяют внести поправку в коэффициент пропорциональности между намагниченностью ферромагнитного зонда и индукцией магнитного поля, в которое он помещен. Поправка в коэффициент пропорциональности между намагниченностью ферромагнитного зонда и индукцией магнитного поля, в которое он помещен необходима для корректировки и правильной калибровки измерения магнитного поля методом магнитной локации посредством помещения в исследуемое магнитное поле ферромагнетика.

4. Разработан новый метод регистрации неоднородности в виде дефекта в объеме магнита в форме прямоугольного параллелепипеда, использующий магнитостатический локатор. Он крайне эффективен для быстрого нахождения и определения эффективного объема дефекта в объеме небольшого магнита. Для обнаружения дефектов в объеме большого магнита более эффективен сканирующий метод с использованием датчика Холла. Оба эти метода имеют свои достоинства и недостатки, и поэтому находят свою эффективность в различных случаях.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Так как постоянные магниты и системы постоянных магнитов все чаще становятся неотъемлемой частью производства в современных индустриях, изучение их свойств определенно является задачей крайней важности. Более эффективные конфигурации магнитных систем и методы измерения магнитного поля и нахождения дефектов, создающих неоднородности в магнитном поле постоянных магнитов, могут привести к более экономному распределению ресурсов на дальнейшие исследования в современных индустриях.

Изучение особенных конфигураций расположения магнитов может способствовать увеличению магнитной силы взаимодействия с ферромагнитным объектом без необходимости увеличивать намагниченность и объем одного магнита для достижения такого же результата. Такая экономия магнитных ресурсов безусловно может быть полезна в современном производстве.

Метод измерения магнитного поля с использованием магнитостатического локатора и зонда уникален и позволяет измерять магнитное поле без непосредственного контакта с исследуемой средой, что может оказаться крайне полезным при изучении магнитного поля в труднодоступных средах, в которых традиционные методы вызывают затруднения.

Так как в процессе изготовления и эксплуатации редкоземельных постоянных магнитов зачастую возникают дефекты в их объемах, вносящие неоднородности в магнитное поле, обратная задача магнитостатики обнаружения таких дефектов оказывается весьма актуальной и важной. Приведенные в данной работе различные методы обнаружения этих дефектов и определения их характеристик имеют различную эффективность в зависимости от размеров и параметров магнитной системы. Таким образом, эти методы решения обратной задачи магнитостатики могут оказаться полезными в различных научных и промышленных сферах.

## БЛАГОДАРНОСТЬ

За помощь в проведении исследований к этой работе автор выражает благодарность аспиранту кафедры общей физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова Шевцову В.С. и выпускнику магистратуры физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова Гинзбургу Б.А.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Тишин А.М. Перспективы применения редкоземельных постоянных магнитов в электроприводах специального назначения. К 100-летию использования постоянных магнитов в технике // Инноватика и эксперимент. 2017. № 1 (19). С. 175–192.
2. Соколов Д.Ю. Синтез высокооднородного поля постоянного магнита МР-томографа и задача реконструкции плотности объекта: дис. ... к. техн. наук: 05.11.01, СПб, 2007.
3. Sagawa M., Fujimura S., Togawa N., Yamamoto H., Matsuura Y. New material for permanent magnets on a base of Nd and Fe (invited) // Journal of Applied Physics. 1984. Vol. 55, № 6. P. 2083–2087.
4. Croat J.J., Herbst J.F., Lee R.W., Pinkerton F.E. Pr-Fe and Nd-Fe-based materials: a new class of high-performance permanent magnets (invited) // Journal of Applied Physics. 1984. Vol. 55, № 6. P. 2078–2082.
5. Herbst J.F.  $R_2Fe_{14}B$  materials: Intrinsic properties and technological aspects // Reviews of Modern Physics. 1991. Vol. 63, № 4. P. 819–898.
6. Андреева Н.В., Филимонов А.В., Рудской А.И., Бурханов Г.С., Терешина И.С., Политова Г.А., Пелевин И.А. Исследование наноструктурированных магнитотвердых материалов системы Nd–Ho–Fe–Co–B методами атомно-силовой и магнитно-силовой микроскопии // Физика твердого тела. 2016. Т. 58, № 9. С. 1798–1805.
7. Matsuura Y. Recent development of Nd-Fe-B sintered magnets and their applications // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 2006. Vol. 303, № 2. P. 344–347.
8. Lee. R.W. Hot-pressed neodymium-iron-boron magnets // Journal of Applied Physics. 1985. Vol. 46, № 8. P. 790–791.
9. Глебов В.А., Лукин А.А. Нанокристаллические редкоземельные магнитотвердые материалы. М.: ФГУП ВНИИНМ, 2007. 179 с.

10. Лукин А.А. Исследование изменения магнитного состояния магнитов типа NdRFeMB при термомагнитных воздействиях // Перспективные материалы. 2010. № 11. С. 145-150.
11. Bader S.D. Colloquium: Opportunities in nanomagnetism // Reviews of Modern Physics. 2006. Vol. 78, № 1. P. 1-16.
12. Стрэттон Дж.А. Теория электромагнетизма. М.-Л.: ГТТИ, 1948.
13. Самарский А.А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1978.
14. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. М.: ФИЗМАТГИЗ, 1962.
15. Engel-Herbert R., Hesjedal T. Calculation of the magnetic stray field of a uniaxial magnetic domain // Journal of Applied Physics. 2005. Vol. 97, № 7. P. 074504.
16. Вагин Д.В., Герасименко Т.Н., Поляков П.А. Точное аналитическое выражение для индукции магнитного поля образца прямоугольной формы // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. 2008. № 6. С. 53-55.
17. Печенков А.Н. Алгоритмы расчетов и моделирования прямых и обратных задач магнитостатической дефектоскопии и устройств технической магнитостатики: дис. ... д. тех. наук: 05.02.11, Екатеринбург, 2007.
18. Шевцов В. С., Кулезнев Н. Е., Поляков П. А. Измерение магнитного поля методом магнитной локации // Известия Российской академии наук. Серия физическая. 2020. Т. 84, № 2. С. 201–203.
19. Орлов А.А. Измерение параметров источников неоднородного магнитного поля в нестационарных условиях преобразователями Холла: дис. ... к. наук: 01.04.01, Волгоград, 2019.
20. Игнатьев В.К., Орлов А.А., Перченко С.В., Станкевич Д.А. Холловский микроскоп для измерения магнитных свойств пленок // Письма в Журнал технической физики. 2017. Т. 43, № 15. С. 3-11.
21. Касаткин С. И., Поляков П.А., Поляков О.П. Макет магнитной локации на базе магниторезистивного компаса // Известия Российской академии наук. Серия физическая. 2020. Т. 84, № 2. С. 204–206.

22. Wang X., Meng M.Q.-H. Study of a position and orientation tracking method for wireless capsule endoscope // International Journal of Information Acquisition. 2005. Vol. 2. № 2. P. 113-121.
23. Карпов Р.Г. Алгоритмическая, программная и аппаратная реализация системы магнитной локации скрытых объектов // Известия вузов. Электроника. 2009. № 3(77). С. 53-60.
24. Пятаков М.А., Поляков П.А., Русакова Н.Е. Изучение взаимодействия ферромагнетиков и расчет меры этого взаимодействия // Известия Российской академии наук. Серия физическая. 2020. Т. 84, № 5. С. 719–722.
25. Калашников С.Г. Электричество. М.: Физматлит, 2003. 624 с.
26. Сивухин Д.В. Электричество. М.: Физматлит, 2004. 656 с.
27. Чечерников В.И. Магнитные измерения. М.: МГУ им. Ломоносова, 1969. 388 с.
28. Касаткин С.И., Поляков О.П., Поляков П.А. Возможности реализации аппаратно-программного комплекса трехмерной мыши на основе решения обратной задачи магнитной локации // Датчики и системы. 2005. № 8. С. 33-36.
29. Артамонов Е.И., Балабанов А.Б., Касаткин С.И. Система магнитной локации на примере капсулы эндоскопа // Датчики и системы. 2012. № 12. С. 2-5.
30. Карпов Р.Г. Метода анализа и обработки данных для устройства трехмерной магнитной локации: дис. ... к. техн. наук: 05.13.01, М., 2009.
31. Кулезнев Н.Е., Поляков П.А., Шевцов В.С. Теоретическое и экспериментальное исследование особенностей магнитного поля сильно намагниченного постоянного магнита // Известия Российской академии наук. Серия физическая. 2018. Том 82. № 8. С. 1076-1079.
32. Поляков О.П., Поляков П.А. О магнитной локации на основе магниторезистивных датчиков // Труды VIII Международной

- конференции по спиновой электронике. М.: Издательство МЭИ. 1999. С. 408-410.
33. Kasatkin S.I., Polyakov O.P., Rusakova N.E., Rusakov A.E. On uniqueness of solution of a reverse problem of magnetic location // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 2006. Vol. 305, № 2. P. 361–364.
34. Кулезнев Н.Е. Исследование распределения магнитных полей и структуры намагниченности постоянных магнитов: бак. раб.: М., 2018.
35. Вагин Д.В., Касаткин С.И., Поляков П.А. Полосковые концентраторы магнитного поля для магниторезистивных датчиков тока и датчиков Холла // Датчики и системы. 2010. № 12. С. 25-29.
36. Кабанов О.А., Герасименко Т.Н., Поляков П.А. Магнитное поле реального постоянного магнита в форме прямоугольного параллелепипеда // Материалы: XXI Международная конференция Электромагнитное поле и материалы (фундаментальные физические исследования). М.: Издательство МЭИ. 2013. С. 324–331.
37. Касаткин С.И., Артамонов Е.И., Муравьев А.М., Плотникова Н.В., Ромакин В.А., Савельев К.А., Амеличев В.В., Костюк Д.В., Поляков П.А., Герасименко Т.Н. Контроль электронных компонент по создаваемому ими магнитному полю // Автоматика и телемеханика. 2015. № 1. С. 136–146.