

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

**«НОВЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ
ЭЛЕКТРОСТАТИКИ ПРОВОДНИКОВ»**

Выполнил студент
группы 205м
Стока Г.П.

Научный руководитель:
к.ф.-м.н. Н.Е. Русакова

Допущена к защите _____

Зав. кафедрой _____

Москва
2018 г.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1. ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОСТАТИКИ ЗАМКНУТОГО ЗАРЯЖЕННОГО ПРОВОДЯЩЕГО ТЕЛА.....	7
1.1. Постановка задачи.....	7
1.2. Аналитическое выражение для формы проводящей поверхности	8
1.3. Ограничения, наложенные на параметры.....	12
1.4. Безразмерная поверхностная плотность заряда проводящей поверхности	18
1.5. Графики формы поверхности и безразмерной поверхностной плотности заряда проводящей поверхности	19
1.6. Кривизна проводящей поверхности.....	23
1.7. Графики для кривизны проводящей поверхности.....	24
1.8. Емкость проводящей поверхности	26
ГЛАВА 2. ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОСТАТИКИ В ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ ПРОТЯЖЕННОГО ЗАРЯЖЕННОГО ПРОВОДЯЩЕГО ТЕЛА.....	28
2.1. Постановка задачи.....	28
2.2. Уравнение поверхности.....	30
2.3. Ограничения на безразмерные параметры	31
2.4. Безразмерная поверхностная плотность заряда.....	33
2.5. Безразмерная кривизна поверхности	34
2.6. Анализ полученных результатов	35
ГЛАВА 3. ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОСТАТИКИ ПРОТЯЖЕННОГО ЗАРЯЖЕННОГО ПРОВОДЯЩЕГО ТЕЛА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ.....	40
3.1. Уравнение поверхности.....	40

3.2. Ограничения на безразмерные параметры	40
3.3. Безразмерная поверхностная плотность заряда	43
3.4. Безразмерная кривизна поверхности	44
3.5. Анализ полученных результатов	44
ВЫВОДЫ	50
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	51
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	53

ВВЕДЕНИЕ

Данная магистерская диссертация посвящена задаче электростатики проводников.

Известно ограниченное количество аналитических решений задачи электростатики заряженных проводящих тел. В классических учебниках по электродинамике [1, 2–5] приведены решения задачи электростатики для проводящего заряженного эллипсоида и его частных случаев. Существует класс решений, полученный с помощью метода электрических изображений для комплексного потенциала [6–7]. Тем не менее, эта задача не потеряла актуальности, и в настоящее время появляются новые оригинальные решения. Например, для поверхности двух пересекающихся заряженных сфер [8], равномерно заряженного эллиптического кольца [9], двух проводящих сфер [10], равномерно заряженной квадратной и прямоугольной пластин [11–15] и некоторых аксиально симметричных поверхностей нетривиальной формы [16–18] и другие [19–23].

В работе [19] используется метод дипольных изображений для расчета индуцированных дипольных моментов пары проводящих сфер неодинакового размера, подвергнутых воздействию однородного электрического поля. В работе [22] получены точные аналитические выражения для полной энергии и связанных с ней величин, соответствующих конечной квантовой системе электронов в геометрии диска. В работе [23] исследуется электронная структура квазидвумерных квадратных квантовых точек.

Указанные аналитические решения имеют огромное значение для задачи электростатики, так как они позволяют анализировать эффективность численных методов и являются отправной точкой для качественного понимания распределения заряда по проводящим поверхностям различной формы.

При работе над данной диссертацией было проведено обобщение и развитие метода, использованного в работе [16], получен новый класс

замкнутых поверхностей вращения, для которых однозначно аналитически решается задача электростатики, а также решена задача электростатики для бесконечно протяженных замкнутых в сечении заряженных проводящих поверхностей.

Для обоих классов проводящих поверхностей рассчитано распределение заряда. Согласно некоторым классическим учебникам [6,7] максимальное значение плотности распределения заряда по поверхности соответствует максимальной кривизне данной поверхности. Исследования по установлению зависимости поверхностной плотности заряда от кривизны поверхности проводятся до настоящего времени. В более ранних работах [24–27] значение плотности заряда в любой точке проводящей поверхности считается пропорциональным корню четвертой степени из гауссовой кривизны в данной точке. Однако в более новой публикации [28] доказано, что это не совсем так. В данной работе говорится, что существует частичная зависимость между поверхностной плотностью электрического заряда и корнем четвертой степени из гауссовой кривизны. Однако поверхностная плотность электрического заряда также зависит от других функций, зависящих от поверхностных координат. Также говорится, что если есть некоторая симметрия поверхности, то есть возможность найти выражение для поверхностной плотности электрического заряда в явном виде. Однако, если симметрии нет, то найти аналитическое выражение не предоставляется возможным, даже если поверхностная плотность заряда зависит лишь от одной переменной. На основе метода, ранее разработанного в нашей научной группе, были рассчитаны распределения плотности заряда по поверхности некоторого класса проводящих тел вращения нетривиальной формы [17], и было подтверждено несовпадение точек поверхности с максимальной кривизной и максимальным значением плотности заряда. Результаты расчетов, приведенные в данной диссертации, также показывают, что в точках, где плотность заряда максимальна, кривизна поверхности не достигает максимальных значений.

В рамках данной работы были также рассчитаны значения емкости для нескольких поверхностей из описанного в диссертации нового класса замкнутых проводящих поверхностей вращения. Во многих классических учебниках (см., например, [29]) приводятся выражения для емкостей таких фигур, как шар, плоский диск и эллипсоид. За последние десять лет были опубликованы работы, в которых были получены аналитические выражения для емкости тонкого тороида [30], двух сфер [31]. Продолжается поиск объектов, для которых можно аналитически рассчитать емкостные коэффициенты. Подобные задачи интересны, например, с точки зрения анализа изменения свойств однородных конденсаторов при некоторой деформации, также полезно знать емкостные коэффициенты при анализе взаимодействия заряженных объектов (см., например, [32–33]).

ГЛАВА 1. ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОСТАТИКИ ЗАМКНУТОГО ЗАРЯЖЕННОГО ПРОВОДЯЩЕГО ТЕЛА

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим замкнутое заряженное проводящее тело с произвольной поверхностью. Можно получить однозначно определенное выражение для электростатического потенциала U , создаваемого этим заряженным телом в некоторой точке пространства, решая задачу Дирихле для уравнения Лапласа [1]:

$$\begin{cases} \Delta U = 0 \\ U|_{\Sigma} = U_{\Sigma}, \\ U|_{\infty} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

где U_{Σ} — потенциал электростатического поля в точках проводящей поверхности — определенная константа. Согласно третьему уравнению данной системы электростатический потенциал на бесконечности выбран равным нулю.

Для случая, когда заряженное проводящее тело является телом вращения, потенциал на поверхности проводника U зависит только от полярного угла θ . Тогда единственное решение задачи Дирихле может быть представлено в виде следующей линейной комбинации функций [2], [16]:

$$U(r, \theta) = k \sum_{i=0}^N a_i \frac{P_i(\cos\theta)}{r^{i+1}}, \quad (2)$$

где a_i — некоторые коэффициенты, $P_i(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра порядка i , $r = r(\theta)$ — радиус-вектор, проведенный из начала координат к точкам поверхности, $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, ϵ_0 — электрическая постоянная.

Подставляя в формулу (2) конкретные значения N можно найти несколько новых классов замкнутых аксиально симметричных поверхностей, описываемых точными аналитическими выражениями.

Как известно:

$$\vec{E} = -\text{grad}U = -\nabla U \quad (3)$$

$$E = |-\nabla U| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad (4)$$

где \vec{E} — напряженность электрического поля вблизи проводящей поверхности, σ — поверхностная плотность заряда, ε_0 — электрическая постоянная.

В сферических координатах оператор ∇ выглядит следующим образом:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \vec{e}_\varphi \quad (5)$$

1.2. Аналитическое выражение для формы проводящей поверхности

Рассмотрим случай, когда в формуле (2) выбрано значение $N = 3$, и первые три коэффициента a_0, a_1, a_2 не равны нулю. В этом случае уравнение (2) запишется в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_\Sigma = k \left(a_0 \frac{P_0(\cos\theta)}{r} + a_1 \frac{P_1(\cos\theta)}{r^2} + a_2 \frac{P_2(\cos\theta)}{r^3} \right) \\ P_0(\cos\theta) = 1 \\ P_1(\cos\theta) = \cos\theta \\ P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2} (3\cos^2\theta - 1) \end{array} \right. \quad (6)$$

Для удобства в расчетах введем некоторые безразмерные величины. Для этого рассмотрим проводящую сферу радиусом r_0 с поверхностным зарядом q_0 . Тогда введем выражения для потенциала на ее поверхности и ее поверхностной плотности заряда по следующим формулам:

$$U_0 = k \frac{q_0}{r_0} \quad (7)$$

$$\sigma_0 = \frac{q_0}{4\pi r_0^2} \quad (8)$$

Теперь можно обезразмерить радиус-вектор, потенциал и поверхностную плотность заряда рассматриваемой поверхности с помощью

нормировки данных величин на соответствующие величины для заряженной проводящей сферы:

$$\text{безразмерный радиус-вектор} \quad \xi = \frac{r}{r_0} > 0 \quad (9)$$

$$\text{безразмерный потенциал на границе проводника} \quad \psi = \frac{U}{U_0} > 0 \quad (10)$$

$$\text{безразмерная поверхностная плотность заряда} \quad \tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_0} > 0 \quad (11)$$

Перепишем выражение (6) в терминах безразмерных величин (9)–(11):

$$\psi = \frac{U}{U_0} = \frac{a_0 r_0}{q_0 r} + \frac{a_1 \cos\theta r_0^2}{q_0 r_0 r^2} + \frac{a_2 (3\cos^2\theta - 1)r_0^3}{q_0 r_0^3 2r^3} \quad (12)$$

Пусть

$$\begin{cases} a_0 = q_0 \\ \frac{a_1}{q_0 r_0} = k_1 \\ \frac{a_2}{q_0 r_0^3} = k_2 \end{cases} \quad (13)$$

Тогда

$$\psi = \frac{1}{\xi} + k_1 \frac{\cos\theta}{\xi^2} + k_2 \frac{3\cos^2\theta - 1}{2\xi^3} \quad (14)$$

$$\xi^3 - \frac{1}{\psi} \xi^2 - \frac{k_1}{\psi} \cos\theta \xi - \frac{k_2 (3\cos^2\theta - 1)}{2\psi} = 0 \quad (15)$$

Пусть

$$N_1(\theta) = 1 + 3k_1 \psi \cos\theta \quad (16)$$

$$N_3(\theta) = 1 + \frac{9k_1 \psi}{2} \cos\theta + \frac{27k_2 \psi^2 (3\cos^2\theta - 1)}{2} \quad (17)$$

Воспользовавшись формулой Кардано для решения уравнения третьей степени [34], мы получим:

$$\xi = \frac{1}{3\Psi} \left\{ 1 + \left(N_3(\theta) + \sqrt{N_3^2(\theta) - N_1^3(\theta)} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(N_3(\theta) - \sqrt{N_3^2(\theta) - N_1^3(\theta)} \right)^{\frac{1}{3}} \right\} \quad (18)$$

Значение выражения (18) должно быть неотрицательным для любого значения θ , а также функция $\xi(\theta)$ должна быть непрерывной.

Рассмотрим три случая подкоренного выражения:

1) $N_3^2(\theta) - N_1^3(\theta) > 0$ и существует один корень

$$\xi = \frac{1}{3\Psi} \left\{ 1 + \left(N_3(\theta) + \sqrt{N_3^2(\theta) - N_1^3(\theta)} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(N_3(\theta) - \sqrt{N_3^2(\theta) - N_1^3(\theta)} \right)^{\frac{1}{3}} \right\} \quad (19)$$

В зависимости от значения θ это выражение может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Однако требуется, чтобы при любом значении θ данное выражение было неотрицательным.

2) $N_3^2(\theta) - N_1^3(\theta) = 0$, тогда

Случай а) $N_3(\theta) = N_1^{\frac{2}{3}}(\theta) = (1 + 3k_1\Psi\cos\theta)^{\frac{2}{3}}$

$$\xi = \frac{1}{3\Psi} \{1 + 2\sqrt{1 + 3k_1\Psi\cos\theta}\} \quad (20)$$

Если $-\frac{1}{3} \leq k_1\Psi \leq \frac{1}{3}$, то $\xi > 0$ при любом значении θ

Случай б) $N_3(\theta) = -N_1^{\frac{2}{3}}(\theta) = -(1 + 3k_1\Psi\cos\theta)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow$

$$\xi = \frac{1}{3\Psi} \{1 - 2\sqrt{1 + 3k_1\Psi\cos\theta}\} \quad (21)$$

В этом случае при $\theta=0$ $\xi < 0$, следовательно, этот случай нас не удовлетворяет.

Таким образом, при $N_3^2(\theta) - N_1^3(\theta) = 0$ нас удовлетворяет случай а).

3) $N_3^2(\theta) - N_1^3(\theta) < 0$ и существует три корня

$$\xi = \frac{1}{3\Psi} \left\{ 1 + \left(N_3(\theta) + i\sqrt{N_1^3(\theta) - N_3^2(\theta)} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(N_3(\theta) - i\sqrt{N_1^3(\theta) - N_3^2(\theta)} \right)^{\frac{1}{3}} \right\} \quad (22)$$

Рассмотрим выражения:

$$\left(N_3(\theta) + i\sqrt{N_1^3(\theta) - N_3^2(\theta)} \right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt{N_1(\theta)} e^{i\left(\frac{\phi+2\pi n}{3}\right)} \quad (23)$$

$$\left(N_3(\theta) - i\sqrt{N_1^3(\theta) - N_3^2(\theta)} \right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt{N_1(\theta)} e^{-i\left(\frac{\phi+2\pi n}{3}\right)} \quad (24)$$

В этих формулах ϕ определяется следующим выражением:

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{\sqrt{N_1^3(\theta) - N_3^2(\theta)}}{N_3(\theta)} \quad 0 \leq \phi < \frac{\pi}{2} \quad (25)$$

Тогда с учетом уравнений (23) и (24) решение (22) примет следующий вид:

$$\xi = \frac{1}{3\Psi} \left\{ 1 + 2\sqrt{N_1(\theta)} \cos\left(\frac{\phi + 2\pi n}{3}\right) \right\} \quad (26)$$

При $n = 0, n = 1, n = 2$ мы получим различные выражения, далее при увеличении n выражения будут повторяться. Необходимо выбрать только одно из трех различных выражений, поскольку решение единственно.

Рассмотрим эти решения:

1) $n = 0$

$$\xi = \frac{1}{3\Psi} \left\{ 1 + 2\sqrt{N_1(\theta)} \cos\left(\frac{\phi}{3}\right) \right\} \quad (27)$$

В этом случае $\xi > 0$ при любых значениях θ и $\phi(\theta)$.

2) $n = 1$

$$\xi = \frac{1}{3\psi} \left\{ 1 + 2\sqrt{N_1(\theta)} \cos\left(\frac{\phi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \right\} = \frac{1}{3\psi} \left\{ 1 - 2\sqrt{N_1(\theta)} \sin\left(\frac{\phi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) \right\} \quad (28)$$

Данное выражение может принимать отрицательные значения при некоторых значениях θ , поэтому оно нас не удовлетворяет.

$$3) n = 2$$

$$\xi = \frac{1}{3\psi} \left\{ 1 + 2\sqrt{N_1(\theta)} \cos\left(\frac{\phi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) \right\} = \frac{1}{3\psi} \left\{ 1 - 2\sqrt{N_1(\theta)} \sin\left(\frac{\phi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \right\} \quad (29)$$

Данное выражение также может принимать отрицательные значения при некоторых значениях θ , поэтому оно нас не удовлетворяет.

В итоге получим:

$$\xi = \frac{1}{3\psi} \left\{ 1 + 2\sqrt{N_1(\theta)} \cos\left(\frac{\phi}{3}\right) \right\} \quad (30)$$

Ограничения, наложенные на коэффициенты, входящие в данное выражение будут рассмотрены в следующем разделе главы.

1.3. Ограничения, наложенные на параметры

Так как $N_1(\theta)$ стоит под корнем в выражении (30), то

$$N_1(\theta) \geq 0 \quad (31)$$

Решение данного неравенства выглядит следующим образом:

$$k_1\psi \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right] \quad (32)$$

Теперь рассмотрим второе условие, которое должно выполняться при любом значении θ :

$$\begin{cases} N_3^2(\theta) - N_1^3(\theta) \leq 0 \\ N_1(\theta) = 1 + 3k_1\psi \cos\theta; \\ N_3(\theta) = 1 + \frac{9k_1\psi}{2} \cos\theta + \frac{27k_2\psi^2}{2} \frac{(3\cos^2\theta - 1)}{2}; \end{cases} \quad (33)$$

Сделаем следующую замену переменных:

$$\begin{cases} 3k_1\Psi = Q_1 \quad (Q_1 \in [-1; 1]) \\ \frac{27k_2\Psi^2}{2} = Q_2 \\ \cos\theta = x \quad (x \in [-1; 1]) \end{cases} \quad (34)$$

Тогда получим следующее условие:

$$\left(1 + \frac{3}{2}Q_1x + Q_2 \frac{3x^2 - 1}{2}\right)^2 - (1 + Q_1x)^3 \leq 0 \quad (35)$$

Упрощая данное выражение, получим следующее:

$$(3x^2 - 1)^2 Q_2^2 + 2(3x^2 - 1)(2 + 3Q_1x)Q_2 - Q_1^2 x^2 (3 + 4Q_1x) \leq 0 \quad (36)$$

При $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ данное условие выполняется, т.к. оно приводится к виду

$$-\frac{Q_1^2}{3} \left(3 \pm \frac{4}{\sqrt{3}}Q_1\right) \leq 0, \quad (37)$$

что верно при любом значении $Q_1 \in [-1; 1]$.

При остальных значениях x многочлен в условии (36) является квадратичным относительно Q_2 , а его график — парабола с ветвями вверх, следовательно, решением неравенства (36) будет отрезок, концы которого являются его критическими точками:

Дискриминант неравенства (36) будет следующим:

$$D = 16(3x^2 - 1)^2(1 + Q_1x)^3 \quad (38)$$

Нетрудно видеть, что полученный дискриминант всегда неотрицателен при $Q_1 \in [-1; 1]$ и $x \in [-1; 1]$.

Тогда критическими точками неравенства (36) являются следующие выражения:

$$Q_2 = \frac{-(2 + 3Q_1x) \pm 2(1 + Q_1x)^{\frac{3}{2}}}{3x^2 - 1} \quad (39)$$

Тогда значения параметра Q_2 будут лежать в интервале от меньшего до большего значения критических точек неравенства (36). Однако какое из значений больше, а какое меньше, зависит от параметра x , поэтому введем две функции:

$$\begin{cases} f_1 = \frac{-(2 + 3Q_1x) + 2(1 + Q_1x)^{\frac{3}{2}}}{3x^2 - 1} \\ f_2 = \frac{-(2 + 3Q_1x) - 2(1 + Q_1x)^{\frac{3}{2}}}{3x^2 - 1} \end{cases}; \quad x \in [-1; 1] \quad (40)$$

Рассмотрим первый случай, когда

$$f_1 \geq f_2 \quad (41)$$

$$x \in \left[-1; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right] \quad (42)$$

Тогда ограничения на параметр Q_2 будут следующими:

$$\begin{cases} Q_2 \geq f_2 \\ Q_2 \leq f_1 \end{cases} \quad (43)$$

Исследуем функцию f_2 на интервале $x \in \left[-1; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right]$ (см рисунок 2).

Рассмотрим, при каких значениях Q_1 функция f_2 пересекает ось абсцисс на интервале $x \in \left[-1; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right]$. Для этого рассмотрим два уравнения:

$$\begin{cases} f_2(1) = 0 \\ f_2(-1) = 0 \end{cases} \quad (44)$$

$$\begin{array}{ll} f_2(1) = 0 & f_2(-1) = 0 \\ \frac{-2 - 3Q_1 - 2(1 + Q_1)^{\frac{3}{2}}}{2} = 0 & \frac{-2 + 3Q_1 - 2(1 - Q_1)^{\frac{3}{2}}}{2} = 0 \\ 2(1 + Q_1)^{\frac{3}{2}} = -2 - 3Q_1 & 2(1 - Q_1)^{\frac{3}{2}} = -2 + 3Q_1 \\ \begin{cases} 4(1 + Q_1)^3 = 4 + 12Q_1 + 9Q_1^2 \\ -2 - 3Q_1 \geq 0 \end{cases} & \begin{cases} 4(1 - Q_1)^3 = 4 - 12Q_1 + 9Q_1^2 \\ -2 + 3Q_1 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} Q_1^2(4Q_1 + 3) = 0 \\ Q_1 \leq -\frac{2}{3} \end{cases} & \begin{cases} Q_1^2(4Q_1 - 3) = 0 \\ Q_1 \geq \frac{2}{3} \end{cases} \\ Q_1 = -\frac{3}{4} & Q_1 = \frac{3}{4} \end{array}$$

Исследуем функцию f_2 на интервале $x \in \left[-1; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right]$.

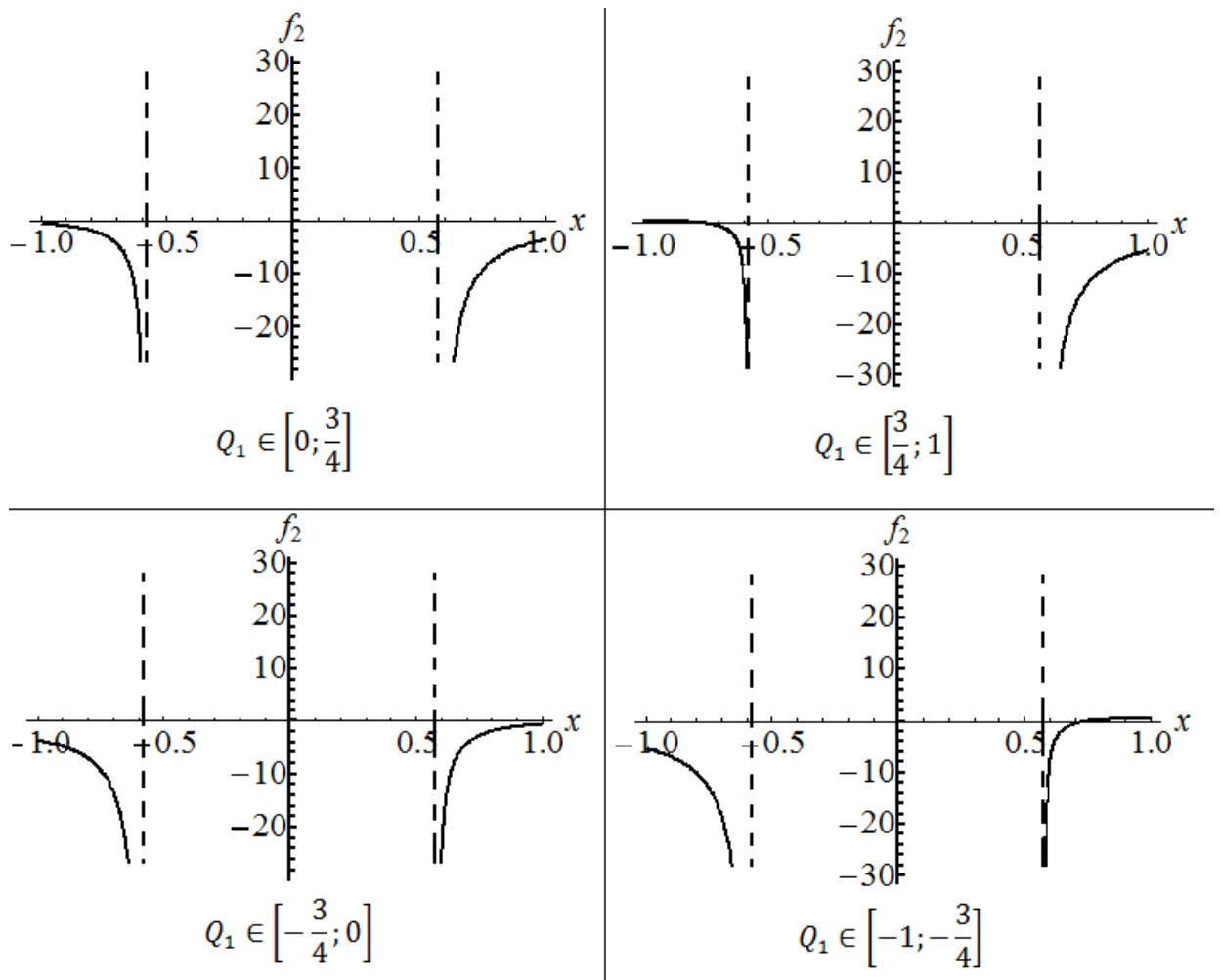


Рисунок 1 — Графики функции $f_2(x)$ при различных значениях Q_1 при $x \in [-1; -\frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}; 1]$

Исследуем функцию f_1 на интервале $x \in [-1; -\frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}; 1]$ (см рисунок 2).

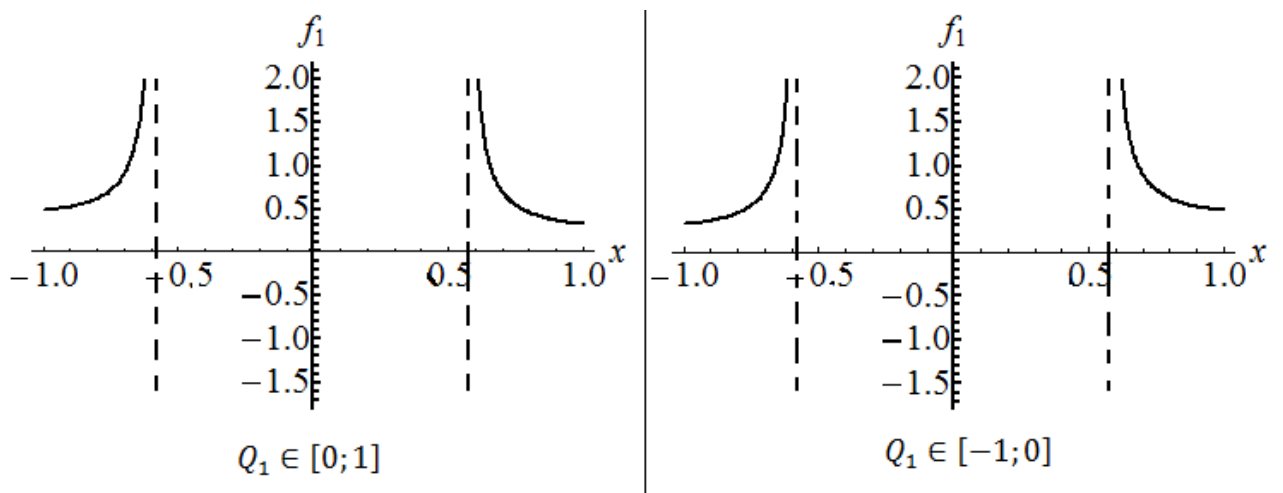


Рисунок 2 — Графики зависимости функции $f_1(x)$ при различных значениях Q_1 при $x \in [-1; -\frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}; 1]$

Как видно из графиков, при любом значении $Q_1 \in [-1; 1] \Rightarrow f_1 \geq 0$ на интервале $x \in \left[-1; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right]$. А при $Q_1 = 0 \Rightarrow f_1 = 0$ на том же интервале $x \in \left[-1; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right]$.

В итоге на интервале $x \in \left[-1; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right]$ получим, что

$$\begin{cases} Q_1 \in \left[-1; -\frac{3}{4}\right] \Rightarrow Q_2 \in [f_2(1); f_1(-1)], f_2(1) > 0, f_1(-1) > 0 \\ Q_1 \in \left[-\frac{3}{4}; 0\right] \Rightarrow Q_2 \in [f_2(1); f_1(-1)], f_2(1) < 0, f_1(-1) > 0 \\ Q_1 \in \left[0; \frac{3}{4}\right] \Rightarrow Q_2 \in [f_2(-1); f_1(1)], f_2(-1) < 0, f_1(1) > 0 \\ Q_1 \in \left[\frac{3}{4}; 1\right] \Rightarrow Q_2 \in [f_2(-1); f_1(1)], f_2(-1) > 0, f_1(1) > 0 \end{cases} \quad (45)$$

Рассмотрим второй случай, когда

$$f_1 \leq f_2 \quad (46)$$

$$x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad (47)$$

Тогда ограничения на параметр Q_2 будут следующими:

$$\begin{cases} Q_2 \geq f_1 \\ Q_2 \leq f_2 \end{cases} \quad (48)$$

Исследуем функцию f_1 на интервале $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (см рисунок 3).

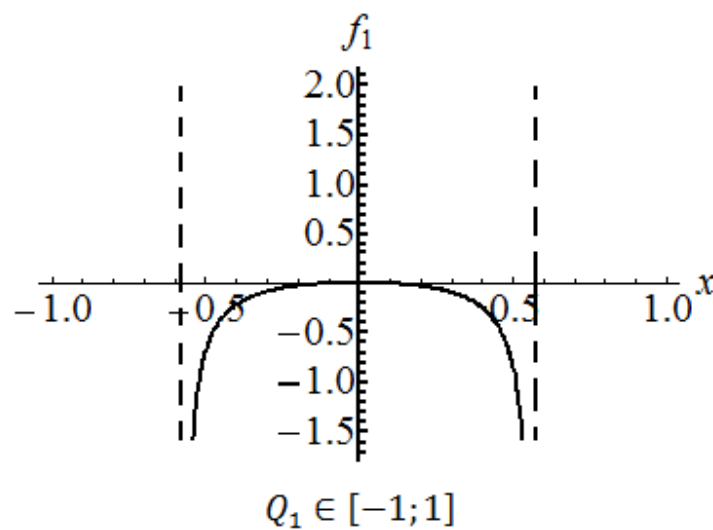


Рисунок 3 — График зависимости функции $f_1(x)$ при различных значениях Q_1 при $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Исследуем функцию f_2 на интервале $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (см рисунок 4).

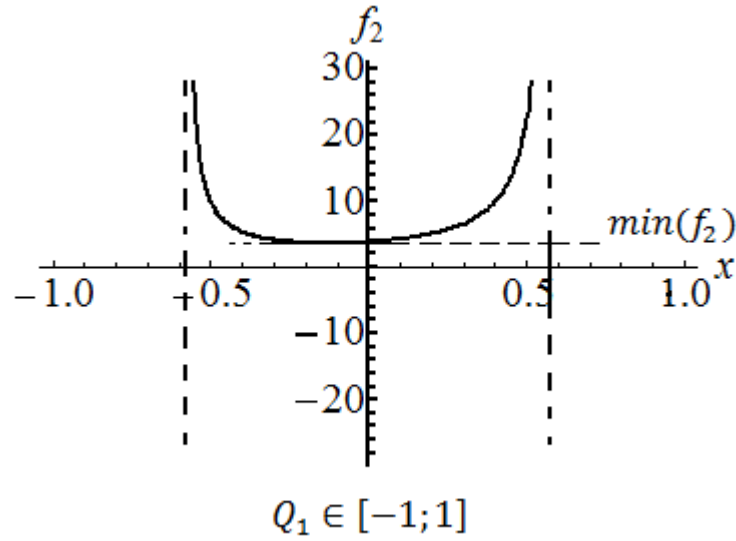


Рисунок 4 — График зависимости функции $f_2(x)$ при различных значениях Q_1 при $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

В итоге на интервале $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ получим, что

$$Q_1 \in [-1; 1] \Rightarrow Q_2 \in [0; \min(f_2)] \quad (49)$$

Теперь совместим первый и второй случаи:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 \in \left[-1; -\frac{3}{4}\right] \Rightarrow Q_2 \in [f_2(1); \min\{f_1(-1); \min(f_2)\}] \\ Q_1 \in \left[-\frac{3}{4}; 0\right] \Rightarrow Q_2 \in [0; \min\{f_1(-1); \min(f_2)\}] \\ Q_1 \in \left[0; \frac{3}{4}\right] \Rightarrow Q_2 \in [0; \min\{f_1(1); \min(f_2)\}] \\ Q_1 \in \left[\frac{3}{4}; 1\right] \Rightarrow Q_2 \in [f_2(-1); \min\{f_1(1); \min(f_2)\}] \end{array} \right. \quad (50)$$

Так как при $Q_1 \in [-1; 1]$ значения $f_1(1)$ и $f_1(-1)$ не превышают 0.5, а значение $\min(f_2)$ не меньше 3, значит

$$\left\{ \begin{array}{l} \min\{f_1(-1); \min(f_2)\} = f_1(-1) \\ \min\{f_1(-1); \min(f_2)\} = f_1(-1) \\ \min\{f_1(1); \min(f_2)\} = f_1(1) \\ \min\{f_1(1); \min(f_2)\} = f_1(1) \end{array} \right. \quad (51)$$

Тогда, учитывая (51), итоговый результат для параметра Q_2 будет следующим:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 \in \left[-1; -\frac{3}{4}\right] \Rightarrow Q_2 \in [f_2(1); f_1(-1)] \\ Q_1 \in \left[-\frac{3}{4}; 0\right] \Rightarrow Q_2 \in [0; f_1(-1)] \\ Q_1 \in \left[0; \frac{3}{4}\right] \Rightarrow Q_2 \in [0; f_1(1)] \\ Q_1 \in \left[\frac{3}{4}; 1\right] \Rightarrow Q_2 \in [f_2(-1); f_1(1)] \end{array} \right. \quad (52)$$

Вернемся теперь к параметрам k_1, k_2, ψ по формулам (34) и учтем значения $f_2(1), f_2(-1), f_1(-1), f_1(1)$ по формуле (40) и получим, что

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1\psi \in \left[-\frac{1}{3}; -\frac{1}{4}\right] \Rightarrow k_2\psi^2 \in \left[-\frac{2}{27} - \frac{1}{3}k_1\psi - \frac{2}{27}(1+3k_1\psi)^{\frac{3}{2}}; \right. \\ \left. -\frac{2}{27} + \frac{1}{3}k_1\psi + \frac{2}{27}(1-3k_1\psi)^{\frac{3}{2}} \right] \\ k_1\psi \in \left[-\frac{1}{4}; 0\right] \Rightarrow k_2\psi^2 \in \left[\begin{array}{c} 0; \\ -\frac{2}{27} + \frac{1}{3}k_1\psi + \frac{2}{27}(1-3k_1\psi)^{\frac{3}{2}} \end{array} \right] \\ k_1\psi \in \left[0; \frac{1}{4}\right] \Rightarrow k_2\psi^2 \in \left[\begin{array}{c} 0; \\ -\frac{2}{27} - \frac{1}{3}k_1\psi + \frac{2}{27}(1+3k_1\psi)^{\frac{3}{2}} \end{array} \right] \\ k_1\psi \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right] \Rightarrow k_2\psi^2 \in \left[-\frac{2}{27} + \frac{1}{3}k_1\psi - \frac{2}{27}(1-3k_1\psi)^{\frac{3}{2}}; \right. \\ \left. -\frac{2}{27} - \frac{1}{3}k_1\psi + \frac{2}{27}(1+3k_1\psi)^{\frac{3}{2}} \right] \end{array} \right. \quad (53)$$

1.4. Безразмерная поверхностная плотность заряда проводящей поверхности

Найдем теперь аналитическое выражение для безразмерной поверхностной плотности заряда $\tilde{\sigma}(\theta)$. В этом случае

$$\begin{aligned} \nabla(U) = k \left[\frac{a_0}{r^2} + \frac{2a_1 \cos\theta}{r^3} + \frac{3a_2}{r^4} \left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2} \right) \right] \vec{e}_r \\ + k \left[\frac{a_1 \sin\theta}{r^3} + \frac{a_2}{2r^4} 6\cos\theta \sin\theta \right] \vec{e}_\theta \end{aligned} \quad (54)$$

Далее получаем:

$$\sigma = \left| k \left[\frac{a_0}{r^2} + \frac{2a_1 \cos \theta}{r^3} + \frac{3a_2}{r^4} \left(\frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) \right] \vec{e}_r + k \left[\frac{a_1 \sin \theta}{r^3} + \frac{a_2}{2r^4} 6 \cos \theta \sin \theta \right] \vec{e}_\theta \right| \varepsilon_0 \quad (55)$$

С учетом безразмерных параметров (13) получим, что

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{\xi^4} \sqrt{\left[\xi^2 + 2\xi k_1 \cos \theta + 3k_2 \left(\frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) \right]^2 + [\xi k_1 \sin \theta + 3k_2 \cos \theta \sin \theta]^2}, \quad (56)$$

где ξ определяется выражением (30).

1.5. Графики формы поверхности и безразмерной поверхностной плотности заряда проводящей поверхности

В работах [16, 17] были проведены расчеты и представлены поверхности и соответствующие распределения зарядов в виде аналитических уравнений и в графическом виде для трех частных случаев, когда ненулевым являлся один из коэффициентов k_1 или k_2 .

В данной работе проведены расчеты для более общего случая. Вид поверхности при значениях параметров $\psi = 1, k_1 = 0.25, k_2 = 0.26$ приведен на рисунках 5, 6, 7, а распределение заряда по поверхности представлено на рисунках 8, 9, 10.

Построение всех графиков производится при следующем соответствии декартовых координат и введенных безразмерных величин

$$\begin{cases} x = \xi \sin \theta \cos \varphi \\ y = \xi \sin \theta \sin \varphi \\ z = \xi \cos \theta \end{cases} \quad (57)$$

$$\begin{cases} x = \tilde{\sigma} \sin \theta \cos \varphi \\ y = \tilde{\sigma} \sin \theta \sin \varphi \\ z = \tilde{\sigma} \cos \theta \end{cases}$$

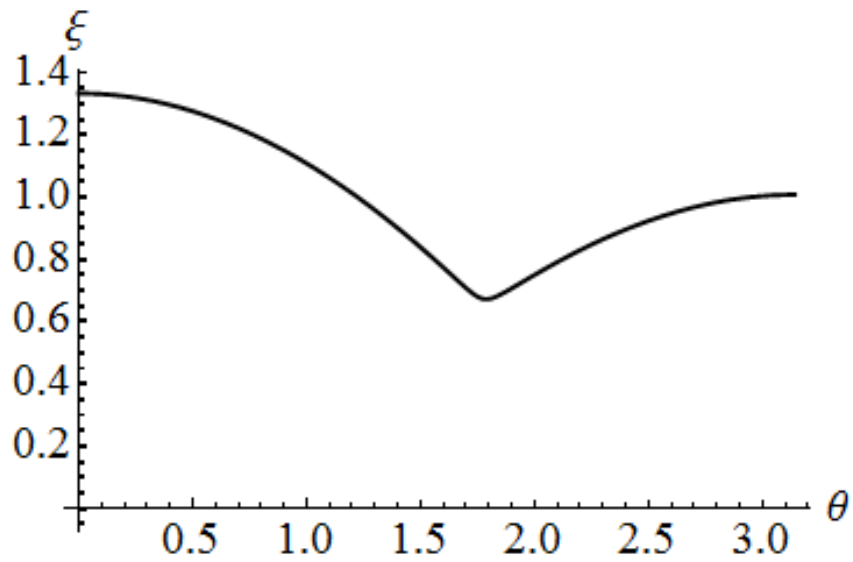


Рисунок 5 — График зависимости безразмерного радиус-вектора поверхности (30) от полярного угла при $\psi = 1, k_1 = 0.25, k_2 = 0.26$

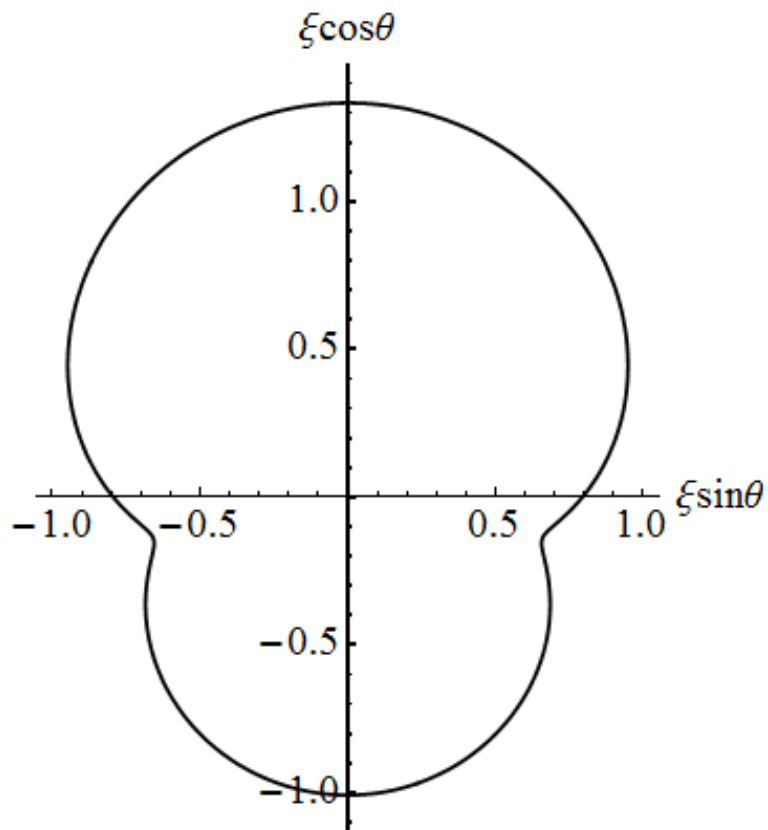


Рисунок 6 — Форма проводящей поверхности (30) в разрезе при $\psi = 1, k_1 = 0.25, k_2 = 0.26$

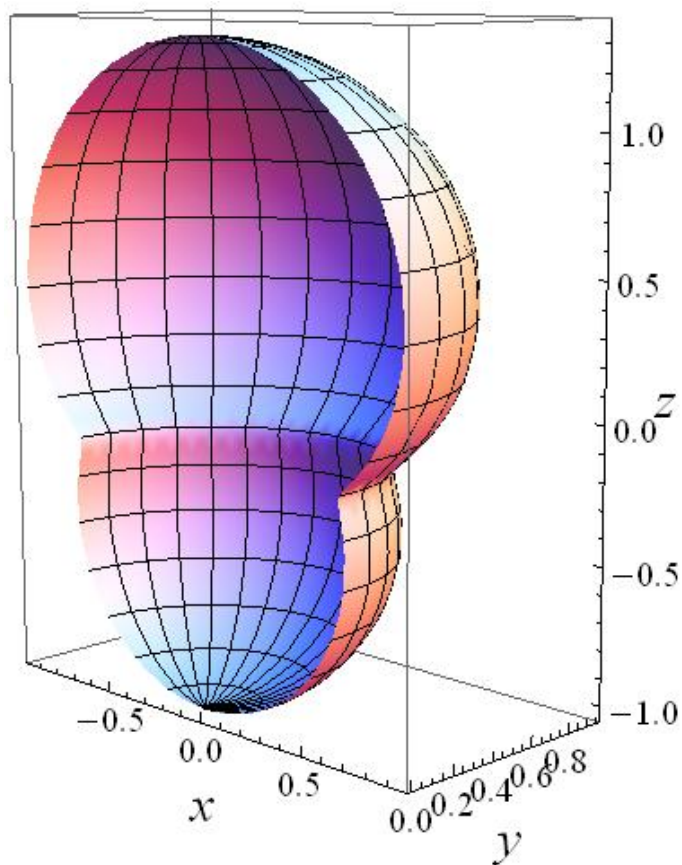


Рисунок 7 — Форма проводящей поверхности (30) в 3D при $\psi = 1, k_1 = 0.25, k_2 = 0.26$

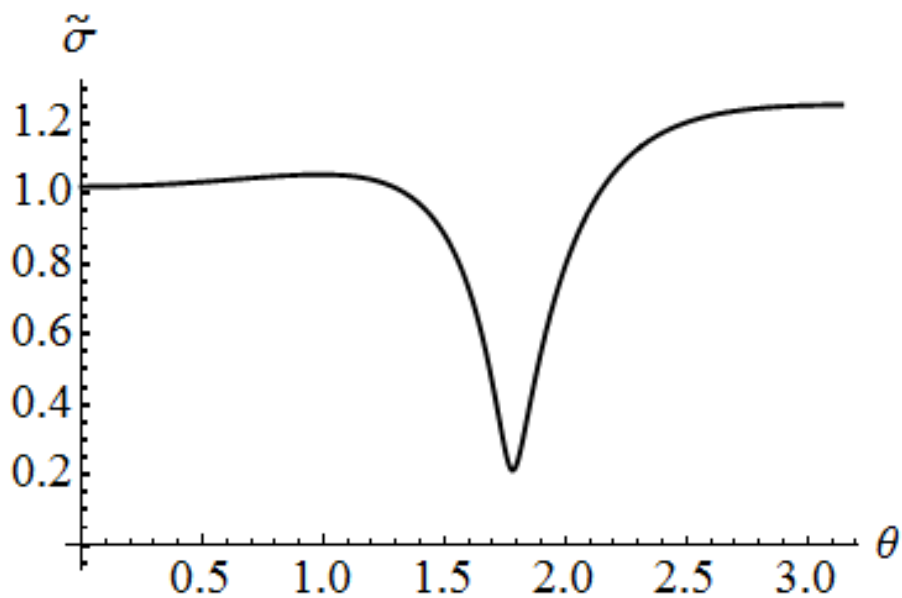


Рисунок 8 — График зависимости безразмерной поверхностной плотности заряда проводящей поверхности (30) от полярного угла при $\psi = 1, k_1 = 0.25, k_2 = 0.26$

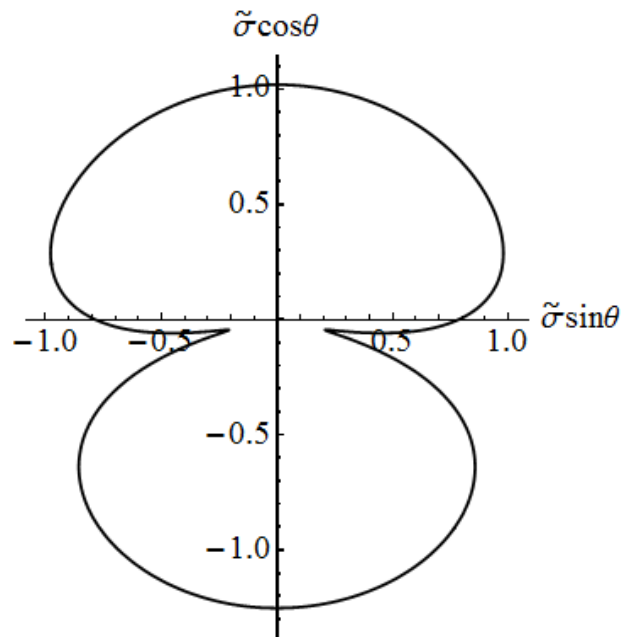


Рисунок 9 — Распределение заряда по поверхности (30) в разрезе при $\psi = 1, k_1 = 0.25, k_2 = 0.26$

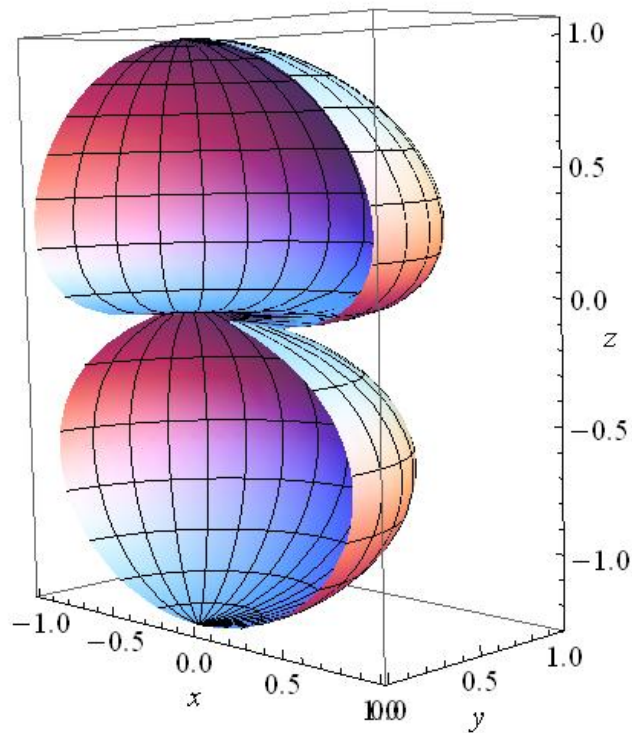


Рисунок 10 — 3D Распределение заряда по поверхности (30) в разрезе при $\psi = 1, k_1 = 0.25, k_2 = 0.26$

Расстояние от центра координат на данном графике до точек изображенной поверхности равно значению безразмерной поверхностной плотности заряда при соответствующих углах θ и φ .

1.6. Кривизна проводящей поверхности

Как известно, средняя кривизна H и гауссова кривизна K поверхности в некоторой точке задаются следующими формулами [34]:

$$\begin{cases} H = \frac{1}{2} \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} \\ K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \end{cases}, \quad (58)$$

где E, F, G, L, M, N определяются по следующим формулам

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\ F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \\ G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \\ L = \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}\right) + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}\right)}{\sqrt{EG - F^2}} \\ M = \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}\right) + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}\right)}{\sqrt{EG - F^2}} \\ N = \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}\right) + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}\right)}{\sqrt{EG - F^2}} \end{array} \right. \quad (59)$$

Представленные формулы соответствуют декартовой системе координат. В данной задаче рассматривается сферическая система координат, поэтому соответствие между декартовыми координатами и введенными безразмерными величинами определяется формулой (57), а также следующим соотношением

$$\begin{cases} r \rightarrow \xi \\ u \rightarrow \theta \\ v \rightarrow \phi \end{cases} \quad (60)$$

Исходя из изложенного выше, средняя и гауссова кривизны будут задаваться следующими выражениями:

$$\left\{ \begin{aligned} H &= \frac{0.5}{\sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial \theta}\right)^2 + \xi^2}} \left[\frac{\frac{\partial \xi}{\partial \theta} \cos \theta - \xi \sin \theta}{\xi \sin \theta} + \frac{\frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} \xi - 2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial \theta}\right)^2 - \xi^2}{\left(\frac{\partial \xi}{\partial \theta}\right)^2 + \xi^2} \right] \\ K &= \frac{\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} \xi - 2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial \theta}\right)^2 - \xi^2\right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial \theta} \cos \theta - \xi \sin \theta\right)}{\xi \sin \theta \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial \theta}\right)^2 + \xi^2\right)^2} \end{aligned} \right. \quad (61)$$

1.7. Графики для кривизны проводящей поверхности

На основе полученных аналитических выражений (61) были построены графики зависимости полной и гауссовой кривизны от полярного угла θ при значениях параметров $\psi = 1, k_1 = 0.25, k_2 = 0.26$, которые представлены на рисунках 11, 12. Также на рисунках 13, 14 представлены более наглядные графики зависимости безразмерной плотности заряда от средней и от гауссовой кривизны.

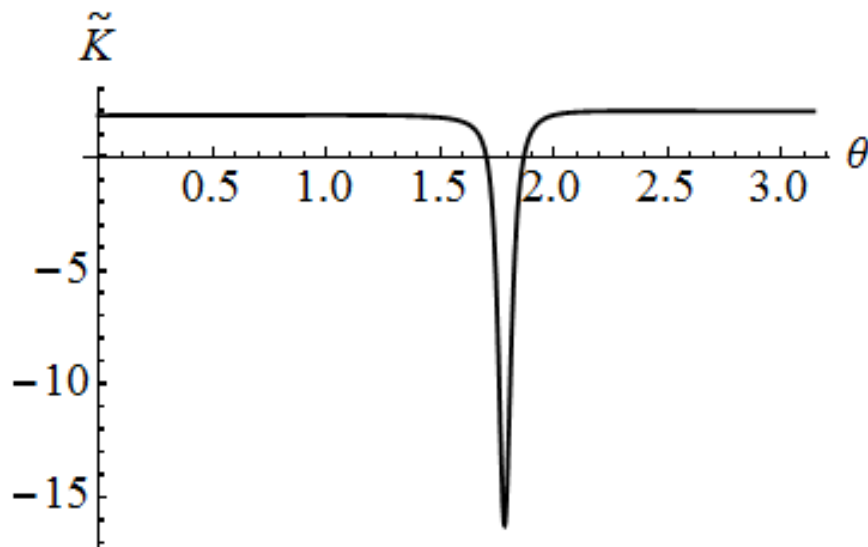


Рисунок 11 — График зависимости гауссовой кривизны поверхности (30) от полярного угла при $\psi = 1, k_1 = 0.25, k_2 = 0.26$

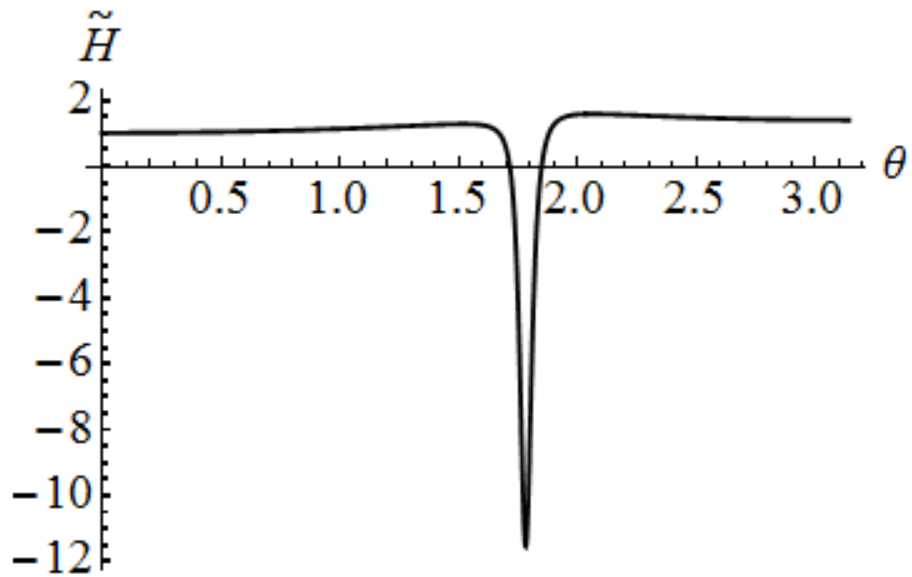


Рисунок 12 — График зависимости средней кривизны поверхности (30) от полярного угла при $\psi = 1, k_1 = 0.25, k_2 = 0.26$

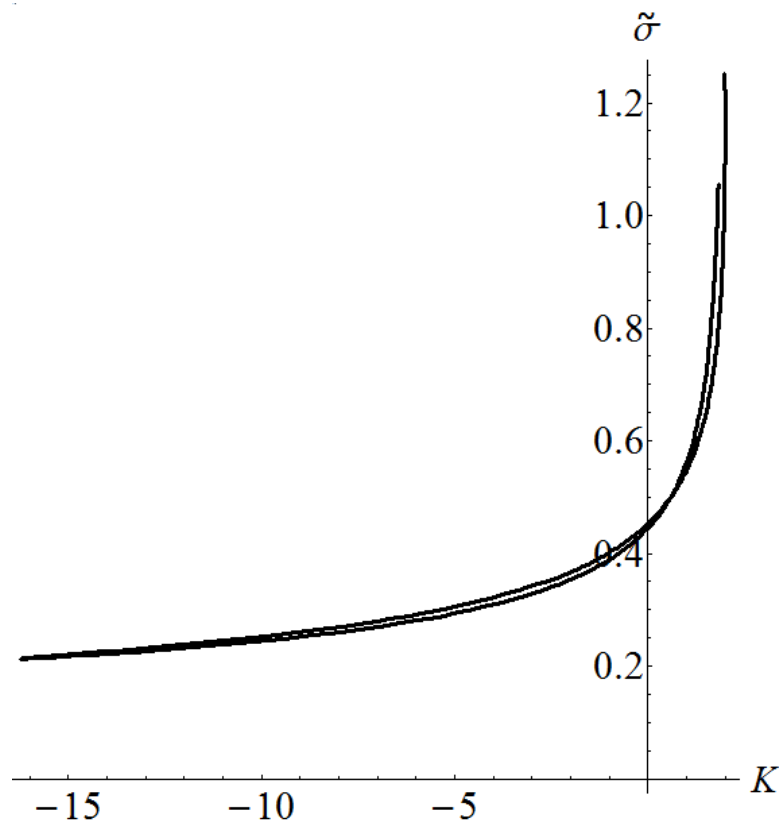


Рисунок 13 — График зависимости безразмерной поверхностной плотности заряда от гауссовой кривизны для поверхности (30) при $\psi = 1, k_1 = 0.25, k_2 = 0.26$

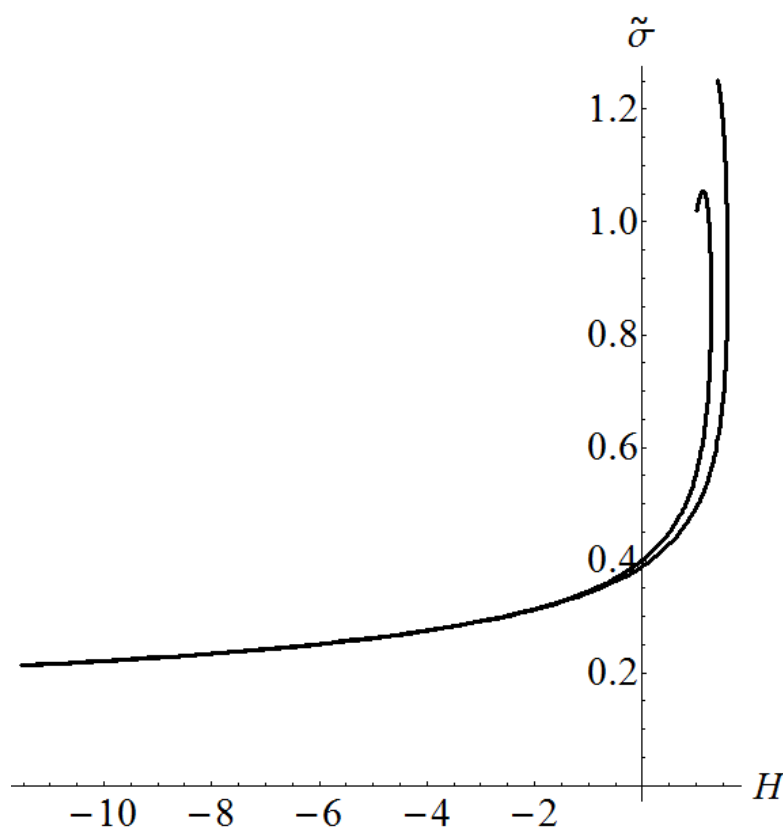


Рисунок 14 — График зависимости безразмерной поверхностной плотности заряда от средней кривизны для поверхности (30) при $\psi = 1, k_1 = 0.25, k_2 = 0.26$

1.8. Электроемкость проводящей поверхности

Введем обозначение для электроемкости сферы с радиусом r_0 по формуле

$$C_0 = \frac{r_0}{k}, \quad (62)$$

где $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, ϵ_0 — электрическая постоянная. Тогда безразмерную электроемкость замкнутой проводящей поверхности можно рассчитать следующим образом

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= \frac{C}{C_0} = \frac{q}{uC_0} = \frac{\oint \sigma dS}{uC_0} = \frac{\int_0^\pi \sigma r^2 \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi}{uC_0} = \frac{2\pi \int_0^\pi \tilde{\sigma} r^2 \sin\theta d\theta}{\psi u C_0} \\ &= \frac{2\pi \int_0^\pi \tilde{\sigma} \frac{q_0}{4\pi r_0^2} r^2 \sin\theta d\theta}{\psi \frac{k q_0 r_0}{k}} = \frac{1}{2\psi} \int_0^\pi \tilde{\sigma} \xi^2 \sin\theta d\theta \end{aligned}$$

$$\tilde{C} = \frac{1}{2\psi} \int_0^{\pi} \tilde{\sigma} \xi^2 \sin\theta d\theta \quad (63)$$

По представленной формуле можно рассчитать безразмерную емкость проводящей поверхности с помощью численного интегрирования. Значения емкости проводящей поверхности было рассчитано при трех выбранных наборах параметров, представленных ниже.

Первый случай: $\psi = 1, k_1 = 0.25, k_2 = 0.$

$$\tilde{C} = 0.9705997484296919$$

Второй случай: $\psi = 1, k_1 = 0, k_2 = 0.29.$

$$\tilde{C} = 0.931793435297963$$

Третий случай: $\psi = 1, k_1 = 0.25, k_2 = 0.26.$

$$\tilde{C} = 0.9239627097306179$$

ГЛАВА 2. ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОСТАТИКИ В ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ ПРОТЯЖЕННОГО ЗАРЯЖЕННОГО ПРОВОДЯЩЕГО ТЕЛА

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим протяженное замкнутое в сечении заряженное проводящее тело с произвольной поверхностью (см. рисунок 15). Можно получить однозначно определенное выражение для электростатического потенциала U , создаваемого этим заряженным телом в некоторой точке пространства, решая задачу Дирихле для уравнения Лапласа [1]:

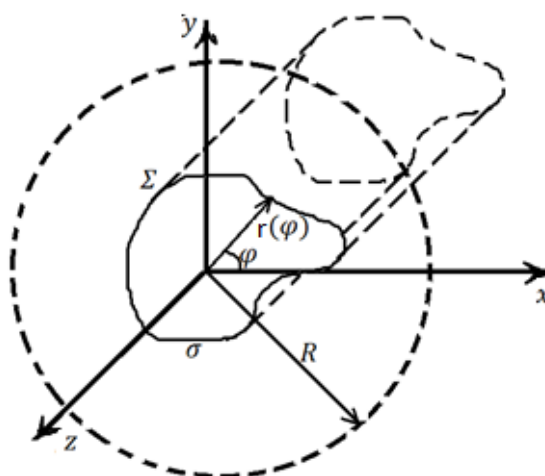


Рисунок 15 — Постановка задачи электростатики для протяженной замкнутой в сечении поверхности

$$\begin{cases} \Delta U = 0 \\ U|_{\Sigma} = U_{\Sigma} > 0 \\ U_{r \rightarrow \infty} = C \ln r + D' \\ U_{r=R} = 0 \quad (R \gg r) \end{cases} \quad (64)$$

где U_{Σ} — значение потенциала на поверхности самого проводника, C и D . — некоторые параметры.

Третье уравнение из данной системы обусловлено тем, что на достаточно большом расстоянии поле, создаваемое такой заряженной поверхностью, приближенно можно рассматривать как поле однородно заряженного бесконечного стержня с линейной плотностью заряда γ .

Четвертое уравнение системы (64) является условием нормировки потенциала.

Найдем параметры C и D , входящие в данную систему. Для этого рассмотрим поле данной поверхности на большом расстоянии от нее. Тогда, как было уже сказано выше, ее поле можно будет рассматривать как поле однородно заряженного бесконечного стержня с линейной плотностью заряда γ . Поэтому по теореме Гаусса (см. рисунок 16) получим:

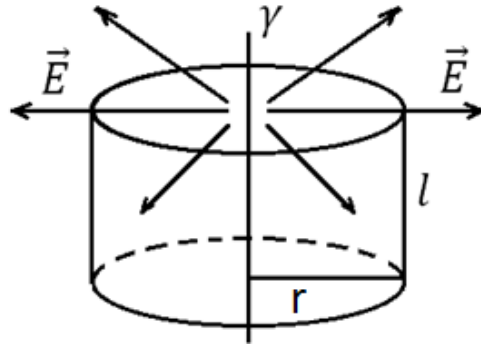


Рисунок 16 — Иллюстрация к теореме Гаусса

$$E \times 2\pi r l = \frac{\gamma l}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0 r} = E_r \quad (65)$$

$$E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} \Rightarrow U = -\frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \ln r + D \quad (66)$$

Как видно из данного уравнения и третьего уравнения системы (64)

$$C = -\frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \quad (67)$$

Далее, используя нормировку потенциала, получим следующее:

$$U_{r=R} = -\frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \ln R + D = 0 \quad (68)$$

$$D = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \ln R \quad (69)$$

Тогда третье уравнение системы (64) примет вид

$$U_{r \rightarrow \infty} = -\frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R} \quad (70)$$

Данное выражение является частным решением уравнения Лапласа для однородно заряженного проводящего цилиндра. Будем считать его частным решением поставленной задачи для рассматриваемой цилиндрической поверхности при $r \rightarrow \infty$.

Известно, что следующее выражение также является решением уравнения Лапласа в том случае, если рассматривается протяженная поверхность

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \quad (71)$$

Тогда линейная комбинация решений (70) и (71) тоже является решением уравнения Лапласа. Также мы имеем граничное условие — потенциал на поверхности проводника равен значению U_{Σ} . Запишем решение

$$\begin{cases} U(r, \varphi) = -\frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \\ U|_{\Sigma} = U_{\Sigma} > 0 \end{cases} \quad (72)$$

Рассматривая некоторые частные случаи этого решения при конкретных значениях n , можно получить новые аналитические решения задачи электростатики, а также проанализировать распределение электрического заряда по поверхности протяженного проводника в зависимости от кривизны его поверхности.

2.2. Уравнение поверхности

Рассмотрим частный случай, когда решение уравнения Лапласа представляется в следующем виде:

$$\begin{cases} U(r, \varphi) = -\frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R} + \frac{1}{r} A_1 \cos \varphi \\ U|_{\Sigma} = U_{\Sigma} > 0 \end{cases} \quad (73)$$

Тогда получим уравнение поверхности проводника:

$$\cos \varphi = \frac{\left(U_{\Sigma} + \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R} \right) r}{A_1} = \frac{\left(U_{\Sigma} + \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R} \right) \frac{r}{R}}{\frac{A_1}{R}} \quad (74)$$

Введем безразмерные величины:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{U_{\Sigma}R}{A_1}, a_1 > 0 \\ a_2 = \frac{\gamma R}{2\pi\epsilon_0 A_1}, a_2 > 0 \\ \xi = \frac{r}{R}, \xi > 0, \xi \ll 1 \end{cases} \quad (75)$$

Тогда уравнение поверхности проводника в безразмерных величинах примет следующий вид:

$$\cos \varphi = (a_1 + a_2 \ln x) \xi \quad (76)$$

2.3. Ограничения на безразмерные параметры

Рассмотрим некоторые ограничения на параметры, входящие в выражение (76). Как известно

$$-1 \leq \cos \varphi \leq 1 \quad (77)$$

Подставим уравнение (76) в условие (77)

$$-1 \leq (a_1 + a_2 \ln \xi) \xi \leq 1 \quad (78)$$

Рассмотрим условие

$$(a_1 + a_2 \ln \xi) \xi \leq 1 \quad (79)$$

Сделаем замену

$$y = \frac{1}{\xi}, y > 0, y \gg 1 \quad (80)$$

Тогда условие (79) примет следующий вид:

$$\frac{a_1}{a_2} - \frac{1}{a_2} y \leq \ln y \quad (81)$$

Данное неравенство должно выполняться для $y \gg 1$. Левая часть данного неравенства является монотонно убывающей функцией при $y > 0$. Правая часть данного неравенства является монотонно возрастающей при $y > 0$. В силу этих обстоятельств неравенство верно при $y \gg 1$. Значит, условие (79) не накладывает ограничений на безразмерные параметры.

Рассмотрим теперь условие

$$(a_1 + a_2 \ln \xi) \xi \geq -1 \quad (82)$$

Сделаем замену

$$y = \frac{1}{\xi}, y > 0, y \gg 1 \quad (83)$$

Тогда условие (82) примет следующий вид:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{1}{a_2} y \geq \ln y \quad (84)$$

Данное неравенство должно выполняться для $y \gg 1$. Построим графики для правой и левой частей данного неравенства (см. рисунок 17).

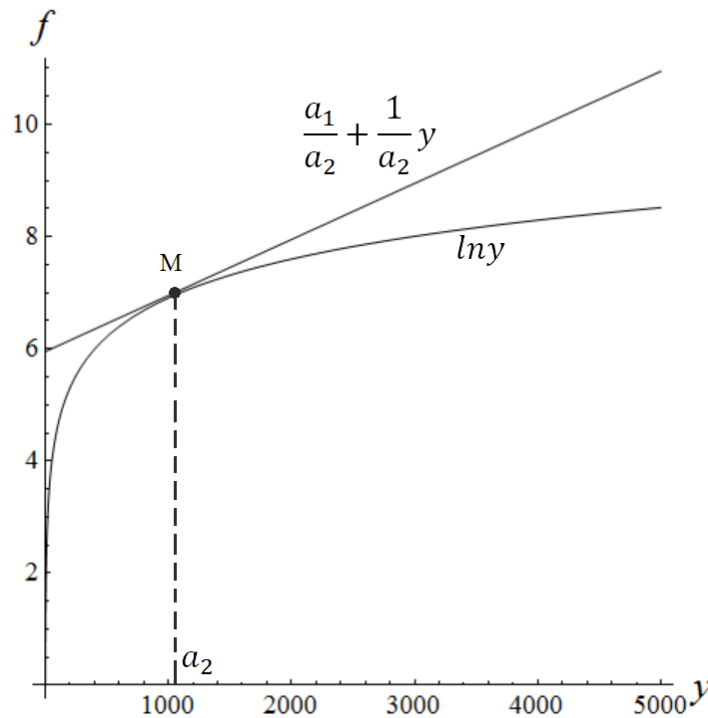


Рисунок 17 — Графики функций $\frac{a_1}{a_2} + \frac{1}{a_2} y$ и $\ln y$

Точка М — точка, в которой производные функций $\frac{a_1}{a_2} + \frac{1}{a_2} y$ и $\ln y$ равны. В данной точке значение функции $\frac{a_1}{a_2} + \frac{1}{a_2} y$ должно быть больше значения функции $\ln y$. Тогда неравенство (84) выполняется при любом значении y . Согласно изложенным выше соображениям в точке М должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} \frac{a_1}{a_2} + \frac{1}{a_2} y_M \geq \ln y_M \\ \left(\frac{d}{dy} \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{1}{a_2} y \right) \right)_{y=y_M} = \frac{d}{dy} (\ln y)_{y=y_M} \end{cases} \quad (85)$$

Решая данную систему уравнений, получим

$$\begin{cases} y_M = a_2 \\ a_1 \geq a_2(\ln a_2 - 1) \end{cases} \quad (86)$$

Окончательно для ограничений на параметры получим

$$a_1 \geq a_2(\ln a_2 - 1) \quad (87)$$

2.4. Безразмерная поверхностная плотность заряда

Далее рассмотрим поверхностную плотность заряда в различных точках на проводящей поверхности. Для этого рассчитаем проекции напряженности электрического поля:

$$\begin{cases} E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\left(-\frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} A_1 \cos \varphi\right) = \frac{A_1}{R^2} \left(\frac{\gamma R}{2\pi\epsilon_0 A_1} \frac{R}{r} + \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos \varphi\right) \\ E_\varphi = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r} \left(-\frac{1}{r} A_1 \sin \varphi\right) = \frac{A_1}{R^2} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sin \varphi \end{cases} \quad (88)$$

Используя выражения для безразмерных параметров, получим, что

$$\begin{cases} E_r = \frac{A_1}{R^2 \xi^2} (\cos \varphi + a_2 \xi) \\ E_\varphi = \frac{A_1}{R^2 \xi^2} \sin \varphi \end{cases} \quad (89)$$

Тогда модуль напряженности электрического поля определяется следующим образом:

$$\begin{cases} E_r = \frac{A_1}{R^2 \xi^2} (\cos \varphi + a_2 \xi) \\ E_\varphi = \frac{A_1}{R^2 \xi^2} \sin \varphi \\ E = \sqrt{E_r^2 + E_\varphi^2} \end{cases} \quad (90)$$

В итоге получим, что

$$E = \frac{A_1}{R^2 \xi^2} \sqrt{1 + 2a_2 \xi \cos \varphi + (a_2 \xi)^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (91)$$

Введем безразмерную поверхностную плотность заряда

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 A_1} \quad (92)$$

Тогда, подставляя (91) в (92), получим

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{\xi^2} \sqrt{1 + 2a_2 \xi \cos \varphi + (a_2 \xi)^2} \quad (93)$$

Подставляя (76) в (93), получим, что безразмерная поверхностная плотность заряда будет описываться следующей формулой:

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{\xi^2} \sqrt{1 + 2a_2(a_1 + a_2 \ln \xi) \xi^2 + (a_2 \xi)^2} \quad (94)$$

Таким образом, найдено новое аналитическое выражение для протяженной и замкнутой в сечении поверхности нетривиальной формы, удовлетворяющей задаче Дирихле. Также найдено аналитическое выражение, описывающее распределение заряда по поверхности этого проводника.

2.5. Безразмерная кривизна поверхности

Теперь вычислим кривизну проводящей поверхности в каждой ее точке. Известно, что для протяженной и замкнутой в сечении поверхности кривизна определяется следующим выражением [34]:

$$K = \frac{r^2 + 2\dot{r}^2 - r\ddot{r}}{(r^2 + \dot{r}^2)^{3/2}}, \quad (95)$$

где \dot{r} и \ddot{r} — первая и вторая производные r по φ . Используя введенные ранее безразмерные параметры, получим, что

$$K = \frac{\xi^2 + 2\dot{\xi}^2 - \xi\ddot{\xi}}{R(\xi^2 + \dot{\xi}^2)^{3/2}}, \quad (96)$$

где $\dot{\xi}$ и $\ddot{\xi}$ — первая и вторая производные ξ по φ . Введем безразмерную кривизну проводящей поверхности по следующей формуле:

$$\tilde{K} = KR = \frac{\xi^2 + 2\dot{\xi}^2 - \xi\ddot{\xi}}{(\xi^2 + \dot{\xi}^2)^{3/2}} \quad (97)$$

Как видно из данного выражения, для того, чтобы определить безразмерную кривизну необходимо знать значения производных $\dot{\xi}$ и $\ddot{\xi}$.

Продифференцируем уравнение поверхности (76) по φ , получим:

$$-\sin \varphi = (a_2 + a_1 + a_2 \ln \xi) \dot{\xi} \quad (98)$$

Следовательно

$$\dot{\xi} = -\frac{\sin \varphi}{a_2 + a_1 + a_2 \ln \xi} = -\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{a_2 + a_1 + a_2 \ln \xi} \quad (99)$$

Используя уравнение поверхности проводника (76), получим, что

$$\dot{\xi} = -\frac{\sqrt{1 - (a_1 + a_2 \ln x)^2 \xi^2}}{a_2 + a_1 + a_2 \ln \xi} \quad (100)$$

Теперь найдем вторую производную ξ по φ

$$\ddot{\xi} = \frac{d\dot{\xi}}{d\varphi} = \frac{d\dot{\xi}}{d\xi} \frac{d\xi}{d\varphi} = \frac{d\dot{\xi}}{d\xi} \dot{\xi} \quad (101)$$

Далее вычислим производную $\frac{d\dot{\xi}}{d\xi}$:

$$\frac{d\dot{\xi}}{d\xi} = \frac{\xi^2(a_1 + a_2 \ln \xi)((a_1 + a_2 \ln \xi)^2 + a_2(a_1 + a_2 \ln \xi) + a_2^2) + a_2}{\xi \sqrt{1 - \xi^2(a_1 + a_2 \ln \xi)^2} (a_2 + a_1 + a_2 \ln \xi)^2} \quad (102)$$

Тогда выражение для $\ddot{\xi}$ будет следующим:

$$\ddot{\xi} = -\frac{\xi^2(a_1 + a_2 \ln \xi)((a_1 + a_2 \ln \xi)^2 + a_2(a_1 + a_2 \ln \xi) + a_2^2) + a_2}{\xi(a_2 + a_1 + a_2 \ln \xi)^3} \quad (103)$$

В результате, подставляя (100) и (103) в (97), получим аналитическое выражение для безразмерной кривизны проводящей поверхности в каждой ее точке:

$$\tilde{K} = \frac{\xi^2 a_2 (a_2 + a_1 + a_2 \ln \xi)^2 + 2(a_1 + a_2 \ln \xi)(\xi^2 a_2^2 + 1) + 3a_2}{(\xi^2 a_2^2 + 2\xi^2 a_2 (a_1 + a_2 \ln \xi) + 1)^{3/2}} \quad (104)$$

2.6. Анализ полученных результатов

Таким образом, получены аналитические выражения для безразмерной поверхностной плотности заряда и для безразмерной кривизны, зависящие от

безразмерного радиус-вектора ξ . Теперь можно провести анализ зависимости безразмерной поверхностной плотности заряда от безразмерной кривизны.

Все анализы результатов проводились при следующих значениях параметров:

$$\begin{cases} a_1 = 5906 \\ a_2 = 1000 \end{cases} \quad (105)$$

Построение всех графиков производилось при следующем соответствии декартовых координат и введенных нами безразмерных величин

$$\begin{cases} x = \xi \cos \varphi \\ y = \xi \sin \varphi \end{cases} \quad (106)$$

На рисунке 18 приведено поперечное сечение проводящей поверхности.

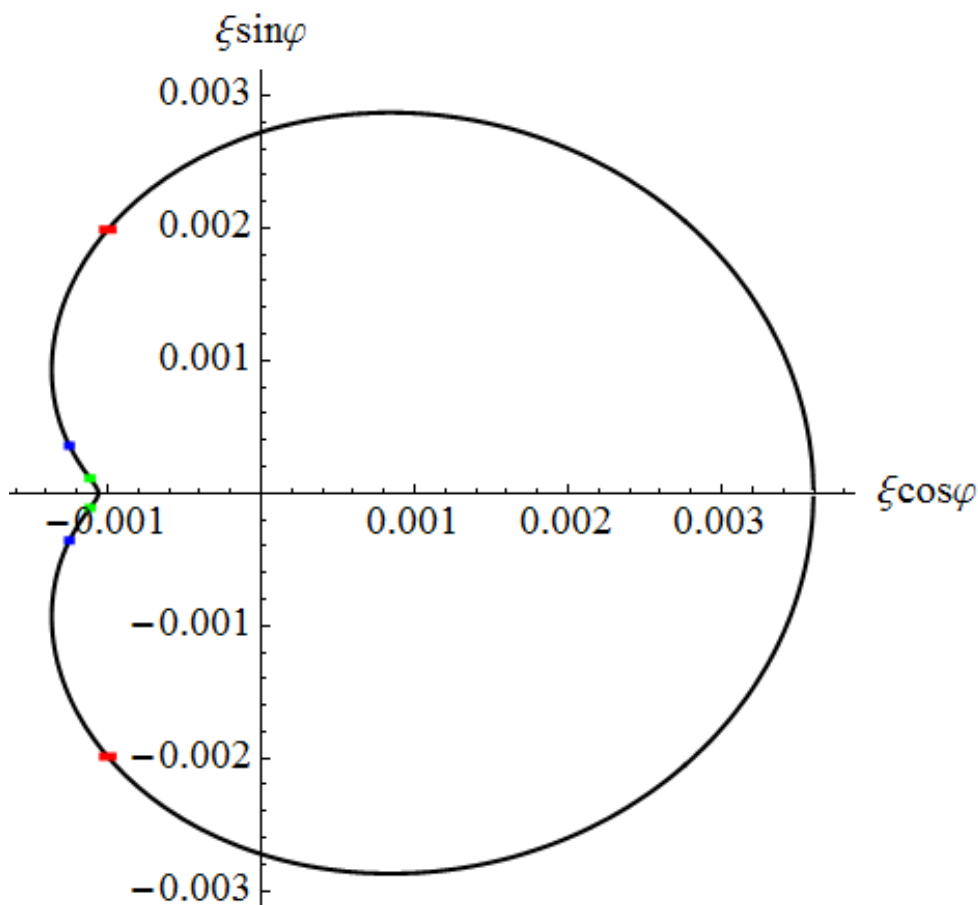


Рисунок 18 — Форма поверхности (76) в разрезе
На данном рисунке различным цветом отмечены особые точки:

Красным цветом отмечены точки, в которых максимальна безразмерная поверхностная плотность заряда; синим — точки, в которых максимальна безразмерная кривизна; зеленым — точки, в которых безразмерная кривизна равна нулю.

Поскольку безразмерная поверхностная плотность заряда и азимутальный угол зависят от безразмерного радиус-вектора ξ , то используя параметрическое построение, получим график зависимости безразмерной поверхностной плотности заряда от азимутального угла. Поскольку поверхность симметрична относительно оси x , то данный график можно представить в интервале $\varphi \in [0; \pi]$. Этот график представлен на рисунке 19.

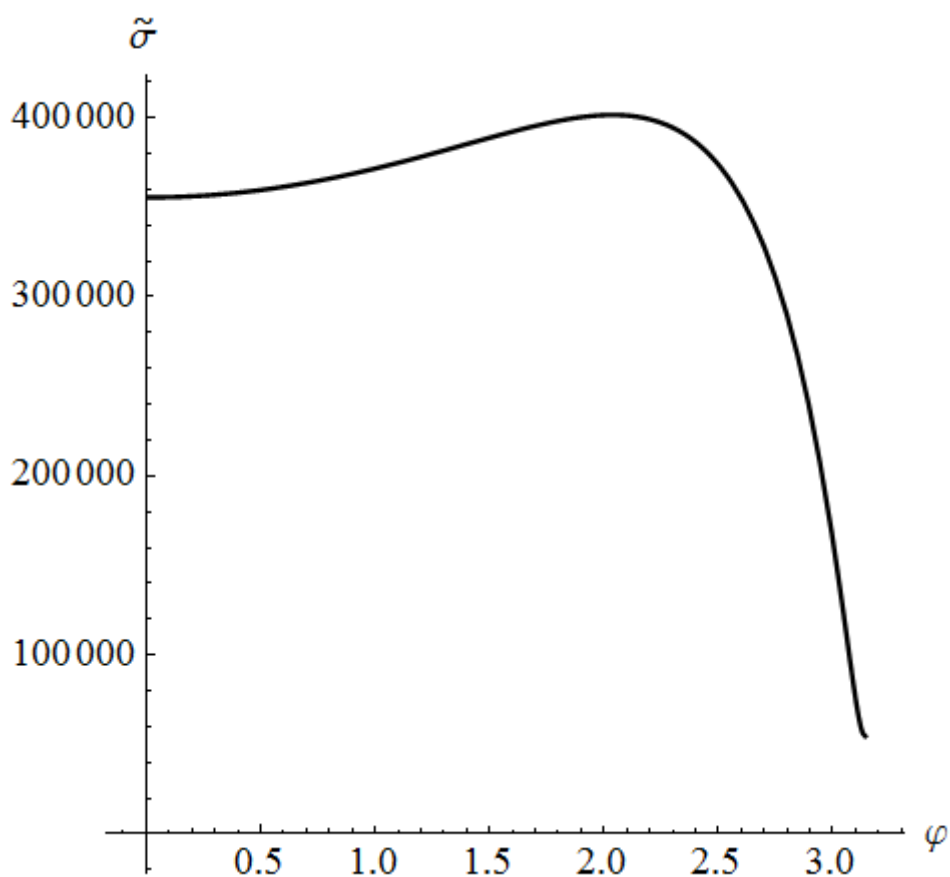


Рисунок 19 — График зависимости безразмерной поверхностной плотности заряда поверхности (76) от азимутального угла

Поскольку безразмерная кривизна и азимутальный угол зависят от безразмерного радиус-вектора ξ , то используя параметрическое построение, получим график зависимости безразмерной кривизны от азимутального угла.

Поскольку поверхность симметрична относительно оси x , то данный график можно представить в интервале $\varphi \in [0; \pi]$. Этот график представлен на рисунке 20.

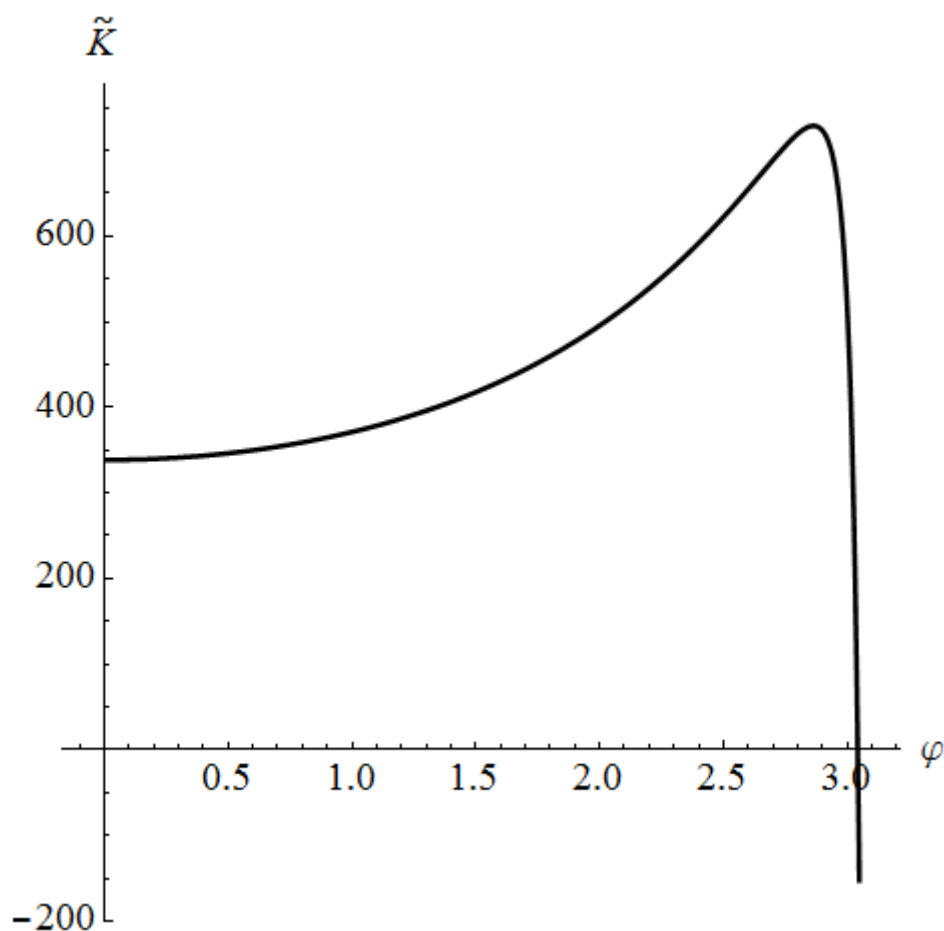


Рисунок 20 — График зависимости безразмерной кривизны поверхности (76) от азимутального угла

Из графиков зависимости безразмерной поверхностной плотности заряда и безразмерной кривизны от азимутального угла, а также рисунка 18 видно, что их максимальные значения достигаются при различных значениях азимутального угла φ . Это говорит о том, что безразмерная поверхностная плотность заряда не пропорциональна безразмерной кривизне, взятой в какой-либо степени. То есть выполняется следующее условие

$$\tilde{\sigma} \neq \alpha \tilde{K}^\beta, \quad (107)$$

где α и β — некоторые числа.

Для подтверждения данного высказывания на рисунке 21 приведен наглядный график зависимости безразмерной поверхностной плотности заряда от безразмерной кривизны.

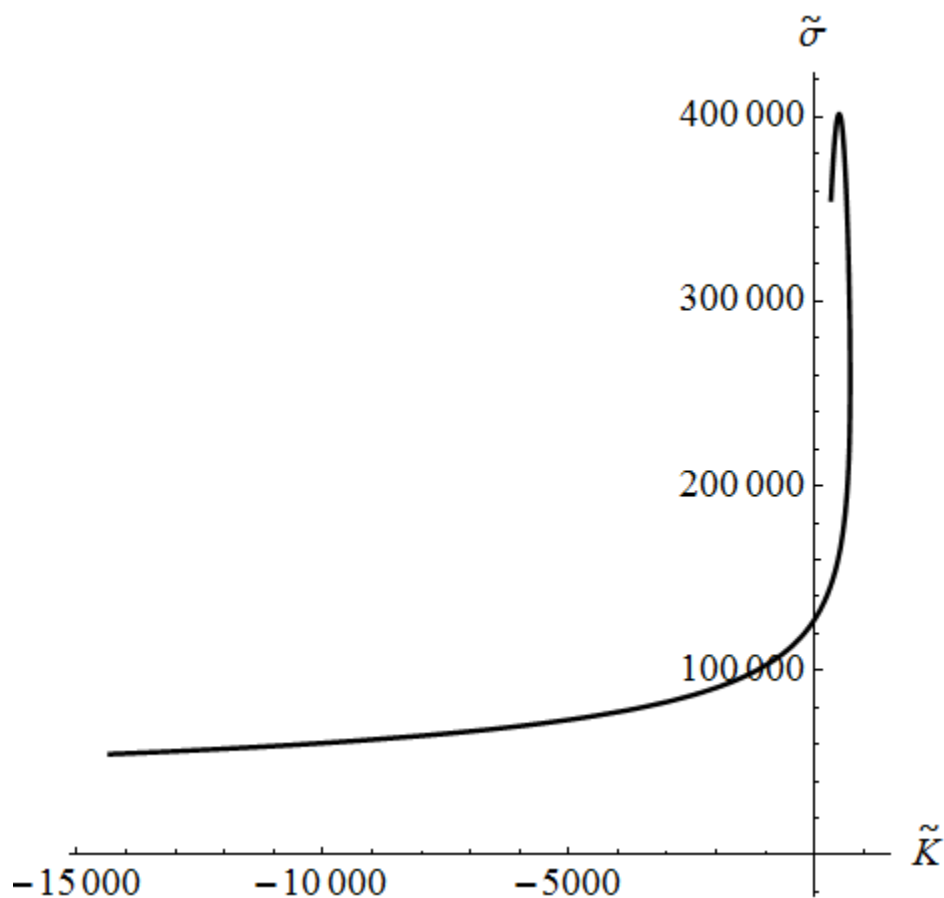


Рисунок 21 — График зависимости безразмерной поверхностной плотности заряда от безразмерной кривизны для поверхности (76)

Таким образом, распределение заряда по поверхности проводника не всегда однозначно определяется значениями локальной кривизны поверхности в ее точках. Видно, что имеются области, где одному и тому же значению кривизны поверхности соответствует два значения поверхностной плотности заряда.

ГЛАВА 3. ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОСТАТИКИ ПРОТЯЖЕННОГО ЗАРЯЖЕННОГО ПРОВОДЯЩЕГО ТЕЛА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

3.1. Уравнение поверхности

В данном случае постановка задачи полностью аналогична постановке задачи, рассмотренной в предыдущей главе, поэтому перейдем непосредственно к уравнению поверхности. Рассмотрим частный случай, когда решение представляется в следующем виде:

$$\begin{cases} U(r, \varphi) = -\frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R} + \frac{1}{r^n} A_n \cos n\varphi, n \in N \\ U|_{\Sigma} = U_{\Sigma} > 0 \end{cases} \quad (108)$$

Отсюда получим уравнение поверхности проводника:

$$\cos n\varphi = \frac{\left(U_{\Sigma} + \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R}\right) r^n}{A_n} = \frac{\left(U_{\Sigma} + \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R}\right) \left(\frac{r}{R}\right)^2}{\frac{A_n}{R^n}} \quad (109)$$

Введем безразмерные величины:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{U_{\Sigma} R^n}{A_n}, a_1 > 0 \\ a_2 = \frac{\gamma R^n}{2\pi\epsilon_0 A_n}, a_2 > 0 \\ \xi = \frac{r}{R}, \xi > 0, \xi \ll 1 \end{cases} \quad (110)$$

С учетом (110) уравнение поверхности проводника (109) в безразмерных величинах примет следующий вид:

$$\cos n\varphi = (a_1 + a_2 \ln \xi) \xi^n \quad (111)$$

3.2. Ограничения на безразмерные параметры

Рассмотрим некоторые ограничения на параметры, входящие в данное выражение. Как известно

$$-1 \leq \cos n\varphi \leq 1 \quad (112)$$

Подставим уравнение (111) в условие (112)

$$-1 \leq (a_1 + a_2 \ln \xi) \xi^n \leq 1 \quad (113)$$

Рассмотрим условие

$$(a_1 + a_2 \ln \xi) \xi^n \leq 1 \quad (114)$$

$$a_1 + a_2 \ln \xi \leq \frac{1}{\xi^n} \quad (115)$$

Сделаем замену

$$y = \frac{1}{\xi}, y > 0, y \gg 1 \quad (116)$$

Тогда условие примет следующий вид:

$$\frac{a_1}{a_2} - \frac{1}{a_2} y^n \leq \ln y \quad (117)$$

Данное неравенство должно выполняться для $y \gg 1$. Левая часть данного неравенства является монотонно убывающей функцией при $y > 0$. Правая часть данного неравенства является монотонно возрастающей при $y > 0$. В силу этих обстоятельств неравенство верно при $y \gg 1$. Значит, неравенство (114) не накладывает ограничений на безразмерные параметры.

Рассмотрим теперь условие

$$(a_1 + a_2 \ln \xi) \xi^n \geq -1 \quad (118)$$

$$a_1 + a_2 \ln \xi \geq -\frac{1}{\xi^n} \quad (119)$$

Сделаем замену

$$y = \frac{1}{\xi}, y > 0, y \gg 1 \quad (120)$$

Тогда условие примет следующий вид:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{1}{a_2} y^n \geq \ln y \quad (121)$$

Данное неравенство должно выполняться для $y \gg 1$. Построим графики для правой и левой части данного неравенства (см. рисунок 22).

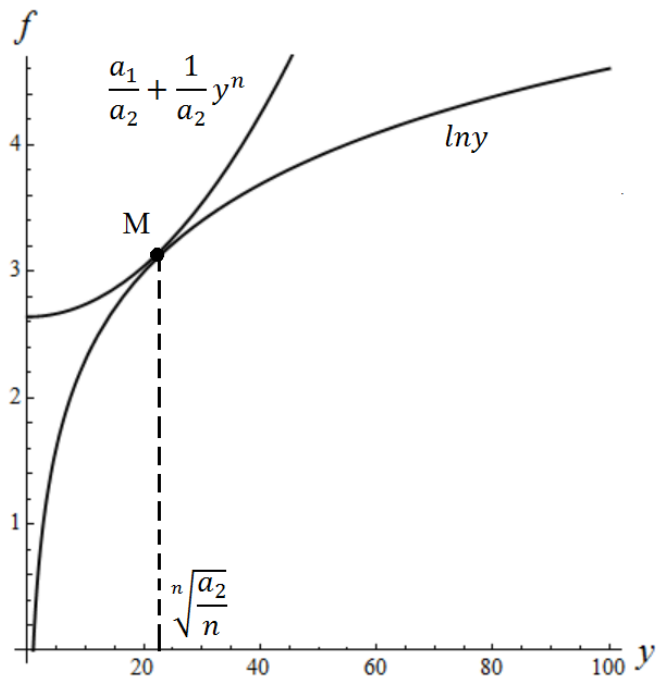


Рисунок 22 — Графики функций $\frac{a_1}{a_2} + \frac{1}{a_2} y^n$ и $\ln y$

Точка М — точка, в которой производные функций $\frac{a_1}{a_2} + \frac{1}{a_2} y^n$ и $\ln y$ равны. В данной точке значение функции $\frac{a_1}{a_2} + \frac{1}{a_2} y^n$ должно быть больше значения функции $\ln y$. Тогда неравенство (118) выполняется при любом значении y . По изложенным выше соображениям в точке М должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} \frac{a_1}{a_2} + \frac{1}{a_2} y_M^n \geq \ln y_M \\ \left(\frac{d}{dy} \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{1}{a_2} y^n \right) \right)_{y=y_M} = \frac{d}{dy} (\ln y)_{y=y_M} \end{cases} \quad (122)$$

Решая данную систему уравнений, получим

$$\begin{cases} y_M = \sqrt[n]{\frac{a_2}{n}} \\ a_1 \geq \frac{a_2}{n} \left(\ln \frac{a_2}{n} - 1 \right) \end{cases} \quad (123)$$

В итоге, ограничения, накладываемые на параметры, выглядят следующим образом:

$$a_1 \geq \frac{a_2}{n} \left(\ln \frac{a_2}{n} - 1 \right) \quad (124)$$

3.3. Безразмерная поверхностная плотность заряда

Далее рассмотрим поверхностную плотность заряда в различных точках на проводящей поверхности. Для этого рассчитаем проекции напряженности электрического поля:

$$\begin{cases} E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\left(-\frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} - \frac{n}{r^{n+1}} A_n \cos n\varphi\right) \\ E_\varphi = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r} \left(-\frac{1}{r^n} A_n \sin n\varphi\right) \end{cases} \quad (125)$$

Используя выражения для безразмерных параметров (110) при подстановке в (125), получим

$$\begin{cases} E_r = \frac{A_n}{R^{n+1}\xi^{n+1}} (n \cos n\varphi + a_2 \xi^n) \\ E_\varphi = \frac{nA_n}{R^{n+1}\xi^{n+1}} \sin n\varphi \end{cases} \quad (126)$$

Тогда модуль напряженности электрического поля определяется следующим образом:

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\varphi^2} = \frac{A_n}{R^{n+1}\xi^{n+1}} \sqrt{(n \cos n\varphi + a_2 \xi^n)^2 + n^2 \sin^2 n\varphi} \quad (127)$$

После некоторых преобразований получим, что

$$E = \frac{A_n}{R^{n+1}\xi^{n+1}} \sqrt{n^2 + 2a_2 \xi^n n \cos n\varphi + (a_2 \xi^n)^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (128)$$

Введем безразмерную поверхностную плотность заряда по формуле

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma R^{n+1}}{\epsilon_0 A_n} \quad (129)$$

Тогда при подстановке (128) в (129) получим, что

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{\xi^{n+1}} \sqrt{n^2 + 2a_2 \xi^n n \cos n\varphi + (a_2 \xi^n)^2} \quad (130)$$

Подставляя выражение для уравнения поверхности (111) в (130), получим, что безразмерная поверхностная плотность заряда будет описываться следующей формулой:

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{\xi^{n+1}} \sqrt{n^2 + 2a_2 n (a_1 + a_2 \ln \xi) \xi^{2n} + (a_2 \xi^n)^2} \quad (131)$$

Таким образом, найдено еще одно новое аналитическое выражение для протяженной и замкнутой в сечении поверхности нетривиальной формы, удовлетворяющей задаче Дирихле. Также найдено аналитическое выражение, описывающее распределение заряда по поверхности этого проводника.

3.4. Безразмерная кривизна поверхности

Аналогично пункту 2.5 получаем аналитическое выражение для безразмерной кривизны проводящей поверхности в каждой ее точке в следующем виде

$$\begin{aligned} \tilde{K} = & \frac{\xi^{2n} a_2 (a_2^2 + (3n + n^2) a_2 (a_1 + a_2 \ln \xi) + (3n^2 + n - 2) (a_1 + a_2 \ln \xi)^2)}{(\xi^{2n} a_2^2 + 2n \xi^{2n} a_2 (a_1 + a_2 \ln \xi) + 1 + (n^2 - 1) \xi^{2n} (a_1 + a_2 \ln \xi)^2)^{3/2}} + \\ & + \frac{(n^3 + n^2 - 2n) \xi^{2n} (a_1 + a_2 \ln \xi)^3 + (n^3 + n) (a_1 + a_2 \ln \xi) + (2n^2 - n + 2) a_2}{(\xi^{2n} a_2^2 + 2n \xi^{2n} a_2 (a_1 + a_2 \ln \xi) + 1 + (n^2 - 1) \xi^{2n} (a_1 + a_2 \ln \xi)^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (132)$$

3.5. Анализ полученных результатов

Проанализируем зависимость безразмерной поверхностной плотности заряда от безразмерной кривизны.

Все анализы результатов проводились при следующих значениях параметров:

$$\begin{cases} a_1 = 2607 \\ a_2 = 1000 \\ n = 2 \end{cases} \quad (133)$$

Построение графиков производилось при соответствии декартовых координат и введенных нами безразмерных параметров по формуле (106). На рисунке 23 приведено поперечное сечение проводящей поверхности.

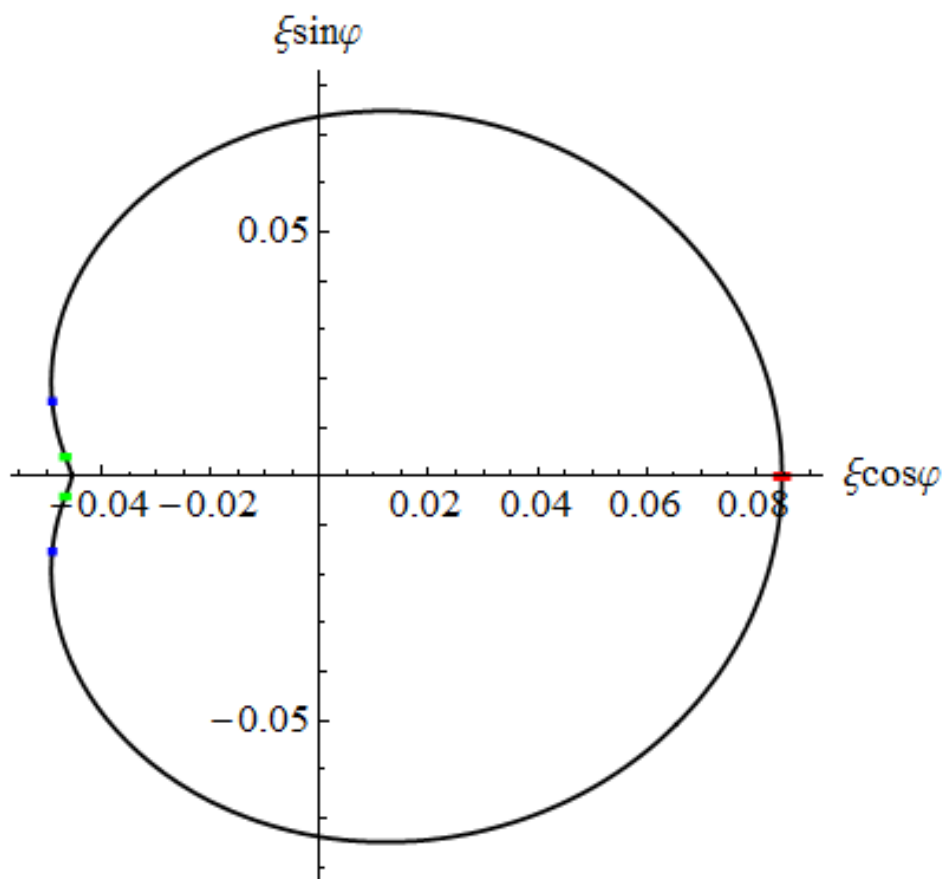


Рисунок 23 — Форма поверхности (111) в разрезе
 На данном рисунке различным цветом отмечены особые точки:

Красным цветом отмечены точки, в которых максимальна безразмерная поверхностная плотность заряда; синим — точки, в которых максимальна безразмерная кривизна; зеленым — точки, в которых безразмерная кривизна равна нулю.

Поскольку безразмерная поверхностная плотность заряда и азимутальный угол зависят от безразмерного радиус-вектора ξ , то используя параметрическое построение, получим график зависимости безразмерной поверхностной плотности заряда от азимутального угла. Поскольку поверхность симметрична относительно оси x , то данный график можно представить в интервале $\varphi \in [0; \pi]$. Этот график представлен на рисунке 24.

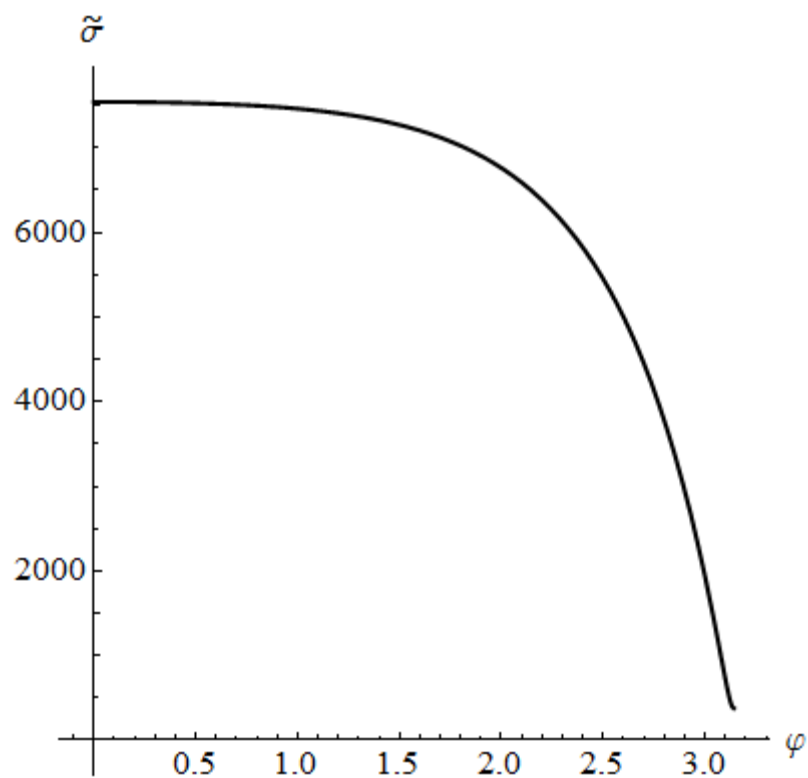


Рисунок 24 — График зависимости безразмерной поверхностной плотности заряда поверхности (111) от азимутального угла

Поскольку безразмерная кривизна и азимутальный угол зависят от безразмерного радиус-вектора ξ , то используя параметрическое построение, получим график зависимости безразмерной кривизны от азимутального угла φ . Поскольку поверхность симметрична относительно оси x , то данный график можно представить в интервале $\varphi \in [0; \pi]$. Этот график представлен на рисунке 25.

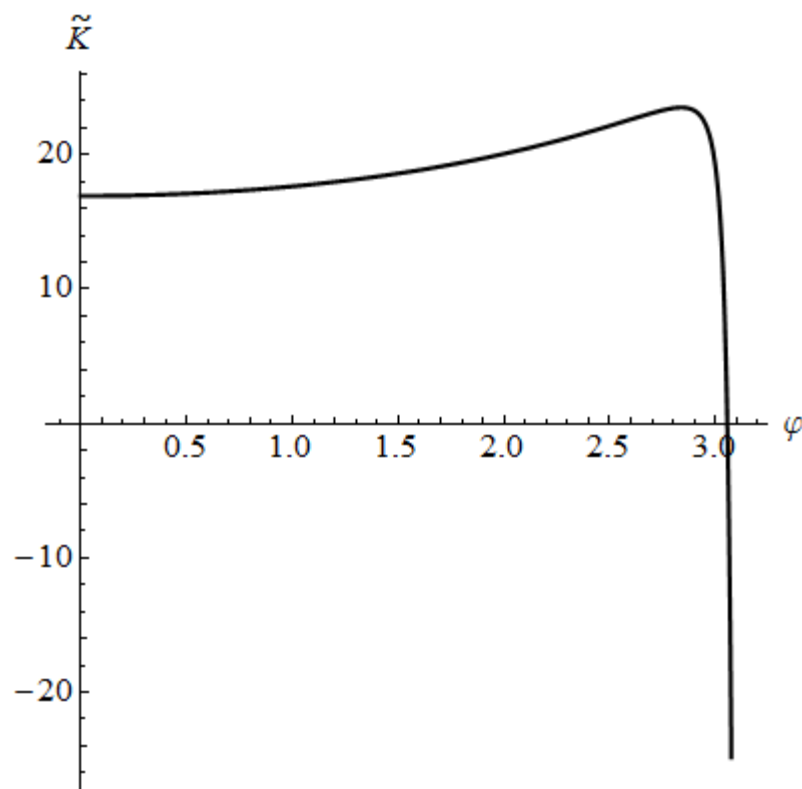


Рисунок 25 — График зависимости безразмерной кривизны поверхности (111) от азимутального угла

Как видно из графиков зависимости безразмерной поверхностной плотности заряда и безразмерной кривизны от азимутального угла, их максимальные значения достигаются при различных значениях азимутального угла. Это также наглядно видно из рисунка, на котором изображено поперечное сечение проводника. Это говорит о том, что безразмерная поверхностная плотность заряда не пропорциональна безразмерной кривизне, взятой в какой-либо степени. То есть справедливо следующее выражение

$$\tilde{\sigma} \neq \alpha \tilde{K}^\beta, \quad (134)$$

где α и β — некоторые числа.

Для подтверждения данного высказывания на рисунке 26 приведен наглядный график зависимости безразмерной поверхностной плотности заряда от безразмерной кривизны.

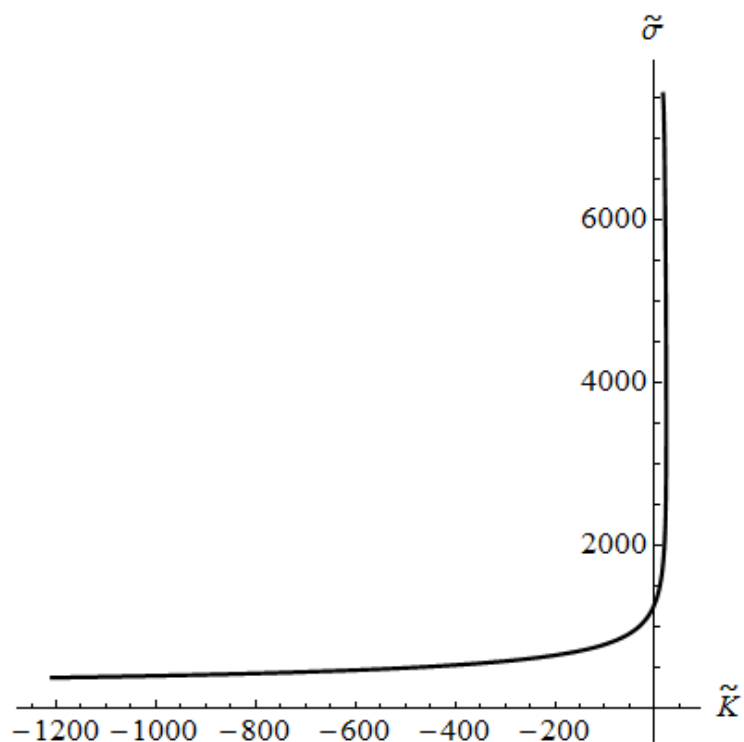


Рисунок 26 — График зависимости безразмерной поверхностной плотности заряда от безразмерной кривизны для поверхности (111)

Рассмотрим более детально ту часть графика, где кривизна положительна. Эта часть изображена на рисунке 27.

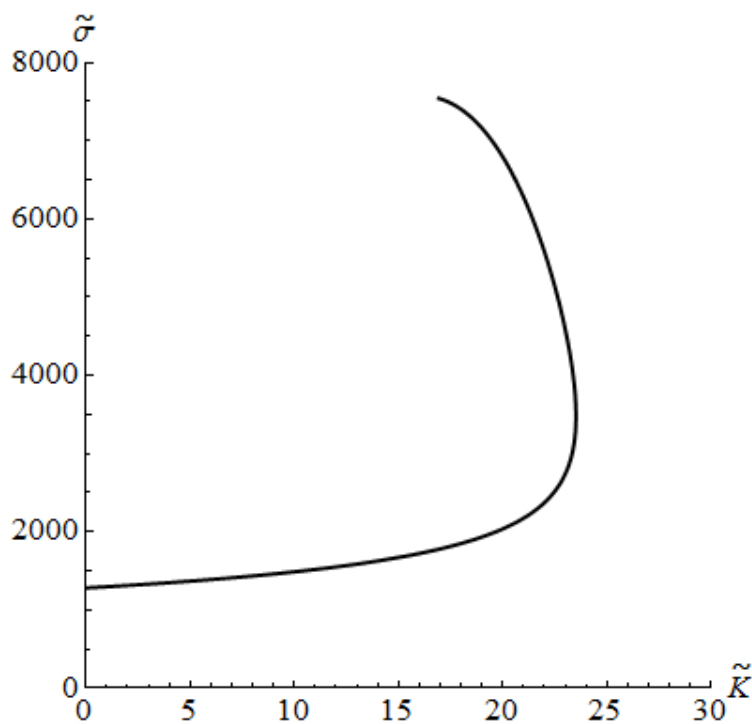


Рисунок 27 — График зависимости безразмерной поверхностной плотности заряда от безразмерной кривизны для поверхности (111) в области положительных значений безразмерной кривизны

Таким образом, распределение заряда по поверхности проводника не всегда однозначно определяется значениями локальной кривизны поверхности в ее точках. Оно носит сложный характер, и видно, что имеются области, где одному и тому же значению кривизны поверхности соответствует два значения поверхностной плотности заряда.

ВЫВОДЫ

На основании изложенного в данной диссертации материала можно сделать следующие выводы:

1. Рассмотренный в работе метод позволяет получить аналитические выражения, описывающие замкнутые проводящие поверхности с аксиальной симметрией, для которых возможно аналитическое решение задачи Дирихле.
2. Полученное с помощью данного метода решение для проводящих аксиально симметричных поверхностей обобщает ранее полученные более простые решения. Также было получено совершенно новое решение задачи электростатики для некоторого класса бесконечно протяженных поверхностей.
3. В решение входят некоторые безразмерные параметры, на которые должны быть наложены существенные ограничения. Эти ограничения связаны с тем, что поверхности, для которых было выбрано решение задачи Дирихле, должны быть замкнутыми и гладкими. Все ограничения были найдены в аналитическом виде и обобщают полученные ранее ограничения для более простых классов поверхностей.
4. Безразмерная поверхностная плотность заряда и безразмерная кривизна, как показано в работе на некоторых примерах, достигают своих максимумов в различных точках поверхности. Более того в некоторых случаях одному значению безразмерной кривизны соответствует два значения безразмерной поверхностной плотности заряда. Таким образом, было доказано, что зависимость безразмерной поверхностной плотности заряда от безразмерной кривизны не всегда имеет однозначный характер.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение данной работы еще раз перечислим основные результаты, полученные в диссертации:

1. Получены аналитические выражения, описывающие новый класс замкнутых проводящих поверхностей вращения, для которых возможно точное решение задачи электростатики. Стоит отметить, что подобные решения для частных случаев были получены ранее, однако данное решение обобщает их все и является более емким.
2. Найдено аналитическое решение задачи электростатики для бесконечно протяженных проводящих поверхностей.
3. Исследованы особенности распределения заряда по замкнутым проводящим поверхностям, аналитическое выражение для формы которых получено в данной диссертации. Показано, что в разных точках такой поверхности безразмерная поверхностная плотность заряда может принимать одно и то же значение.
4. Был проведен анализ зависимости безразмерной поверхностной плотности заряда от безразмерной кривизны. Ранее многими [24-27] предполагалось, что поверхностная плотность заряда в некоторой точке пропорциональна корню четвертой степени из кривизны поверхности в данной точке. Однако, как показано в работе на наглядных графиках зависимости безразмерной поверхностной плотности от безразмерной кривизны поверхности, данное соотношение не выполняется. Также безразмерная поверхностная плотность заряда и безразмерная кривизна, как показано в работе на некоторых примерах, достигают своих максимумов в различных точках поверхности. Более того в некоторых случаях одному значению безразмерной кривизны соответствует два значения безразмерной поверхностной плотности заряда. Таким образом, можно сказать, что поверхностная плотность заряда в некоторой точке проводящей поверхности не определяется лишь значением

кривизны поверхности в этой точке, а сложным образом зависит от формы всей проводящей поверхности целиком.

Дата

Диссертант

Научный руководитель:

Стока Г.П.

к.ф.-м.н. Н.Е. Русакова

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. John D. Jackson. Classical Electrodynamics, third ed. John Wiley & Sons. 1999.
2. E. Madelung. Mathematical Apparatus of Physics. Moscow. 1968.
3. Philip M. Morse, Herman Feshbach. Methods of Theoretical Physics, Part II. McGraw-Hill. 1953.
4. Wolfgang K.H. Panofsky, Melba Phillips. Classical Electricity and Magnetism, second ed. Addison-Wesley. 1962.
5. Julius A. Stratton. Electromagnetic Theory. A Classical Reissue. John Wiley&Sons. 2007.
6. Landau L.D. Electrodynamics of continuous media. Elsevier. 2013. Т. 8.
7. Smythe W. B. Static and dynamic electricity. 1988.
8. John Lekner. Analytical expression for the electric field enhancement between two closely-spaced conducting spheres. // Journal of Electrostatics. 68. 2010. p. 299-304.
9. Ping Zhu, Yi Jie Zhu. Distributions of potential and field on central axis line generated by elliptic ring uniformly charged // Journal of Electrostatics. 70. 2012. p. 25-30.
10. K. Kolikov, D. Ivanov, Y. Epitropov, S. Bozhkov. Electrostatic interaction between two conducting spheres. // Journal of Electrostatics. 70. 2012. p. 91-96.
11. Orion Ciftja. Calculation of the Coulomb electrostatic potential created by a uniformly charged square on its plane: exact mathematical formulas // Journal of Electrostatics. 71. 2013. p. 102-108.
12. D.V. Vagin, T.N. Gerasimenko, P.A. Polyakov. Exact analytical expression for magnetic field induction of rectangular shape sample // Mosc. Univ. Phys. Bull. 63(6). 2008. p. 422-424.
13. Ciftja O. Coulomb self-energy and electrostatic potential of a uniformly charged square in two dimensions // Physics Letters A. 2010. Т. 374. №. 7. p. 981-983.

14. Ciftja O. Electric potential of a uniformly charged square on its plane // European Journal of Physics. 2011. Т. 32. №. 6. p. 55.
15. Aghamohammadi A. Dimensional analysis and electric potential due to a uniformly charged sheet // European Journal of Physics. 2011. Т. 32. №. 3. p. 633.
16. Polyakov P. A., Rusakova N. E., Samukhina Y. V. New solutions for charge distribution on conductor surface // Journal of Electrostatics. 2015. Т. 77. p. 147-152.
17. Самухина Ю.В. Теоретическое исследование статического и динамического самосогласованного электромагнитного поля. Дисс. канд. физмат наук. МГУ. Москва. 2016
18. Поляков П.А., Русакова Н.Е., Самухина Ю.В. Электростатическая задача о возмущении капли проводящей жидкости // Сборник трудов 21-й Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». 2013.
19. Jiang Z. Electrostatic interaction of two unequal conducting spheres in uniform electric field // Journal of electrostatics. 2003. Т. 58. №. 3-4. p. 247-264.
20. Giuliani G. Vignale G. Quantum theory of the electron liquid. Cambridge university press. 2005.
21. Bernu B. Metal-insulator transition in the Hartree-Fock phase diagram of the fully polarized homogeneous electron gas in two dimensions // Physical Review B. 2008. Т. 78. №. 24. p. 245.
22. Ciftja O. Exact results for finite quantum Hall systems of electrons at filling factor one: Disk geometry // Journal of Mathematical Physics. 2011. Т. 52. №. 12. p. 122.
23. Akbar S., Lee I. H. Electron-electron interactions in square quantum dots // Physical Review B. 2001. Т. 63. №. 16. p. 165.
24. Enze L. The distribution function of surface charge density with respect to surface curvature // Journal of Physics D: Applied Physics. 1986. Т. 19. №. 1. p. 1.

25. Enze L. The application of a surface charge density distribution function to the solution of boundary value problems // *Journal of Physics D: Applied Physics*. 1987. T. 20. №. 12. p. 160.
26. Liu K. M. Relation between charge density and curvature of surface of charged conductor // *American Journal of Physics*. 1987. T. 55. №. 9. p. 849-852.
27. McAllister I. W. Conductor curvature and surface charge density // *Journal of Physics D: Applied Physics*. 1990. T. 23. №. 3. p. 359.
28. Bhattacharya K. On the dependence of charge density on surface curvature of an isolated conductor // *Physica Scripta*. 2016. T. 91. №. 3. p. 355.
29. Abraham M and Becker R. *The Classical Theory of Electricity and Magnetism* 2nd edn. London: Blackie and Son. 1950. p. 62
30. Lekner J. Axially symmetric charge distributions and the arithmetic–geometric mean // *Journal of Electrostatics*. 2009. T. 67. №. 6. p. 880-885.
31. Lekner J. Electrostatics of two charged conducting spheres // *Proc. R. Soc. a. The Royal Society*. 2012. p. 133.
32. Lekner J. Electrostatic calibration of sphere–sphere forces // *Measurement Science and Technology*. 2012. T. 23. №. 8. p. 85.
33. Lekner J. Capacitance coefficients of two spheres // *Journal of Electrostatics*. 2011. T. 69. №. 1. p. 11-14.
34. M. Abramovitz, I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Dover Publications. New York. 1964.