

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

**«РАЗВИТИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ И ТЕОРЕТИЧЕСКИХ
МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧ
МАГНИТОСТАТИКИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ»**

Выполнил студент
группы 205м
Шевцов В.С.

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Поляков П.А.

Допущена к защите _____

Зав. кафедрой _____

Москва

2018 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПОЛОСКОВЫХ ПРОВОДНИКАХ	6
1.1. Теоретическое исследование магнитных явлений в плоских проводниках.....	7
1.2. Экспериментальное исследование магнитного поля полосковых проводников с помощью датчика Холла	10
1.3. Экспериментальное исследование магнитного поля полосковых проводников с помощью магниторезистивного градиометра.....	17
2. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ОДНОРОДНО НАМАГНИЧЕННОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА	21
2.1. Параллелепипед, намагниченный однородно вдоль ребра	21
2.2. Параллелепипед, намагниченный под произвольным углом.....	22
3. ЭНЕРГИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КУБИЧЕСКИХ МАГНИТОВ	27
3.1. Два кубических магнита в плоскости	28
3.2. Сравнение с дипольной конфигурацией	31
4. МАГНИТНАЯ ЛОКАЦИЯ	33
4.1. Численные методы решения.....	36
4.2. Аналитическое решение задачи	40
4.3. Экспериментальная реализация метода магнитной локации.....	42
4.4. Экспериментальные результаты.....	47
4.5. Новый метод измерения магнитных полей.....	48
ВЫВОДЫ.....	52
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	54
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	56

ВВЕДЕНИЕ

Все устройства микроэлектроники, радиоэлектроники и электротехники представляют собой микрочипы, которые управляются системой полосковых проводников различной формы [1–2]. Примерами могут послужить материнские платы, карты памяти, чипы банковских карт и т.д. Вследствие сложной структуры токов, протекающих в проводниках, порождаемое магнитное поле имеет нетривиальное распределение.

Одной из важных задач микроэлектроники является своевременное обнаружение дефектов в печатных платах. Дефект может представлять собой микротрещину, что существенно затруднит его обнаружение, так как ток по такому проводнику все же будет передаваться. Однако, ввиду увеличения плотности тока в области дефекта, будет возникать неоднородность в распределении магнитного поля. В настоящей работе исследуется возможность фиксирования таких неоднородностей при помощи датчиков магнитного поля с целью тестирования печатных плат.

Известно всего несколько нетривиальных примеров намагниченных тел, для которых магнитное поле может быть представлено в аналитическом виде. Среди таких примеров задача об однородно намагниченном эллипсоиде и его предельных случаях (шар, бесконечный цилиндр, плоскость) [3]. Также известны аналитические формулы для вычисления поля однородно намагниченного вдоль ребра прямоугольного параллелепипеда [4–5]. В данной работе получено аналитическое решение для магнитного поля параллелепипеда, намагниченного под углом к граням.

В настоящее время активно развиваются направления физики магнитных наноструктур, такие как атомно-силовая, магнитно-силовая и сканирующая туннельная микроскопии. Благодаря этому особую актуальность приобрела проблема создания новых структурированных магнитных материалов из микро- и наночастиц различной конфигурации посредством самосборки, а также под управлением внешнего магнитного поля [6].

Одной из наиболее сложных и важных задач проектирования таких систем, как статоры электродвигателей, магнитные втулки, микроскопические двигатели и т.д. является вычисление коллективного магнитного поля, обусловленного системой магнитных зерен, и энергии их взаимодействия, так как равновесная структура определяется минимумом результирующей магнитной энергии ансамбля таких частиц. Обычно при теоретическом моделировании таких систем используются различные приближенные методы, в частности метод крупных частиц [7]. Однако данные методы могут давать значительные ошибки.

Расчет энергии взаимодействия зерен в общем случае представляет крайне сложную задачу, которую удалось существенно упростить для случая взаимодействия кубических магнитов. В данной работе представлен расчёт энергии взаимодействия таких магнитов на основе аналитических формул, полученных ранее, а также проведено сравнение с аналогичной дипольной конфигурацией.

Задача об определении положения, формы, размеров и природы источника магнитной неоднородности по известным значениям магнитного поля в некоторых точках пространства (магнитная локация) относится к классу обратных задач магнитостатики. Решение такой задачи чрезвычайно важно для многих прикладных задач в области медицины [8–12], безопасности [13] и т.д.

Однако, реализация метода магнитной локации осложнена рядом факторов. Во-первых, указанная задача не имеет точного решения ввиду наличия погрешностей при определении значений магнитного поля. В связи с этим требуется сложный анализ для выбора наиболее вероятного решения. Во-вторых, быстрое убывание магнитного поля приводит к тому, что даже на относительно небольших расстояниях от источника магнитной неоднородности требуется измерение очень слабых полей с высокой точностью, что создает дополнительные технические трудности.

В данной работе продемонстрирована возможность успешной работы метода 3-хмерной магнитной локации с использованием 9 и 12 датчиков. Были уверенно определены координаты диполя и проекции его магнитного момента с

минимальной теоретически возможной погрешностью во всей области чувствительности используемых датчиков, которая составляла 2.6 мЭ. В случае определения положения диполя с магнитным моментом $2.81 \text{ А} \cdot \text{м}^2$, объем области чувствительности составил $1 \times 1 \times 1 \text{ м}$. Вне данной области создаваемое объектом поле находится за пределами чувствительности датчиков. В пределах указанной области не было сбоев, и положение объекта, а также его ориентация, определялись с высокой точностью.

Указанный успех был обусловлен бóльшим количеством точек измерения, по сравнению с известными на данный момент работами [8–13], эффективным математическим алгоритмом обработки результатов, а также новыми возможностями современных технологий. В частности, были использованы магниторезистивные датчики, изготовленные на высокотехнологичном оборудовании, обладающие встроенным высокоразрядным АЦП. Применение современных технологий 3D-печати позволило добиться высокой точности позиционирования и ориентирования датчиков друг относительно друга, а имеющаяся конструкция микросхемы дала возможность усовершенствования механизмов крепления датчиков. Наконец, впервые была разработана и реализована эффективная высокоскоростная система одновременной обработки цифровых сигналов с 12 датчиков для задач магнитной локации.

1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПОЛОСКОВЫХ ПРОВОДНИКАХ

Исследование распределения магнитных полей в таких системах является очень важной задачей, так как магнитное поле одного полоскового проводника может влиять на элемент другого проводника [14], вследствие чего возникает необходимость в определении величины этого поля, его локализации и т.п. Задачи о распределении тока в полосковых проводниках и генерируемого им магнитного поля в основном решаются с помощью готовых пакетов программ [15–17]. Среди них присутствуют как коммерческие, такие как ANSYS, COMSOL Multiphysics, Dynaflow и т.д., так и свободно распространяемые, в числе которых GetDP или FreeFEM++. Данный подход имеет свои минусы, так как, зачастую, готовый пакет не может учесть всех тонкостей конкретной проблемы и не дает максимально эффективного ее описания, что проиллюстрировано в работе [18].

Магнитное поле системы проводников может быть также рассчитано аналитическими методами. Эта задача является намного более сложной, однако аналитическое решение относительно свободно от задания конкретных значений параметров проводников исследуемой системы, в отличие от численного решения, что делает его более доступным для анализа. В работе [19], например, было изучено распределение магнитного поля электродвигателя со специфической геометрией зубцов. Метод конформных преобразований позволил аналитическими средствами получить распределение магнитного поля. В работе [20] рассмотрена возможность применения метода поверхностных интегральных уравнений для расчета магнитного поля постоянного тока над вытянутыми приводящими трехмерными объектами. Также существует класс задач, в которых производится определение распределения тока в полосковых проводниках по измеренному распределению вертикальной проекции магнитного поля [21].

Приведенные выше работы охватывали лишь теоретическое изучение проблемы распределения магнитного поля, их подтверждение на практике является еще более сложной экспериментальной задачей. Существуют работы, в которых представлены устройства для точного измерения магнитного поля в различных проекциях, основанные на датчиках Холла [22], а также проведены измерения с помощью усовершенствованных магниторезистивных датчиков для медицинских задач [23].

Одной из целей данной работы является использование подобных датчиков для тестирования печатных плат и других полупроводниковых микросхем. Очень часто, например, при работе ПК на материнской плате возникают сбои [24]. Эти сбои могут быть, в том числе, обусловлены тем, что произошло повреждение в полосковой линии (образовалась трещина или иная неоднородность). Причем эта неоднородность может быть приобретённой в процессе эксплуатации, а может быть незамеченной при изготовлении самого устройства. При этом ток по полосковым проводникам передается, но происходят некоторые искажения, что может в определенных условиях приводить к сбоям в работе этого устройства. Поэтому нахождение мест, где данная полосковая линия печатной платы или микросхемы обладает дефектом, является важной задачей микроэлектроники.

1.1. Теоретическое исследование магнитных явлений в плоских проводниках

Вообще говоря, решение задачи о распределении плотности тока в модели полоскового проводника, изогнутого под различными углами, приводит к сингулярности, т.е. $j \rightarrow \infty$ в области внутреннего угла. Эта сингулярность была устранена с помощью процедуры сглаживания, разработанной в работе [25], что позволило получить конечные значения плотности тока в указанных областях.

Для расчета магнитного поля проводников был использован закон Био-Савара-Лапласа [26]:

$$\vec{H}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{c} \int_S \frac{[\vec{j}, \vec{R}]}{R^3} dx dy, \quad (1)$$

где $\vec{R} = (\xi - x, \eta - y, \zeta)$, ξ, η, ζ — координаты точки наблюдения, x и y — переменные интегрирования.

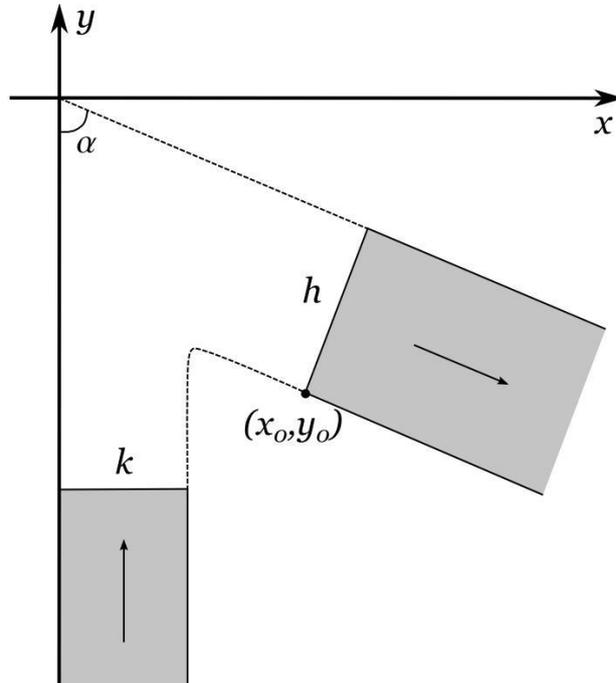


Рисунок 1 - Выделение конечной области для численного интегрирования в проводнике, изогнутого под произвольным углом.

Взять этот интеграл аналитически не представляется возможным, поэтому интегрирование велось численно по конечной области проводника, границы которой выбирались так, чтобы ток через них мог считаться однородным (рисунок 1). Затем к полученному результату были добавлены поля полубесконечных полос с равномерным распределением тока.

Из-за наличия скруглений и достаточно сложной формы проводника разумно перейти от интегрирования по области z к интегрированию по области z_1 (рисунок 2). В этом случае конечная область рассматриваемого проводника соответствует прямоугольнику в новых координатах.

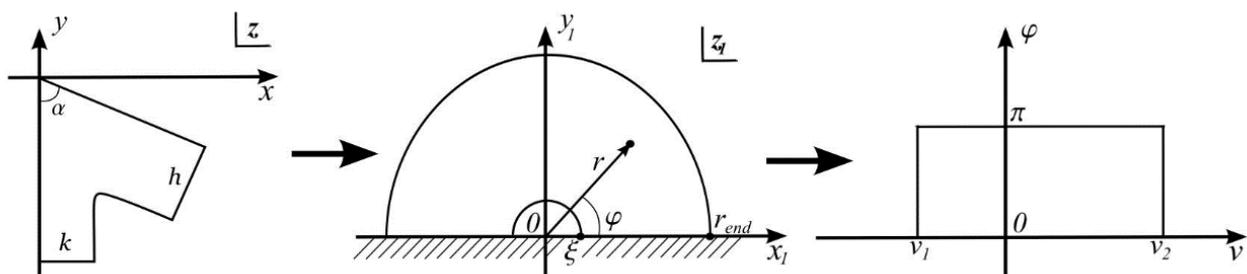


Рисунок 2 - Преобразование области интегрирования.

Якобиан перехода от области z к области z_1 имеет вид:

$$|J(x_1, y_1)| = \left| \frac{\partial x}{\partial x_1} \frac{\partial y}{\partial y_1} - \frac{\partial x}{\partial y_1} \frac{\partial y}{\partial x_1} \right|. \quad (2)$$

Поскольку область z получена из области z_1 конформным преобразованием, и функция z аналитична, справедливы условия Коши-Римана [27–28]:

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = \frac{\partial y}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial x}{\partial y_1} = -\frac{\partial y}{\partial x_1}, \quad (3)$$

из которых следует, что

$$|J(x_1, y_1)| = \left| \left(\frac{\partial x}{\partial x_1} \right)^2 - \left(\frac{\partial x}{\partial y_1} \right)^2 \right| = \left| \frac{dz}{dz_1} \right|^2. \quad (4)$$

Переход от x_1, y_1 к v, φ осуществляется следующим образом:

$$dx_1 dy_1 = r dr d\varphi = r^2 dv d\varphi. \quad (5)$$

С учетом того, что $r^2 = |z_1|^2$, якобиан преобразования принимает форму:

$$|J(v, \varphi)| = \left| z_1 \frac{dz}{dz_1} \right|^2 = \frac{A^2}{j^2(v, \varphi)}, \quad (6)$$

поэтому окончательно магнитное поле участка проводника можно записать в виде:

$$\vec{H}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{c} \int_{v_1}^{v_2} \int_0^\pi \frac{[\vec{j}(v, \varphi), \vec{R}(v, \varphi)]}{R^3(v, \varphi)} \frac{A^2}{j^2(v, \varphi)} dv d\varphi, \quad (7)$$

где A — константа, зависящая от величины протекающего тока и линейных размеров проводника.

Этот интеграл далее рассчитывается численно с помощью формулы Симпсона для кратных интегралов [29].

1.2. Экспериментальное исследование магнитного поля полосковых проводников с помощью датчика Холла

Рассмотрим полосковую линию, в которой образовалась трещина. Вблизи этой трещины будет возникать область с более высокой плотностью тока по сравнению с удаленными прямолинейными участками, что может приводить к сбою. Эта неоднородность влечет за собой создание неоднородного магнитного поля, в первом приближении, дипольного типа, которое быстро убывает с расстоянием. Зафиксировать эту неоднородность возможно только на относительно небольшом расстоянии с помощью датчиков магнитного поля. В качестве одного из претендентов на роль системы измерения выступает датчик Холла.

Стандартные датчики Холла обладают чувствительностью порядка 15 Э. При использовании дополнительных устройств, таких как концентраторы [30], можно добиться точности до 0.1 Э. Величина магнитного поля плоских проводников реальных плат существенно меньше чувствительности датчика, а линейный размер этих проводников меньше эффективного размера датчика Холла, который имеют порядок 1–2 мм. Поэтому на микроскопических шинах датчики Холла могут не зафиксировать неоднородность. В этом случае мы можем взять проводник большего размера (к примеру, шириной 1 см) и, проделав выемки, подобные дефектам на микроскопических шинах, исследовать распределение магнитного поля этого проводника датчиком Холла. В дальнейшем, по результатам этих измерений, используя принцип подобия, можно будет предсказать распределение магнитного поля микроскопических проводников.

Установка для измерения магнитного поля с помощью датчика Холла выглядит следующим образом:

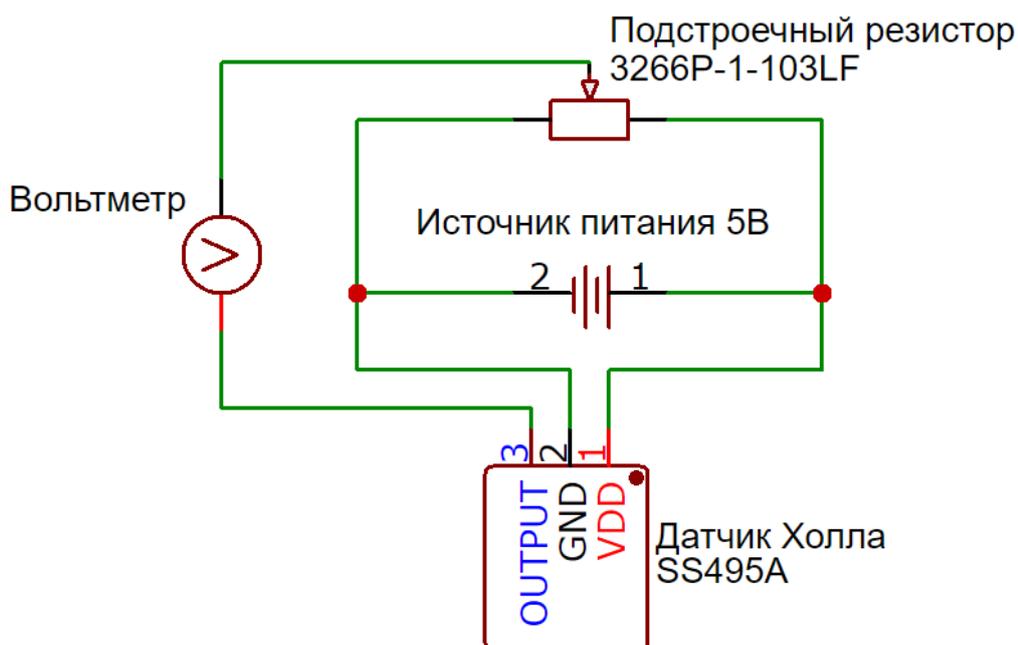


Рисунок 3 - Схема установки для измерения магнитного поля с помощью датчика Холла.

С целью калибровки датчика Холла была изготовлена катушка длиной $L = 14$ см, которая имела $N = 124$ витка. Датчик помещался внутрь катушки, где поле можно считать однородным. Модуль вектора напряженности магнитного поля H внутри катушки рассчитывается по формуле:

$$H = \frac{4\pi N}{c L} I, \quad (8)$$

где I — сила тока, протекающего по катушке. Таким образом, получаем линейную зависимость напряженности магнитного поля от силы тока, что позволяет нам откалибровать напряжение, выдаваемое датчиком Холла, по величине внешнего поля. На рисунке 4 представлена схема установки для калибровки датчика Холла.

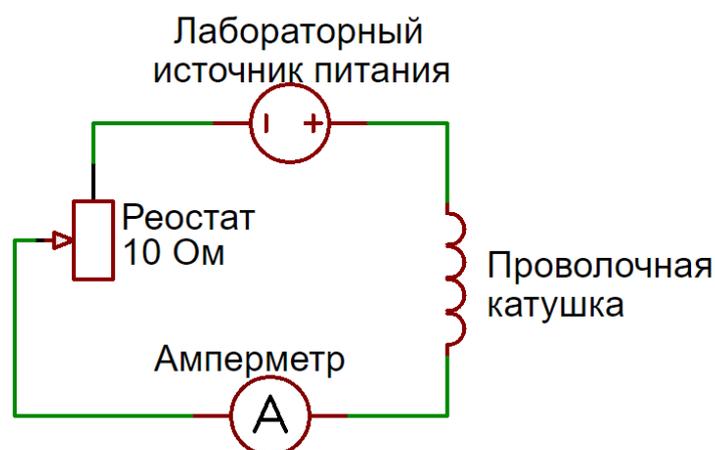


Рисунок 4 - Схема установки для калибровки датчика Холла.

При анализе экспериментально измеренной зависимости, отраженной на рисунке 5, с помощью метода МНК получен нормировочный коэффициент для датчика Холла. Его величина составила 0,3245 Э/мВ.

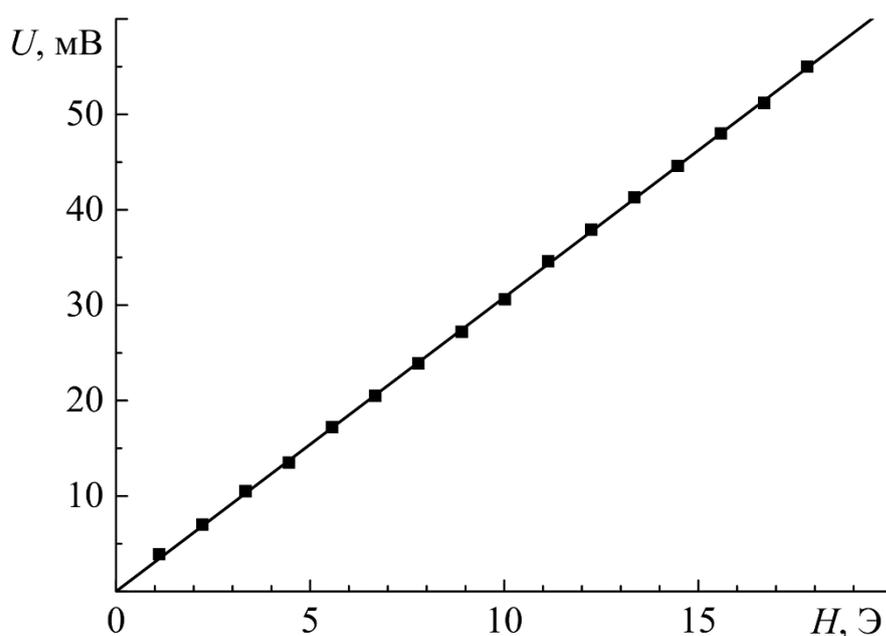


Рисунок 5 - Зависимость напряжения U , выдаваемого датчиком Холла, от величины магнитного поля H в катушке, полученная экспериментально.

На рисунке 6 представлены заводские параметры датчика, из которых следует, что нормировочный коэффициент равен 0,32 Э/мВ. Данные, полученные экспериментально, очень точно совпадают с заводскими характеристиками.

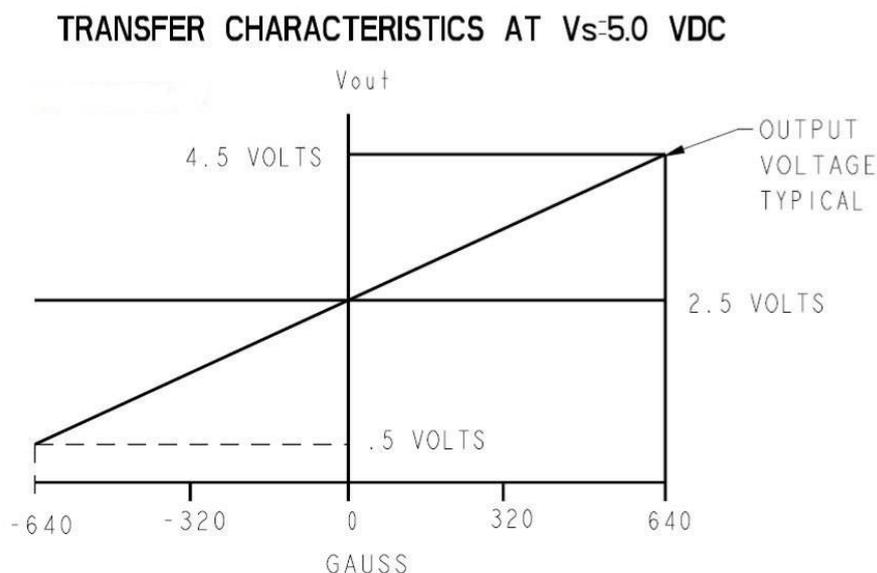


Рисунок 6 - Зависимость напряжения, выдаваемого датчиком Холла, от величины магнитного поля, предоставленная производителем.

После калибровки можем приступить к измерению магнитного поля полосковых проводников различных конфигураций. Первым было измерено поле прямого полоскового проводника шириной 1 см без дефектов.

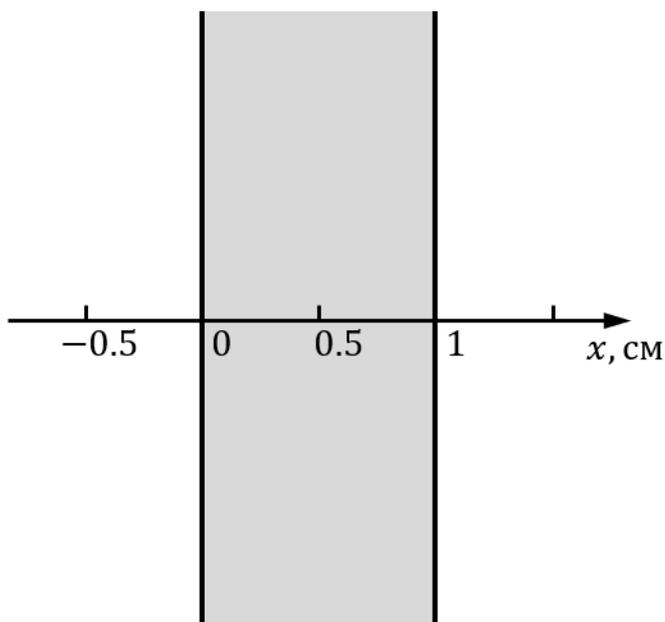


Рисунок 7 - Положение проводника шириной 1 см относительно оси x .

Для указанного на рисунке 7 проводника были произведены измерения горизонтальной H_x и вертикальной H_z проекций магнитного поля вдоль оси x с помощью датчика Холла.

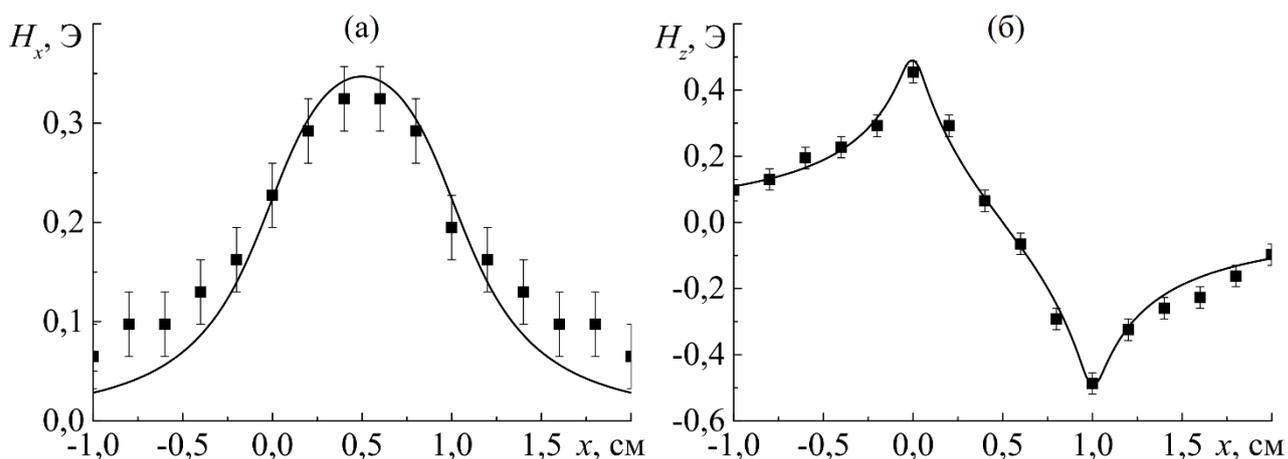


Рисунок 8 - Зависимость проекций магнитного поля H_x на ось x (а) и H_z на ось z (б) проводника, по которому течет ток $I = 1$ А, от координаты по оси x .

На рисунке 8(а) хорошо видны максимумы у границы проводника, а на рисунке 8(б) выделяется максимум на уровне середины проводника, что соответствует теоретическим представлениям.

Далее были проведены измерения магнитного поля проводника более сложной конфигурации, имеющего вырез.

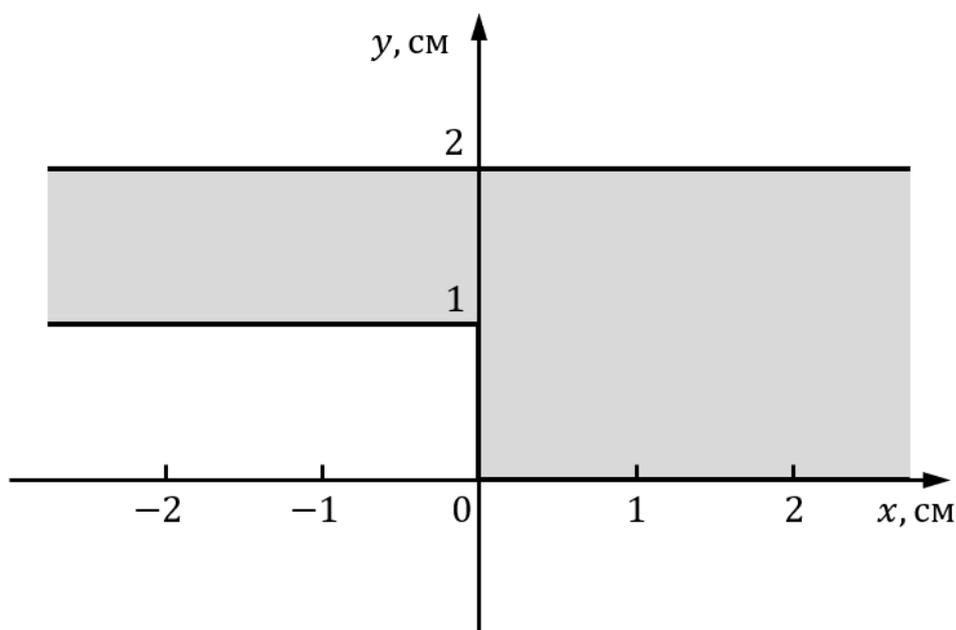


Рисунок 9 - Положение проводника с вырезом относительно осей x и y .

Изображенный на рисунке 9 проводник имеет ширину 2 см (справа) и вырез глубиной 1 см (слева). Измерения магнитного поля проводились с помощью датчика Холла вдоль прямых, показанных на рисунке 10.

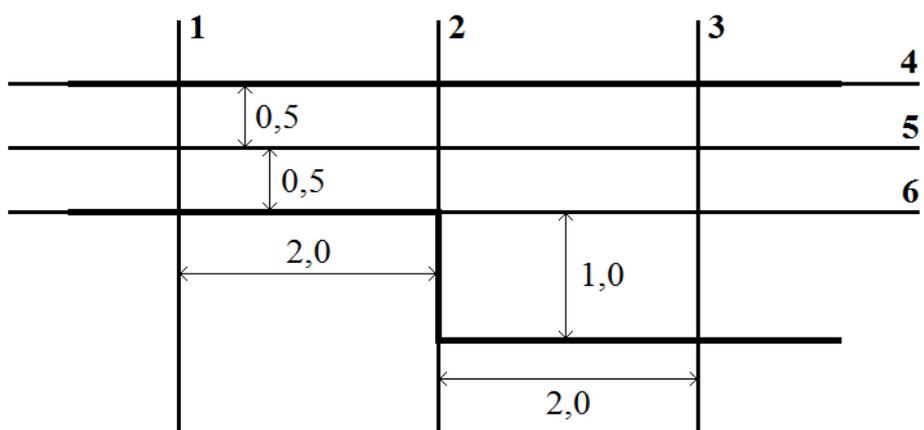


Рисунок 10 - Линии, вдоль которых производились измерения магнитного поля.

Графики распределения вертикальной и горизонтальной проекций магнитного поля вдоль линий 1, 2 и 3 представлены на рисунке 11. Результаты очень близки к результатам измерения вдоль полоскового проводника шириной 1 см (рисунок 8).

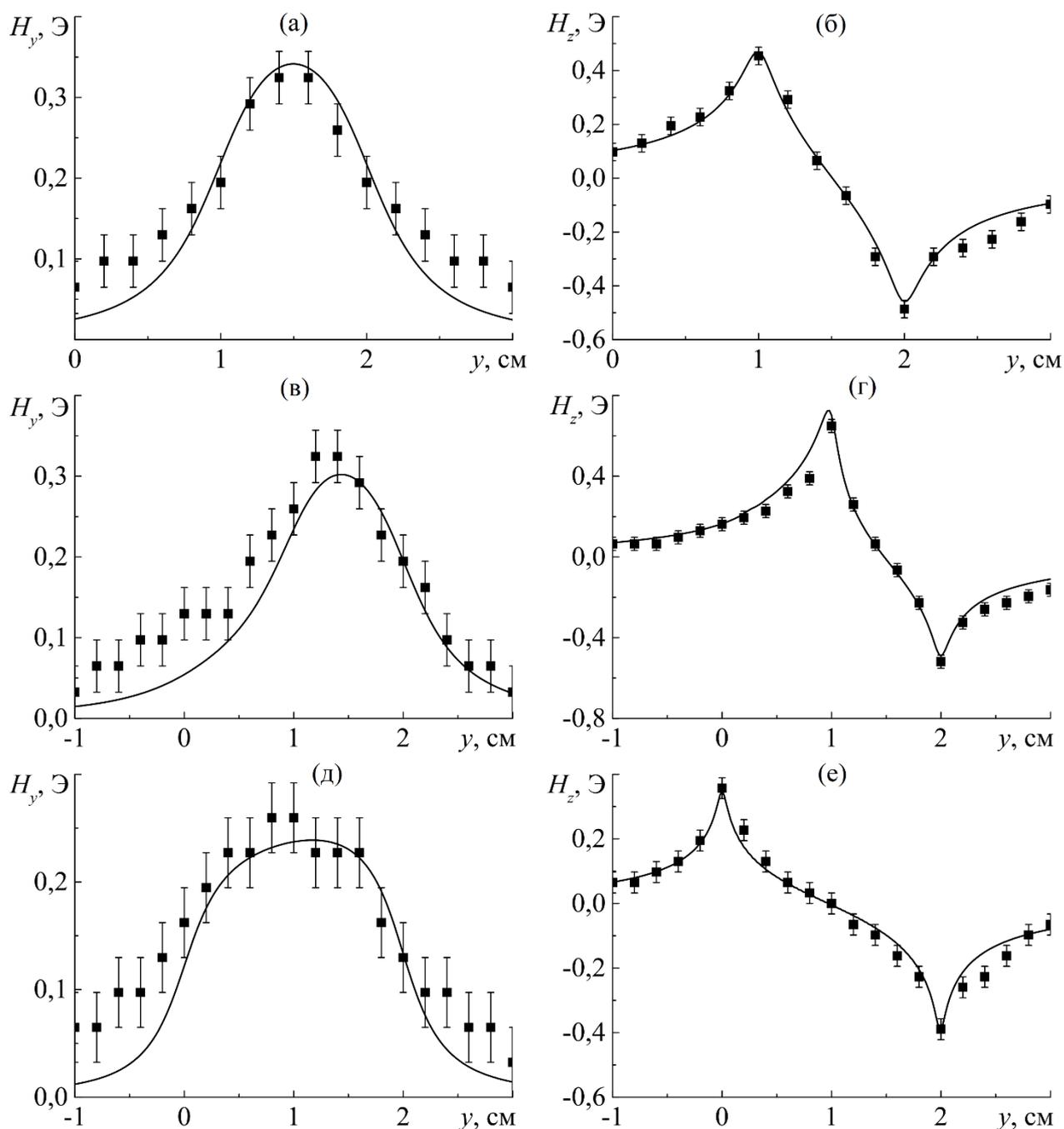


Рисунок 11 - Зависимость проекций магнитного поля проводника, по которому течет ток $I = 1 \text{ А}$, от координаты по оси y ;

Проекция H_y на ось y : линия 1 — (а), линия 2 — (в), линия 3 — (д);

Проекция H_z на ось z : линия 1 — (б), линия 2 — (г), линия 3 — (е).

Графики распределения вертикальной и горизонтальной проекций магнитного поля вдоль линий 4, 5 и 6 представлены на рисунке 12. Линия 6 проходит через внутренний угол уступа, вблизи которого наблюдается увеличение плотности тока, что влечет за собой увеличение магнитного поля в этой области. Соответствующий характерный пик виден на рисунке 12(г).

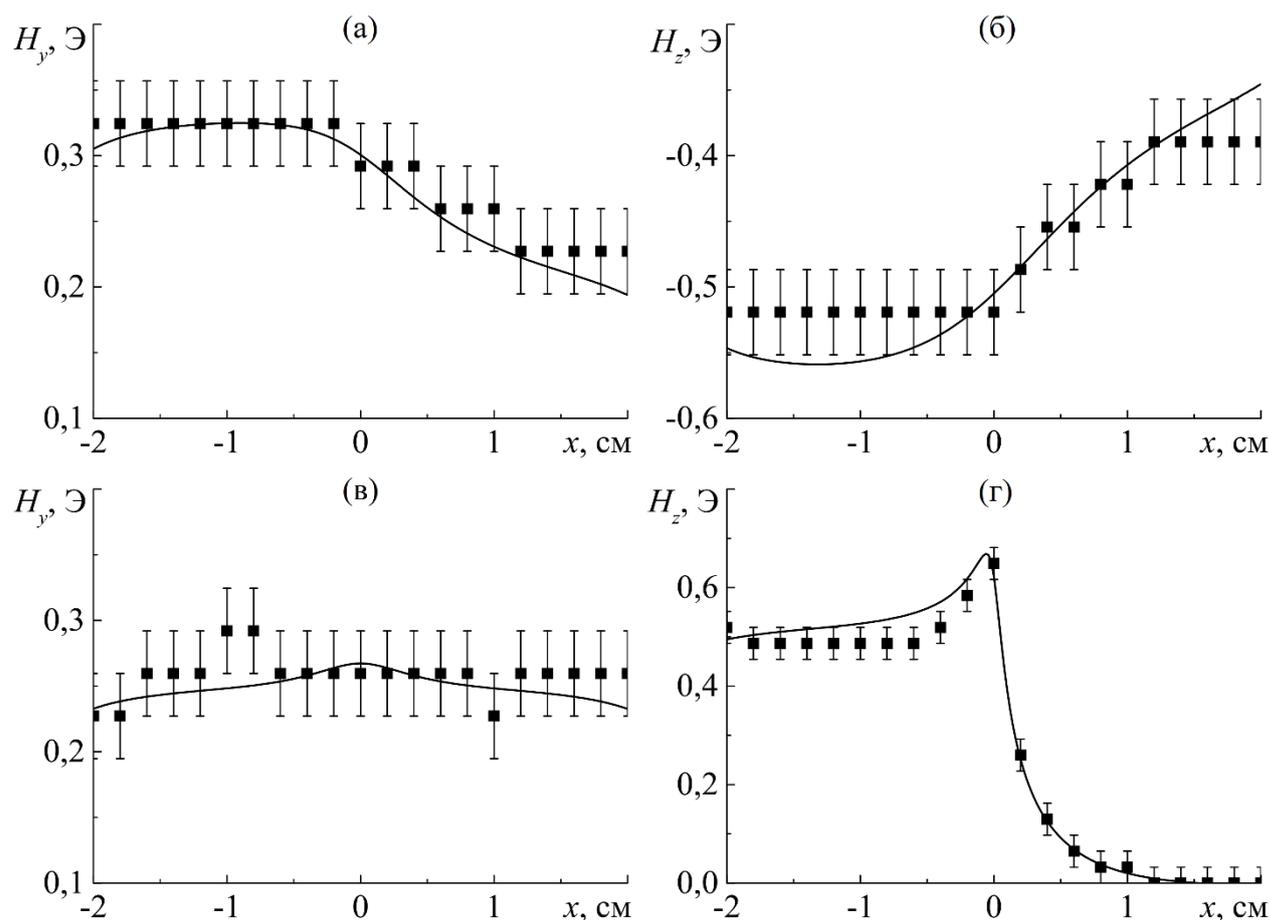


Рисунок 12 - Зависимость проекций магнитного поля проводника, по которому течет ток $I = 1$ А, от координаты по оси x ;
 Проекция H_y на ось y : линия 5 — (а), линия 6 — (в);
 Проекция H_z на ось z : линия 4 — (б), линия 6 — (г).

На всех графиках наглядно видно, что результаты хорошо совпадают с теоретическими расчётами для указанных систем. Это говорит о том, что датчики Холла пригодны для измерения магнитного поля полосковых шин. Однако, как говорилось ранее, они не подходят для измерения магнитного поля реальных плат ввиду низкой чувствительности. Эту проблему позволяет решить использование магниторезистивных датчиков.

1.3. Экспериментальное исследование магнитного поля полосковых проводников с помощью магниторезистивного градиометра

Более высокая чувствительность магниторезистивного датчика по сравнению с датчиком Холла и размеры чувствительного элемента порядка 10 мкм делают его более перспективным для измерения магнитного поля

полосковых проводников меньших размеров, приближенных к размерам шин в реальных платах.

На основе магниторезистивных датчиков была сконструирована система для тестирования плат, представляющих собой проводники с вырезами, моделирующими дефекты. Установка для тестирования плат, ранее созданная в ИПУ РАН при участии нашей научной группы, была оснащена механической винтовой подачей. Механическая подача обладает люфтами, но, тем не менее, удалось провести эксперименты с точностью до 0,1 мм. Измерения производились градиометром, конструкция которого дает возможность измерения только вертикальной проекции магнитного поля.

Первым было проведено измерение распределения магнитного поля полоскового проводника шириной 800 мкм, конфигурация которого представлена ниже.

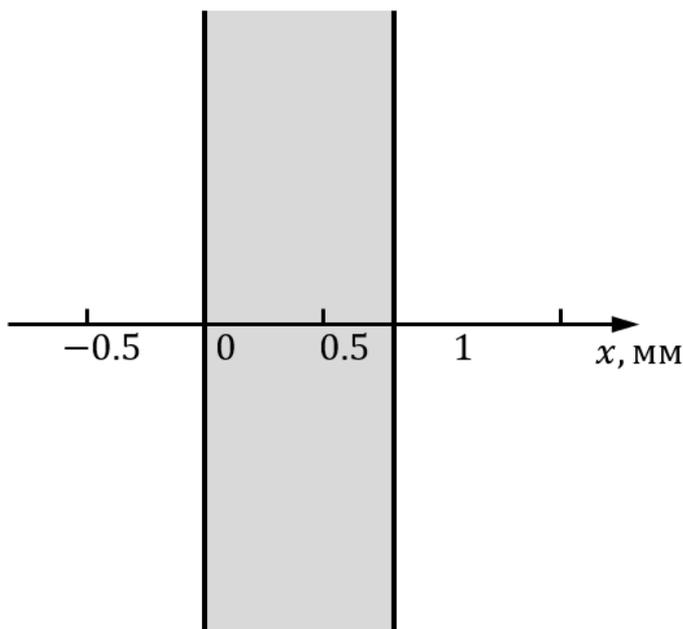


Рисунок 13 - Положение проводника шириной 800 мкм относительно оси x .

Для указанного на рисунке 13 проводника были произведены измерения вертикальной H_z проекции магнитного поля вдоль оси x с помощью магниторезистивного датчика.

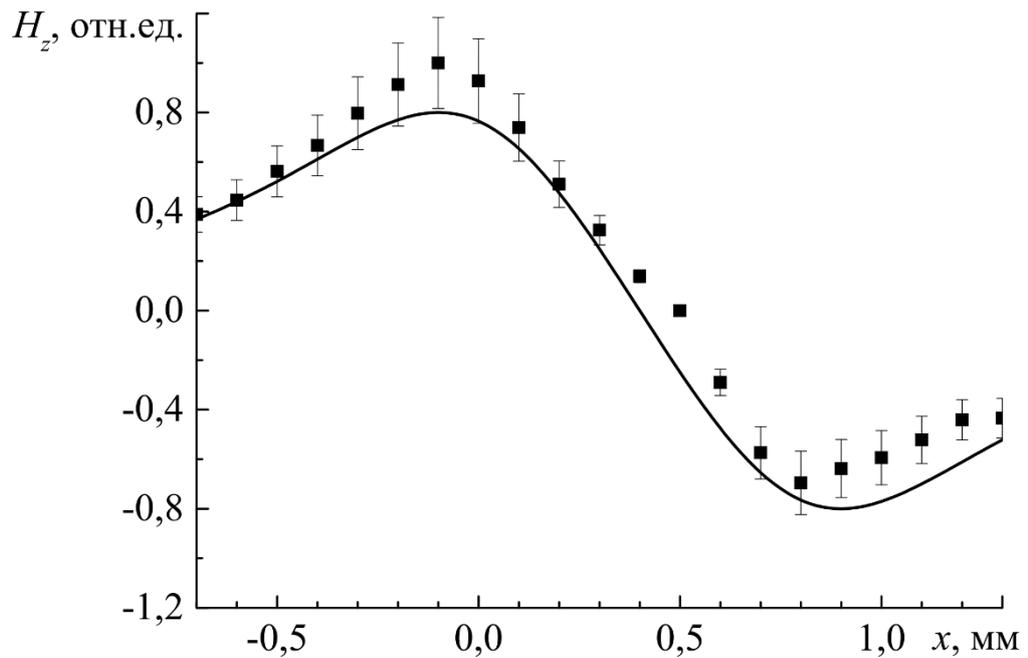


Рисунок 14 - Зависимость вертикальной проекции магнитного поля H_z на ось z проводника, по которому течет ток $I = 220$ мА, от координаты по оси x .

На рисунке 14, как и для более широкого проводника на рисунке 8(б), наблюдаются максимумы магнитного поля в областях на границе проводника.

Затем было измерено магнитное поле проводника, имеющего вырез, имитирующий дефект. Конфигурация проводника с вырезом представлена ниже.

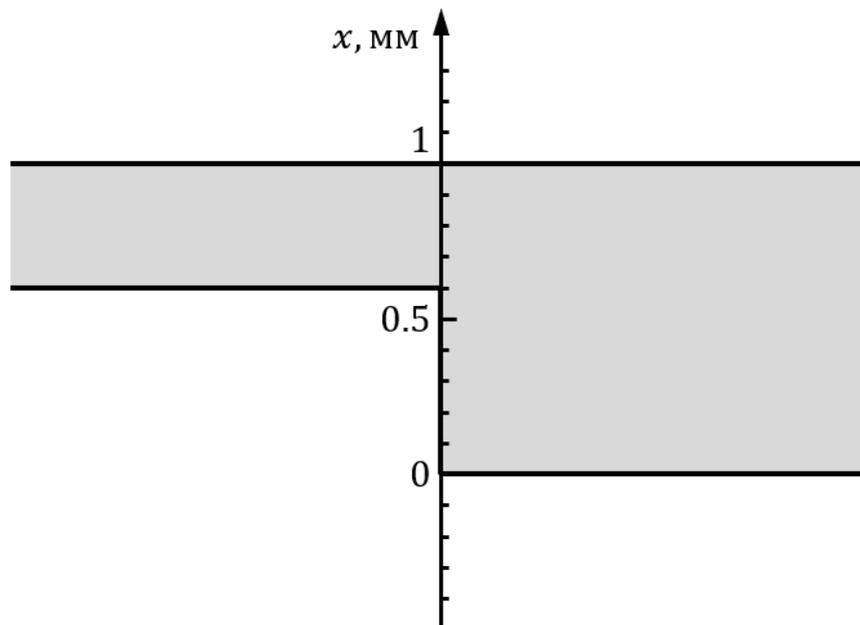


Рисунок 15 - Положение проводника с вырезом относительно оси x .

Изображенный на рисунке 15 проводник имеет ширину 1 мм (справа) и вырез глубиной 600 мкм (слева). Измерение магнитного поля было проведено с помощью магниторезистивного датчика вдоль оси x . Результаты измерений представлены на рисунке 16.

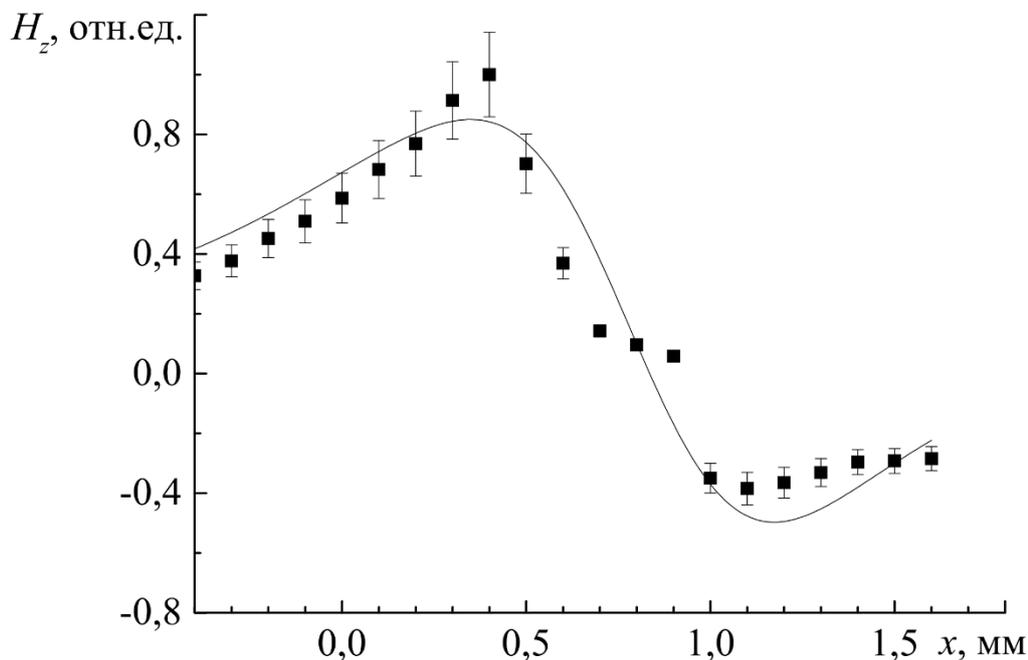


Рисунок 16 - Зависимость вертикальной проекции магнитного поля H_z на ось z проводника, по которому течет ток $I = 220$ мА, от координаты по оси x .

Полученные результаты говорят о том, что описанные выше методы позволяют фиксировать неоднородности магнитного поля, связанные с наличием дефектов в полосковых шинах. Вместе с тем представленные графики демонстрируют хорошее совпадение экспериментальных и теоретических данных. Это подтверждает теорию двумерного распределения тока и генерируемого им магнитного поля, разработанную в работе [25].

2. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ОДНОРОДНО НАМАГНИЧЕННОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Постоянные магниты нашли широкое применение в современной электротехнике, радиотехнике, электронике, медицине и бытовых приспособлениях [31–32]. В качестве одного из методов диагностики топологии магнитного поля постоянного магнита можно использовать экспериментальное измерение распределения этого поля и сравнение его с теоретическим расчетом для той же структуры. На основе сравнения можно установить степень однородности намагниченности данного образца, а также, с помощью полученных в статье аналитических формул, оценить угол поворота намагниченности относительно оси симметрии.

2.1. Параллелепипед, намагниченный однородно вдоль ребра

Задача о распределении магнитного поля прямоугольного параллелепипеда, намагниченного под произвольным углом, сводится к задаче о параллелепипеде, однородно намагниченного вдоль оси симметрии. Рассмотрим параллелепипед, однородно намагниченный вдоль оси z . В работе [5] рассчитана напряженность поля \vec{H} , создаваемого двумя разноименно заряженными с плотность $\sigma = |\vec{M}_s|$ плоскостями (рисунок 17) в соответствии с методом скалярного магнитного потенциала [33]. \vec{M}_s — намагниченность насыщения.

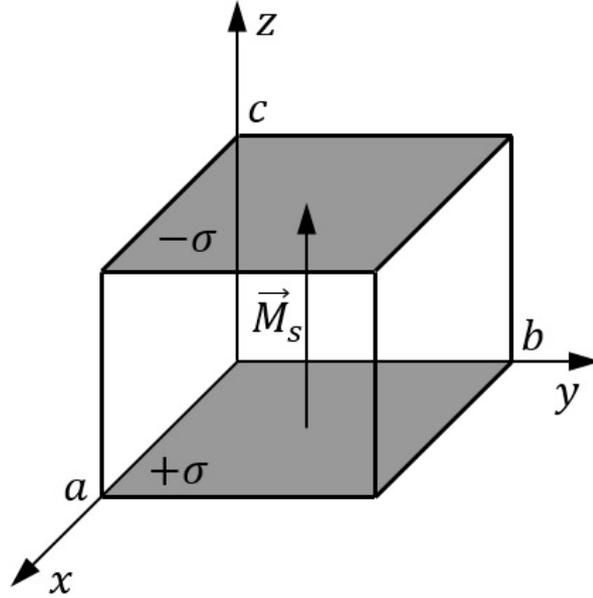


Рисунок 17 - Иллюстрация к методу скалярного магнитного потенциала.

Проекции напряженности поля \vec{H} на оси координат x , y и z соответственно равны:

$$H_x(x, y, z, \sigma) = -\sigma \ln \left(v + \sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2} \right) \Big|_{u=-x}^{u=a-x} \Big|_{v=-y}^{v=b-y} \Big|_{\omega=-z}^{\omega=c-z}, \quad (9)$$

$$H_y(x, y, z, \sigma) = -\sigma \ln \left(u + \sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2} \right) \Big|_{u=-x}^{u=a-x} \Big|_{v=-y}^{v=b-y} \Big|_{\omega=-z}^{\omega=c-z}, \quad (10)$$

$$H_z(x, y, z, \sigma) = \sigma \frac{v}{|v|} \frac{\omega}{|\omega|} \operatorname{arctg} \frac{u|v|}{|\omega| \sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2}} \Big|_{u=-x}^{u=a-x} \Big|_{v=-y}^{v=b-y} \Big|_{\omega=-z}^{\omega=c-z}, \quad (11)$$

где a , b и c — стороны магнита.

2.2. Параллелепипед, намагниченный под произвольным углом

В случае параллелепипеда, намагниченного под произвольным углом, напряженность поля \vec{H} в любой точке пространства является суперпозицией полей \vec{H}^x , \vec{H}^y и \vec{H}^z , создаваемых параллелепипедом, намагниченным вдоль осей x , y и z соответственно:

$$\vec{H} = \vec{H}^x + \vec{H}^y + \vec{H}^z. \quad (12)$$

В таком случае, при расчете напряженности поля методом скалярного магнитного потенциала, плоскости будут заряжены с плотностью

$$\sigma_x = M_{sx}, \quad \sigma_y = M_{sy}, \quad \sigma_z = M_{sz} \quad (13)$$

для намагниченности вдоль осей x , y и z соответственно.

Для удобства определения направления намагниченности параллелепипеда, перейдем к сферическим координатам (рисунок 18):

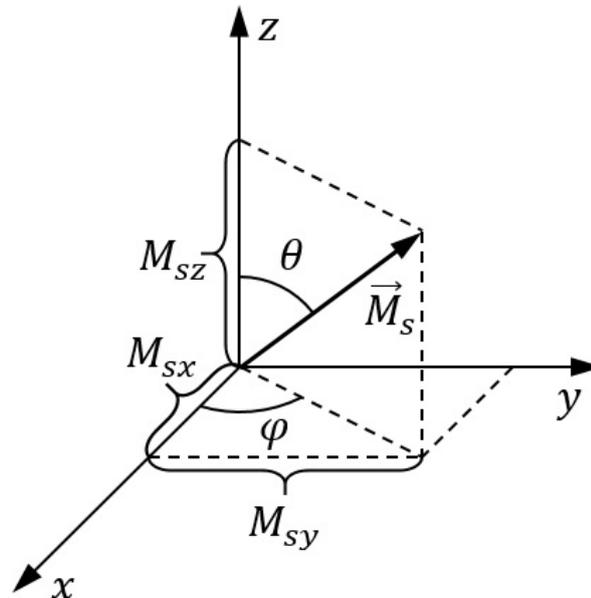


Рисунок 18 - Намагниченность насыщения \vec{M}_s в сферической системе координат.

Тогда получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= |\vec{M}_s| \sin \theta \cos \varphi, \\ \sigma_y &= |\vec{M}_s| \sin \theta \sin \varphi, \\ \sigma_z &= |\vec{M}_s| \cos \theta. \end{aligned} \quad (14)$$

Заменив σ на σ_z в (9) – (11), получаем составляющую поля \vec{H}^z в (12). Аналогично можно рассчитать составляющие \vec{H}^x и \vec{H}^y для намагниченности вдоль осей x и y соответственно.

Окончательно получаем напряженность поля \vec{H} , создаваемого прямоугольным параллелепипедом, намагниченным под произвольным углом, в проекции на ось x :

$$H_x = H_x^x + H_x^y + H_x^z, \quad (15)$$

$$H_x^x(x, y, z, \sigma) = \sigma_x \frac{u}{|u|} \frac{v}{|v|} \operatorname{arctg} \frac{|v|\omega}{|u|\sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2}} \Big|_{u=-x}^{u=a-x} \Big|_{v=-y}^{v=b-y} \Big|_{\omega=-z}^{\omega=c-z}, \quad (16)$$

$$H_x^y(x, y, z, \sigma) = -\sigma_y \ln \left(\omega + \sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2} \right) \Big|_{u=-x}^{u=a-x} \Big|_{v=-y}^{v=b-y} \Big|_{-z}^{\omega=c-z}, \quad (17)$$

$$H_x^z(x, y, z, \sigma) = -\sigma_z \ln \left(v + \sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2} \right) \Big|_{u=-x}^{u=a-x} \Big|_{v=-y}^{v=b-y} \Big|_{\omega=-z}^{\omega=c-z}, \quad (18)$$

на ось y:

$$H_y = H_y^x + H_y^y + H_y^z, \quad (19)$$

$$H_y^x(x, y, z, \sigma) = -\sigma_x \ln \left(\omega + \sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2} \right) \Big|_{u=-x}^{u=a-x} \Big|_{v=-y}^{v=b-y} \Big|_{\omega=-z}^{\omega=c-z}, \quad (20)$$

$$H_y^y(x, y, z, \sigma) = \sigma_y \frac{v}{|v|} \frac{\omega}{|\omega|} \operatorname{arctg} \frac{u|\omega|}{|v|\sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2}} \Big|_{u=-x}^{u=a-x} \Big|_{v=-y}^{v=b-y} \Big|_{\omega=-z}^{\omega=c-z}, \quad (21)$$

$$H_y^z(x, y, z, \sigma) = -\sigma_z \ln \left(u + \sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2} \right) \Big|_{u=-x}^{u=a-x} \Big|_{v=-y}^{v=b-y} \Big|_{\omega=-z}^{\omega=c-z}, \quad (22)$$

на ось z:

$$H_z = H_z^x + H_z^y + H_z^z, \quad (23)$$

$$H_z^x(x, y, z, \sigma) = -\sigma_x \ln \left(v + \sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2} \right) \Big|_{u=-x}^{u=a-x} \Big|_{v=-y}^{v=b-y} \Big|_{\omega=-z}^{\omega=c-z}, \quad (24)$$

$$H_z^y(x, y, z, \sigma) = -\sigma_y \ln \left(u + \sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2} \right) \Big|_{u=-x}^{u=a-x} \Big|_{v=-y}^{v=b-y} \Big|_{\omega=-z}^{\omega=c-z}, \quad (25)$$

$$H_z^z(x, y, z, \sigma) = \sigma_z \frac{v}{|v|} \frac{\omega}{|\omega|} \operatorname{arctg} \frac{u|v|}{|\omega|\sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2}} \Big|_{u=-x}^{u=a-x} \Big|_{v=-y}^{v=b-y} \Big|_{\omega=-z}^{\omega=c-z}. \quad (26)$$

Полученные формулы можно использовать для анализа изменений в распределении магнитного поля намагниченного параллелепипеда при отклонении вектора намагниченности от оси симметрии.

Рассмотрим отклонение вектора намагниченности \vec{M}_s от вертикали при $\varphi = 0^\circ$ и соответствующие ему изменения в распределениях проекций вектора напряженности магнитного поля H_x и H_z вдоль прямой, изображенной на рисунке 19.

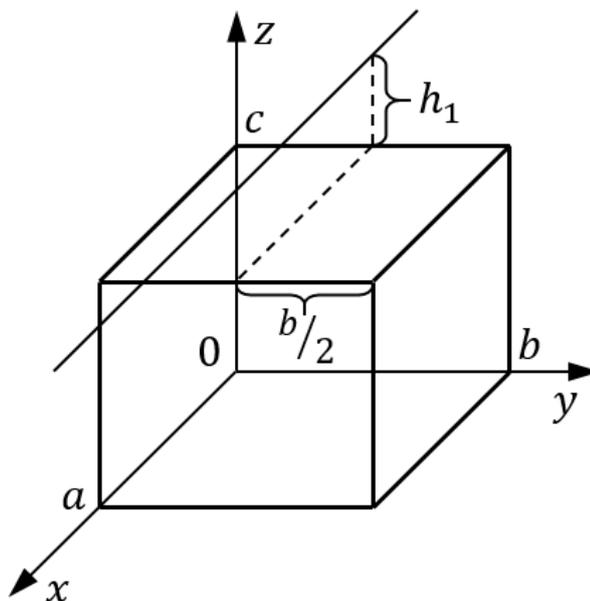


Рисунок 19 - Линия, вдоль которой проводился теоретический расчёт магнитного поля. Линия параллельна оси Ox , $h_1 = 3,8$ мм.

В качестве примера взят магнит с параметрами $a = b = 4$ см, $c = 1.5$ см, $4\pi M_s = 13.1$ кЭ. Ниже на графиках изображены теоретические кривые, соответствующие повороту вектора \vec{M}_s на углы $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ с шагом в 10° (рисунок 20).

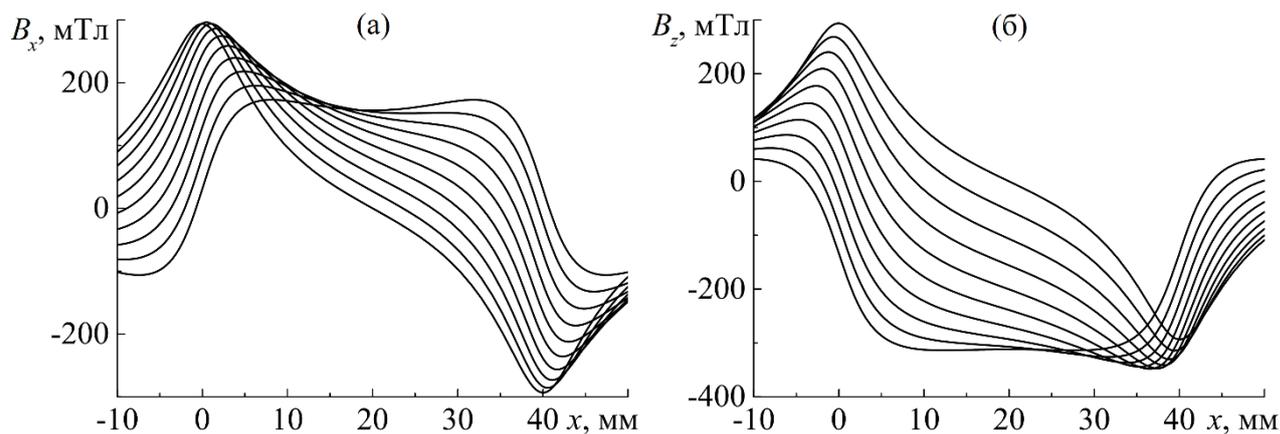


Рисунок 20 - Теоретические распределения проекций вектора индукции магнитного поля B_x на ось x (а) и B_z на ось z (б) в зависимости от координаты x ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ, \varphi = 0^\circ$).

Также были исследованы изменения в распределениях магнитного поля при фиксированном отклонении вектора намагниченности \vec{M}_s от вертикали $\theta = 60^\circ$ и изменении угла $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ с шагом в 10° вдоль прямой, изображенной на рисунке 19. Результаты представлены на рисунке 21.

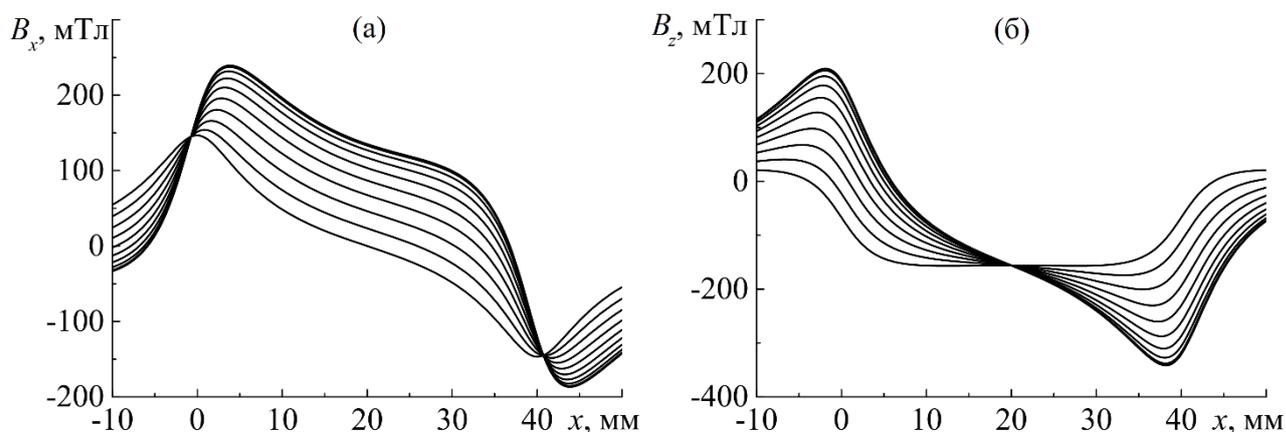


Рисунок 21 - Теоретические распределения проекций вектора индукции магнитного поля B_x на ось x (а) и B_z на ось z (б) в зависимости от координаты x ($\theta = 60^\circ, 0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$).

Полученные формы зависимостей можно использовать для оценки угла поворота намагниченности в образцах, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда.

3. ЭНЕРГИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КУБИЧЕСКИХ МАГНИТОВ

Как говорилось ранее, создание новых структурированных магнитных материалов из микро- и наночастиц различной конфигурации посредством самосборки, а также под управлением внешнего магнитного поля, является актуальным направлением физики магнитных наноструктур.

Типичным примером такой технологии является создание спеченных магнитов состава $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$, состоящих из отдельных кристаллических микромагнитных частиц, разделенных между собой тонким парамагнитным слоем из редкоземельных материалов [34–35]. Такие магниты получили в настоящее время широкое распространение и активно исследуются, так как параметры магнитной энергии, получаемые в таких магнитах, являются рекордными.

Изготовление как объемных, так и пленочных магнитов основано на самосборке микромагнитных частиц (зерен). Под действием внешнего магнитного поля, давления и температуры оси легкого намагничивания зерен выстраиваются в одном направлении, что позволяет создать магнит, практически однородно намагниченный в пределах всего объема. Неоднородность намагниченности может быть обусловлена неоднородностью межзеренного пространства. На данный момент разработаны технологии создания магнитов, в которых намагниченность неоднородно распределена в пространстве (например, многополюсные). Подобные магниты необходимы для таких устройств, как статоры электродвигателей, магнитные втулки, микроскопические двигатели и т.д. [36].

Одной из наиболее сложных и важных задач проектирования таких систем является вычисление коллективного магнитного поля, обусловленного системой магнитных зерен, и энергии их взаимодействия, так как равновесная структура определяется минимумом результирующей магнитной энергии ансамбля таких частиц. Обычно при теоретическом моделировании таких структур каждое зерно

заменяется эффективным магнитным диполем, помещенным в центр зерна, с магнитным моментом, равным магнитному моменту данного зерна (метод крупных частиц [7]). Однако указанный метод является приближенным и в некоторых случаях может давать существенные ошибки. Реальные магнитные частицы обладают формой, могут отличаться друг от друга направлением оси легкого намагничивания и другими параметрами. Поэтому является важным рассчитать энергию магнитного взаимодействия между зернами с учетом их формы и распределения намагниченности в зерне.

Указанная 3-хмерная задача сводится к решению уравнения Пуассона с заданным распределением намагниченности внутри зерна и является чрезвычайно сложной. Однако она может быть существенно упрощена для однородно намагниченных зерен кубической формы. В этом случае магнитное поле зерна может быть представлено в аналитической форме [5], и решение уравнения Пуассона не требуется.

3.1. Два кубических магнита в плоскости

Результаты, представленные в предыдущей главе, позволили получить аналитическую формулу для энергии взаимодействия двух кубических магнитов.

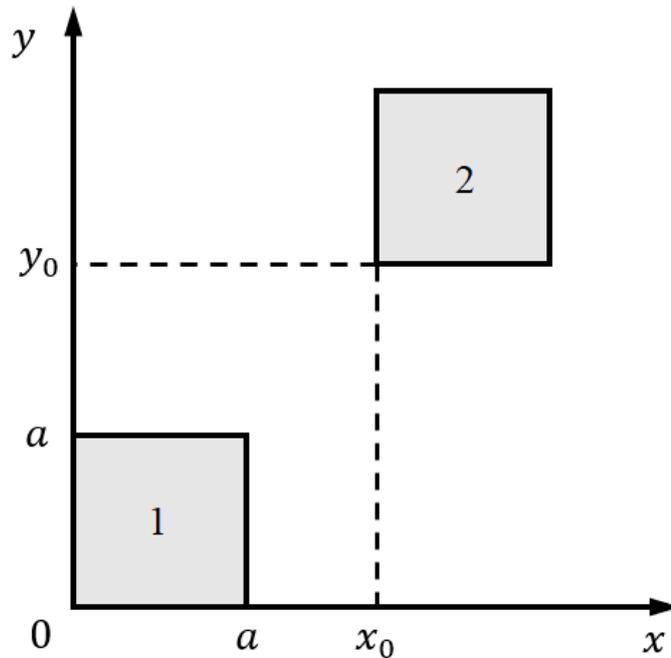


Рисунок 22 - Расположение кубических магнитов с ребром a в декартовой системе координат.

Расчёт производился для системы, представленной на рисунке 22. Магниты намагничены вдоль оси z , перпендикулярной плоскости рисунка. Известно, что энергия диполя во внешнем магнитном поле определяется формулой

$$W = -(\vec{p}_m \cdot \vec{B}), \quad (27)$$

где \vec{p}_m — магнитный момент диполя, а \vec{B} — индукция внешнего магнитного поля. Поле, создаваемое намагниченным параллелепипедом, неоднородно, поэтому для расчета энергии взаимодействия требуется представить магнит в виде совокупности диполей с магнитным моментом

$$d\vec{p}_m = \vec{M} dV. \quad (28)$$

Принимая во внимание, что намагниченность \vec{M} направлена вдоль оси z , энергия каждого такого диполя будет равна

$$dW = -(d\vec{p}_m \cdot \vec{B}) = -dp_{mz} \cdot B_z. \quad (29)$$

Таким образом, для вычисления полной энергии взаимодействия следует вычислить интеграл по объему магнита

$$W = - \int B_z dp_{mz} = -|\vec{M}| \int_V B_z dV = -|\vec{M}| \iiint_V B_z dx dy dz, \quad (30)$$

где B_z — проекция магнитной индукции поля, создаваемого магнитом 1, на ось z , V — объем магнита 2 (рисунок 22). Таким образом:

$$B_z = |\vec{M}| \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{uv}{\omega \sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2}} \right) \Big|_{u=-x}^{u=a-x} \Big|_{v=-y}^{v=a-y} \Big|_{\omega=-z}^{\omega=a-z}; \quad (31)$$

$$W = -|\vec{M}| \int_{x_0}^{x_0+a} dx \int_{y_0}^{y_0+a} dy \int_0^a dz B_z. \quad (32)$$

Полученный интеграл сводится к общему, посчитав который, можно в дальнейшем, путем простой замены переменной, рассчитать все интегралы:

$$\begin{aligned} I(u, v, \omega) &= \int du \int dv \int d\omega \operatorname{arctg} \left(\frac{uv}{\omega \sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2}} \right) = \\ &= \int dv \int d\omega \left[u \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{uv}{\omega \sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega}{2} \cdot \ln \left(\frac{\sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2} + v}{\sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2} - v} \right) \right] = \\ &= \int d\omega \left[-\omega \sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2} + uv \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{uv}{\omega \sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{u\omega}{2} \cdot \ln \left(\frac{\sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2} + u}{\sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2} - u} \right) + \frac{v\omega}{2} \cdot \ln \left(\frac{\sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2} + v}{\sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2} - v} \right) \right] = \\ &= \frac{(u^2 + v^2 - 2\omega^2)\sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2}}{6} + \\ &\quad + uv|\omega| \arcsin \left(\frac{uv}{\sqrt{\omega^2(u^2 + v^2 + \omega^2) + u^2v^2}} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{4}u(\omega^2 - v^2) \ln \left(\frac{\sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2} + u}{\sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2} - u} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{4}v(\omega^2 - u^2) \ln \left(\frac{\sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2} + v}{\sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2} - v} \right) + C. \end{aligned} \quad (33)$$

Окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
W = \vec{M}^2 &(-2I(x_0 - a, y_0 - a, 0) + 2I(x_0 - a, y_0 - a, a) + \\
&+ 4I(x_0 - a, y_0, 0) - 4I(x_0 - a, y_0, a) - \\
&- 2I(x_0 - a, y_0 + a, 0) + 2I(x_0 - a, y_0 + a, a) + \\
&+ 4I(x_0, y_0 - a, 0) - 4I(x_0, y_0 - a, a) - \\
&- 8I(x_0, y_0, 0) + 8I(x_0, y_0, a) + \\
&+ 4I(x_0, y_0 + a, 0) - 4I(x_0, y_0 + a, a) - \\
&- 2I(x_0 + a, y_0 - a, 0) + 2I(x_0 + a, y_0 - a, a) + \\
&+ 4I(x_0 + a, y_0, 0) - 4I(x_0 + a, y_0, a) - \\
&- 2I(x_0 + a, y_0 + a, 0) + 2I(x_0 + a, y_0 + a, a)).
\end{aligned} \tag{34}$$

3.2. Сравнение с дипольной конфигурацией

Полученная выше аналитическая формула (34) позволяет рассчитать энергию взаимодействия кубических магнитов, а также провести сравнение с методом крупных частиц. В качестве примера были построены графики зависимости энергии взаимодействия кубических магнитов, а также энергии взаимодействия диполей, имеющих аналогичный магнитный момент и помещенных в центр указанных магнитов, — от расстояния l между ними. Кубические магниты имеют размеры $1 \times 1 \times 1$ см, обладают магнитным моментом $1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$. Результат показан на рисунке 23.

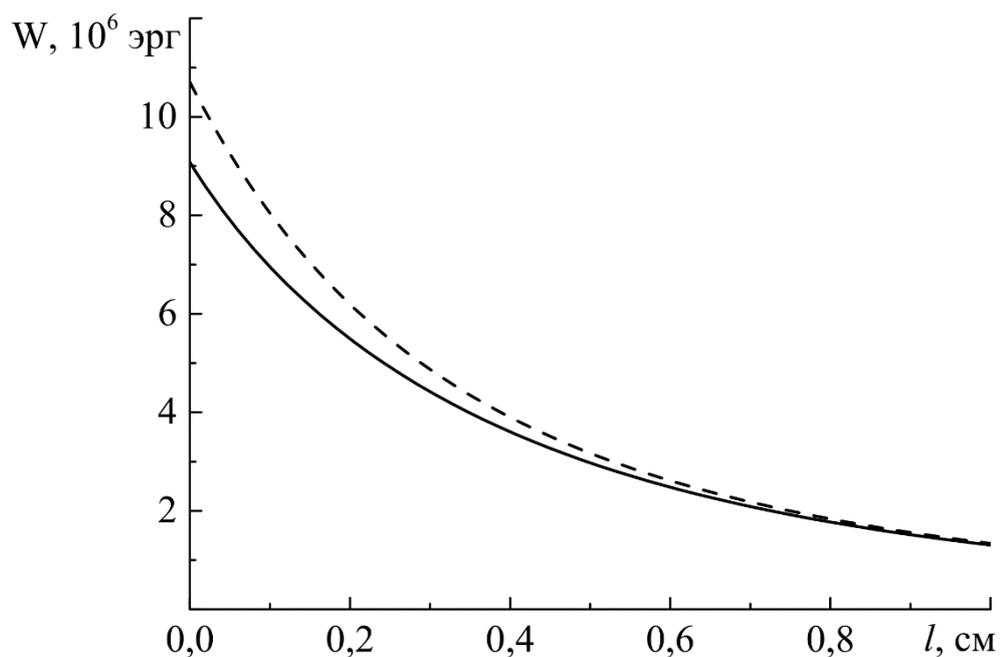


Рисунок 23 - Сравнение энергий взаимодействия кубических магнитов и диполей. Пунктирной линией отмечена энергия взаимодействия диполей, сплошной — кубических магнитов.

На рисунке 23 видно, что на относительно небольшом расстоянии между магнитами наблюдаются существенные различия. На расстоянии, равном длине ребра магнита, отличие в величине энергии взаимодействия не превышает 3 %.

4. МАГНИТНАЯ ЛОКАЦИЯ

Магнитная локация относится к классу обратных задач магнитостатики. Имеется источник магнитной неоднородности, который может иметь разнообразную форму и природу. В частности, таким источником может быть трещина или ржавчина на поверхности трубопроводов или рельса, по которым течет тестовый ток, а также намагниченное тело произвольной формы (рисунок 24). По результатам измерения компонент магнитного поля в некоторых точках пространства требуется установить положение источника, его природу, форму, величину и т.д.

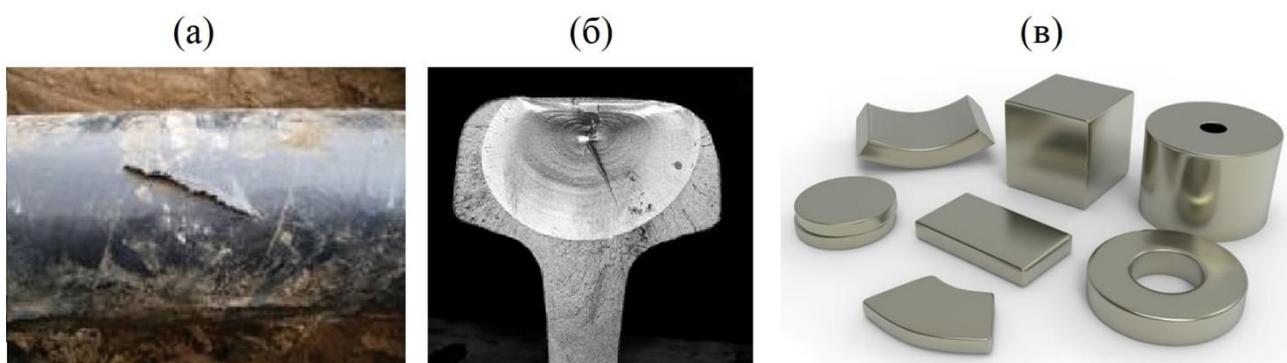


Рисунок 24 - Источники магнитной неоднородности: (а) — повреждение магистрального трубопровода; (б) — трещина в рельсе; (в) — магниты различных форм и размеров.

Известные методы магнитной локации, реализованные на практике, в основном сводились к одномерным задачам. Например, с помощью феррозондового датчика [37] определялось наличие дефекта на рельсе [38]. 3-мерная магнитная локация представляет собой существенно более сложную задачу. Основными проблемами является неизвестность количества точек измерения, необходимых для точного детектирования источника, неопределенность области их расположения, а также остается открытым вопрос, возможно ли это в принципе. В общем случае задача об определении положения источника, который можно с большой точностью заменить некоторым количеством диполей, в настоящее время не имеет решения, однако потребность в его нахождении очень высока.

Такая задача поддается решению только в случае, когда источник магнитной неоднородности находится на достаточно большом расстоянии для того, чтобы его эффективно можно было заменить одним диполем. К примеру, для магнита в форме прямоугольного параллелепипеда, имеющего размеры $4 \times 4 \times 1.5$ см и магнитный момент $20 \text{ A} \cdot \text{m}^2$, на расстояниях, превышающих линейные размеры магнита в 4 раза, отличия в величине создаваемого магнитного поля не превышают 2 %.

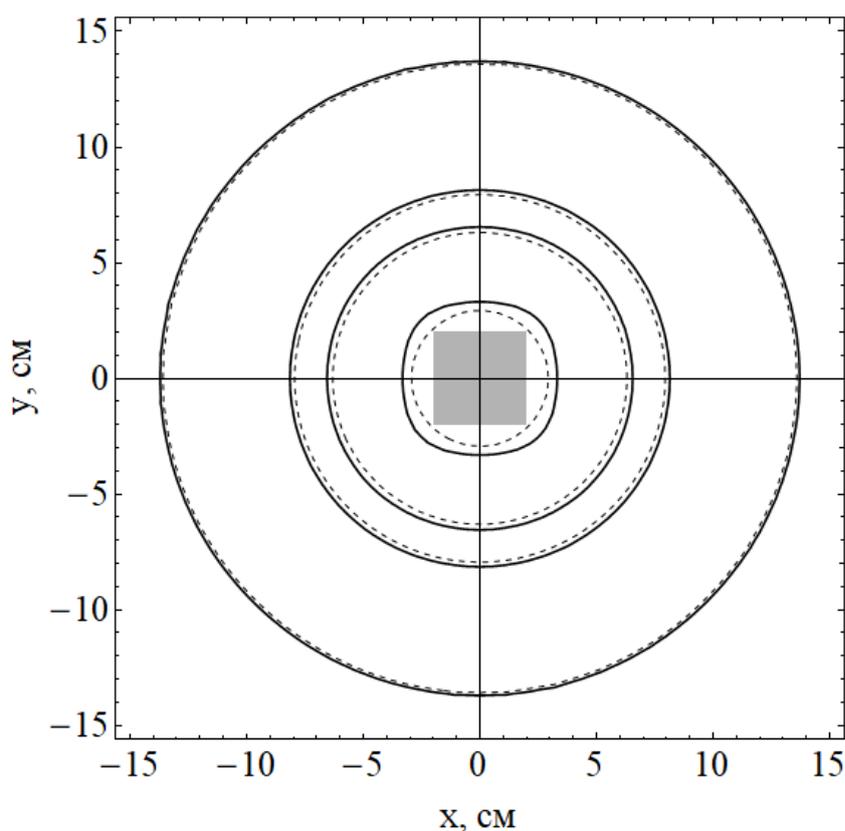


Рисунок 25 - Сравнение поля параллелепипеда с полем диполя. Пунктирной линией отмечено поле, создаваемое диполем, сплошной — параллелепипедом.

По-прежнему остается вопрос о количестве точек измерения магнитного поля и их расположение. Теоретически было установлено, что для определения положения магнитного диполя необходимо как минимум 5 значений компонент магнитного поля в различных точках пространства, однако ни одного устройства, использующего 5 датчиков магнитного поля для решения задачи магнитной локации, не было создано из-за сильного влияния ошибок прямых измерений. Для экспериментальной реализации оказалось возможным использование 6 точек измерения, которые представляли собой два 3-хосевых

датчика магнитного поля, расположенных вдоль одной прямой. Первый работающий алгоритм для задачи магнитной локации был создан и опубликован в 2001 г. [39], однако экспериментальная реализация давала значительную погрешность. Это было обусловлено недостаточно качественной сборкой устройства, а именно неточным позиционированием и ориентированием датчиков друг относительно друга, а также недостаточной точностью обработки аналоговых сигналов ввиду низкой разрядности используемого АЦП. В результате ошибка определения координат диполя и проекций магнитного момента достигала 40 %.

Существенный прогресс, как в математическом алгоритме, так и в экспериментальной реализации установки с 6 датчиками был достигнут в 2005 г. [40–41]. Было разработано и создано устройство, позволяющее определять положение диполя в объеме куба $20 \times 20 \times 20$ см с ошибкой, не превосходящей 20 %. Однако в этой конфигурации устройства были области пространства, в которых ошибки определения координат диполя достигали 100 %.

В работе [42] было показано, что увеличение количества точек измерения приводит к повышению точности определения положения магнитного диполя, однако это также ведет к существенному усложнению конструктивной и программной части установки. В частности, требуется точное расположение датчиков в определённых точках пространства, а также программное обеспечение, способное обрабатывать поток данных с большого количества датчиков. Экспериментальная реализация установки с 9 точками измерения была проведена в 2012 г. в ИПУ РАН [43]. Ввиду недостаточно высокого качества изготовления устройства, в некоторых областях пространства ошибки в определении координат достигали 50 %.

Аналогичные исследования проводились в работе [44] в различных модификациях. При помощи устройства с 6 датчиками были получены в целом схожие результаты. Также была использована схема с 9 датчиками для определения положения дефектов в плоскости.

Магнитная локация находит применение во многих актуальных задачах. Например в работах [8–12] исследуется возможность определения положения и ориентации капсулы эндоскопа.

Коррозийные разрушения на поверхности магистральных трубопроводов могут приводить к аварийным ситуациям, связанным с утечкой транспортируемого газа. Возможность раннего обнаружения таких повреждений благодаря методам магнитной локации показана в [45].

В работах [13, 46] магнитная локация применяется в качестве метода своевременного обнаружения скрытых ферромагнитных предметов, потенциально представляющих террористическую угрозу, что чрезвычайно важно для вопросов безопасности.

4.1. Численные методы решения

Перейдем к реализации численного решения задачи магнитной локации. Требуется определить пространственные координаты $(x_0; y_0; z_0)$ и ориентацию магнитного диполя в среде по известным значениям индукции магнитного поля в определенных точках пространства. Для этой задачи была выбрана декартова система координат (рисунок 26), ввиду своей наглядности в вопросах представления позиции диполя. Ориентация магнитного диполя может быть определена по проекциям дипольного момента \vec{p}_m на оси координат $(p_{mx}; p_{my}; p_{mz})$.

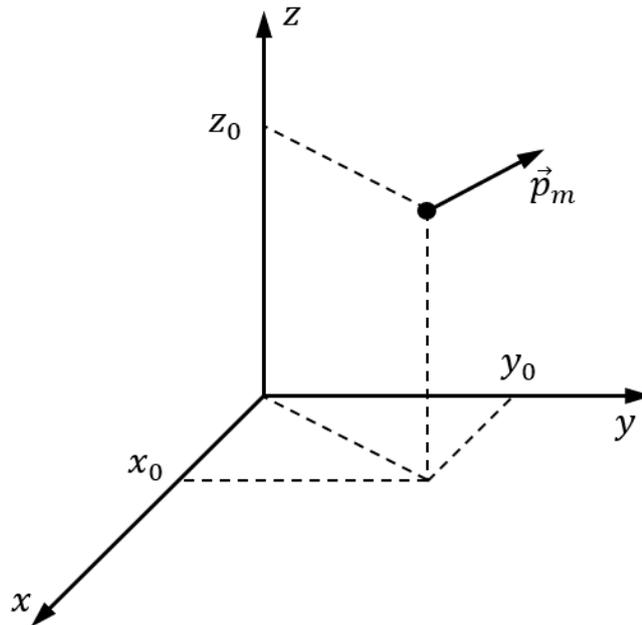


Рисунок 26 - Положение и ориентация магнитного диполя в декартовой системе координат.

Выбор точек пространства для измерения проекций вектора магнитной индукции оказывает ключевое влияние на точность и устойчивость решения. Следует отметить, что во всех указанных выше работах датчики располагались в одной плоскости. В данной работе представлено развитие метода магнитной локации с использованием трех 3-хосевых датчиков магнитного поля, а также впервые была предложена схема с использованием четырех 3-хосевых магниторезистивных датчиков, расположенных в разных плоскостях. Схема расположения датчиков показана на рисунке 27.

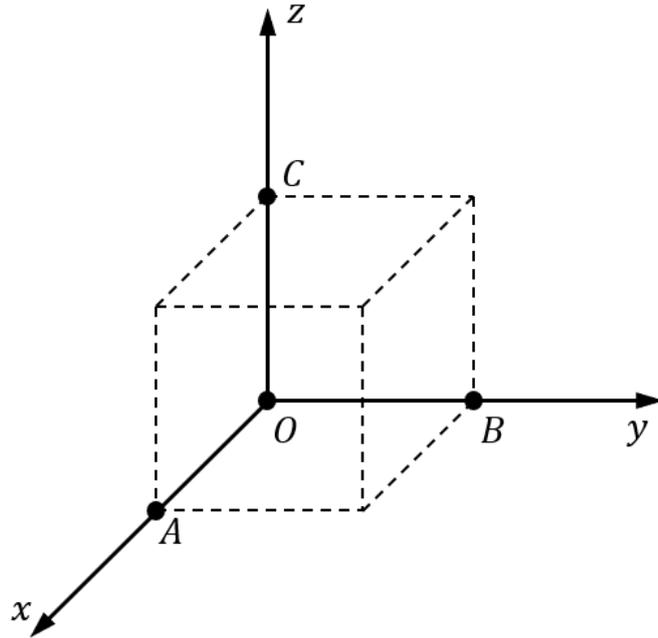


Рисунок 27 - Схема расположения датчиков. Для трех датчиков используются точки A , O и B , для четырех — A , O , B и C . Указанные точки располагаются в вершинах куба со стороной a .

Проекции вектора магнитной индукции в точке A представлены ниже:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x^A = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(p_x(x_0 - a) + p_y y_0 + p_z z_0)(x_0 - a)}{r_A^5} - \frac{p_x}{r_A^3} \right); \\ B_y^A = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(p_x(x_0 - a) + p_y y_0 + p_z z_0)y_0}{r_A^5} - \frac{p_y}{r_A^3} \right); \\ B_z^A = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(p_x(x_0 - a) + p_y y_0 + p_z z_0)z_0}{r_A^5} - \frac{p_z}{r_A^3} \right); \\ r_A^2 = (x_0 - a)^2 + y_0^2 + z_0^2. \end{array} \right. \quad (35)$$

Аналогичным образом можно записать проекции вектора магнитной индукции в точках O , B и C . В результате получаем систему из 12 уравнений для случая с тремя датчиками и систему из 16 уравнений для случая с четырьмя 3-хосевыми датчиками. Данная система не имеет точного решения и можно говорить только о множестве решений, соответствующих погрешности измерения магнитного поля. В таком случае требуется анализ для выбора наиболее вероятного решения. В качестве меры отклонения полученного решения от наиболее вероятного можно использовать функционал

квадратичного отклонения экспериментально измеренных величин $B_{\text{эксп}}^i$ от теоретически рассчитанных $B_{\text{теор}}^i$

$$\sum_{i=1}^N (B_{\text{эксп}}^i - B_{\text{теор}}^i)^2, \quad (36)$$

где N — количество точек измерения магнитного поля. Задача сводится к поиску таких значений координат и проекций магнитного момента диполя $(x_0; y_0; z_0; p_{mx}; p_{my}; p_{mz})$, при которых данный функционал минимален. В данной задаче применение стандартных методов численного исчисления оказывается невозможным, ввиду высокой неустойчивости, поэтому поиск решения частично осуществляется методом перебора. Область поиска представляется в виде сетки с определённым шагом, от которого зависит точность результата и время вычисления. Оптимальное время решения в нашем случае достигается при шаге сетки равном 1 см.

Следует также отметить, что общая идея метода решения задачи магнитной локации, описанная выше, была представлена в работах [9, 40, 44], однако точные алгоритмы и исходные коды не представлены. В данной работе имелась возможность использования программного обеспечения, написанного ранее для конфигурации устройства с тремя 3-хосевыми датчиками. Эта программа была модифицирована для возможности применения в случае конфигурации с четырьмя 3-хосевыми датчиками. Известно, что она также работает по принципу минимизации функционала, однако вид функционала отличается от того, что было представлено выше.

Принимая во внимание невозможность изменения исходных параметров предоставленного программного обеспечения, была написана собственная программа на языке Python, обладающая более широким спектром возможностей. Был использован новый функционал, отличающийся от того, что было представлено в работах [9, 40, 44].

4.2. Аналитическое решение задачи

Существенным прорывом в решении любой обратной задачи можно считать получение результата в виде аналитического выражения. В данной работе впервые удалось получить приближенную аналитическую формулу для нахождения координат магнитного диполя в пространстве. Данный успех был обусловлен использованием бóльшего количества точек измерения, а именно четырех 3-хосевых датчиков магнитного поля, расположение которых показано на рисунке 27. Датчики позволяют измерить проекции вектора магнитной индукции \vec{B} на оси x , y и z . Координаты магнитного диполя (x_0, y_0, z_0) равны:

$$x_0 = \frac{2a \cdot \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_1} \right)^{\frac{2}{3}} \right]}{\left[1 - \left(\frac{B_0}{B_1} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 + \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_2} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 + \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_3} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2}; \quad (37)$$

$$y_0 = \frac{2a \cdot \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_2} \right)^{\frac{2}{3}} \right]}{\left[1 - \left(\frac{B_0}{B_1} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 + \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_2} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 + \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_3} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2}; \quad (38)$$

$$z_0 = \frac{2a \cdot \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_3} \right)^{\frac{2}{3}} \right]}{\left[1 - \left(\frac{B_0}{B_1} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 + \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_2} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 + \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_3} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2}, \quad (39)$$

где $\vec{B}_0(B_{0x}, B_{0y}, B_{0z})$ — индукция магнитного поля в точке O , $\vec{B}_1(B_{1x}, B_{1y}, B_{1z})$ — в точке A , $\vec{B}_2(B_{2x}, B_{2y}, B_{2z})$ — в точке B , $\vec{B}_3(B_{3x}, B_{3y}, B_{3z})$ — в точке C , $B_0 = |\vec{B}_0|$, $B_1 = |\vec{B}_1|$, $B_2 = |\vec{B}_2|$, $B_3 = |\vec{B}_3|$, a — размер базы (рисунок 27). Вывод данных формул очень громоздкий, поэтому в данной работе он не представлен.

Используя более точное приближение удалось получить улучшенную аналитическую формулу, которая в эксперименте дает ошибки по координатам не более 10 %, однако она приняла существенно более сложный вид:

$$\begin{aligned}
 x_0 = \frac{a}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_1} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \cdot \left(\left(\left[1 - \left(\frac{B_0}{B_1} \right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{B_0}{B_2} \right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{B_0}{B_3} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 - \right. \right. \\
 \left. \left. - \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_1} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 - \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_2} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 - \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_3} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
 \left. + \left(\frac{B_0}{B_1} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{B_0}{B_2} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{B_0}{B_3} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right) \cdot \\
 \cdot \left\{ \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_1} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 + \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_2} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 + \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_3} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 \right\}^{-1} + \frac{a}{2};
 \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
 y_0 = \frac{a}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_2} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \cdot \left(\left(\left[1 - \left(\frac{B_0}{B_1} \right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{B_0}{B_2} \right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{B_0}{B_3} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 - \right. \right. \\
 \left. \left. - \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_1} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 - \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_2} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 - \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_3} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
 \left. + \left(\frac{B_0}{B_1} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{B_0}{B_2} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{B_0}{B_3} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right) \cdot \\
 \cdot \left\{ \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_1} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 + \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_2} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 + \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_3} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 \right\}^{-1} + \frac{a}{2};
 \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
 z_0 = \frac{a}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_3} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \cdot \left(\left(\left[1 - \left(\frac{B_0}{B_1} \right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{B_0}{B_2} \right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{B_0}{B_3} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 - \right. \right. \\
 \left. \left. - \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_1} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 - \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_2} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 - \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_3} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
 \left. + \left(\frac{B_0}{B_1} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{B_0}{B_2} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{B_0}{B_3} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right) \cdot \\
 \cdot \left\{ \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_1} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 + \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_2} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 + \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_3} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 \right\}^{-1} + \frac{a}{2};
 \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_1} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 - \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_2} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 - \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_3} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\
& \quad + \left(\frac{B_0}{B_1} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{B_0}{B_2} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{B_0}{B_3} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right). \\
& \cdot \left\{ \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_1} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 + \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_2} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 + \left[1 - \left(\frac{B_0}{B_3} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^2 \right\}^{-1} + \frac{a}{2};
\end{aligned}$$

4.3. Экспериментальная реализация метода магнитной локации

Экспериментальная реализация задачи магнитной локации осложнена рядом обстоятельств. Во-первых, быстрое убывание магнитного поля от расстояния как r^{-3} требует даже на относительно небольших расстояниях измерения очень слабых магнитных полей. Во-вторых, определение координат диполя представляет собой некорректную задачу в том смысле, что погрешность прямых измерений магнитного поля приводит к значительно большей погрешности определения координат диполя.

С целью минимизации влияния данных факторов использовались высокоточные 3-хосевые анизотропные магниторезистивные датчики НМС5983 фирмы Honeywell, поддерживающие возможность температурной компенсации. Данные датчики обладают максимальным разрешением 0.73 мГс и диапазоном измерений ± 8 Гс. Более детальная информация об устройстве представлена в таблице 1.

Размеры	3.0 × 3.0 × 0.9 мм
Напряжение питания	2.5 В
Частота измерений	от 0.75 до 220 Гц
Цифровое разрешение	от 0.73 до 4.75 мГц
Диапазон измерений	±8 Гс
Максимальный уровень шумов	2 мГц

Таблица 1 - Технические характеристики НМС5983.

Для корректной работы и возможности отслеживания работоспособности датчика в режиме реального времени была внедрена система контроля и калибровки. Работа данной системы основана на встроенной возможности внутреннего возбуждения поля. На небольшом удалении от магниторезистивного элемента находится проводник, по которому пропускается постоянный ток. Этот ток создает магнитное поле величиной 1.1 Гс по каждой оси. Последующее измерение этого поля при пропускании тока в обоих направлениях позволяет провести калибровку.

Датчик обладает встроенным 12-битным АЦП. Взаимодействие с датчиком осуществлялось по последовательной асимметричной шине I²C при помощи аппаратной платформы Arduino Uno R3. Данный способ позволил осуществлять быстрый обмен данными для управления датчиком и приема сигнала.

В среде разработки Arduino было написано программное обеспечение, позволяющее управлять режимами работы датчика, а также принимать показания датчика в виде цифрового сигнала. Управление происходит путем записи двоичного кода, соответствующего той или иной настройке, в конфигурационные регистры. Прием данных осуществляется путем чтения информации из регистров, хранящих данные о результатах измерений по каждой оси. Также была реализована система тестирования и калибровки датчиков, описанная выше, которая запускается перед началом работы устройства.

Последовательная шина I²C обладает множеством плюсов, в том числе возможностью одновременного подключения до 127 устройств. Данная

возможность имеется в том случае, если все устройства имеют различные адреса. Однако в нашем случае есть необходимость в одновременном подключении нескольких датчиков с одинаковым адресом, что в общем случае невозможно. В данной работе впервые для задач магнитной локации был применен метод, позволяющий проводить измерения одновременно с 4-х датчиков без потери скорости.

Питание и передача данных между платой Arduino и компьютером осуществлялось при помощи последовательного интерфейса USB 2.0, который обладает всеми необходимыми параметрами для задачи магнитной локации. В частности, данный интерфейс обладает высокой скоростью и достаточной надежностью, а также относительной простотой подключения.

Также было разработано программное обеспечение системы отслеживания показаний в режиме реального времени с использованием языка Visual Basic для персонального компьютера. В список возможностей данного обеспечения входит определение положения магнитного диполя с последующей визуализацией в 3D по полученным показаниям с датчиков. Также была реализована программная методика минимизации помех, создаваемых внешними источниками постоянного магнитного поля.

Существенной проблемой является тот факт, что минимальные отклонения датчиков от необходимого положения, а также изменения в ориентации датчиков друг относительно друга могут приводить к большим ошибкам или даже к ситуациям, когда решение задачи отыскать невозможно. Особенно ярко эта проблема проявляется в случае, когда датчики расположены в разных плоскостях. Современные технологии 3D печати позволили добиться точности в расположении датчиков до десятых долей миллиметра, а отклонение плоскости датчиков от горизонтали не превышает 2° . Модель каркаса установки была спроектирована при помощи профессионального программного комплекса SolidWorks (рисунок 28). Датчики закреплялись на площадках при помощи пластиковых болтов для минимизации помех.

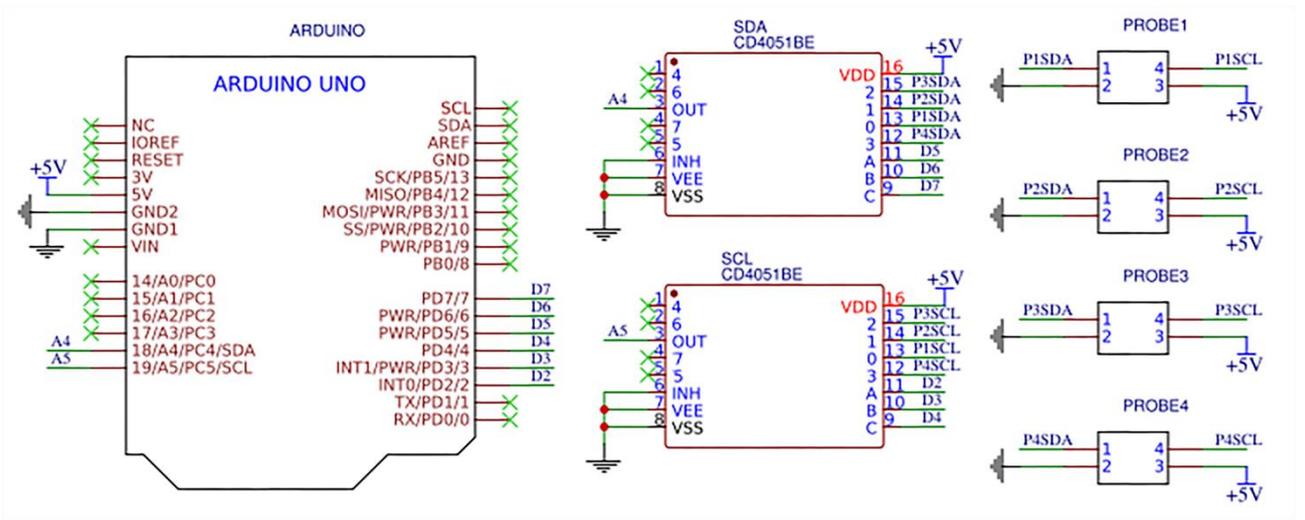


Рисунок 29 - Схема подключения датчиков магнитного поля к платформе Arduino Uno R3 с использованием мультиплексов.

Для достижения компактности готового устройства и удобства коммутации была спроектирована и изготовлена печатная плата, на которой располагаются разъемы для подключения датчиков, а также мультиплексоры (рисунок 30).

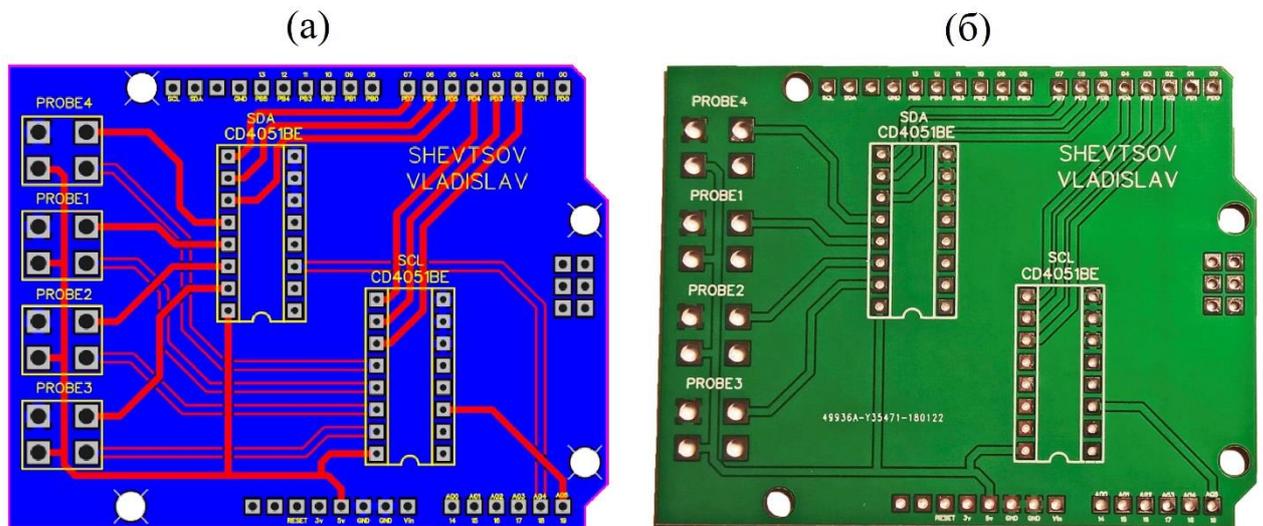


Рисунок 30 - Макет (а) и готовый образец (б) печатной платы.

Экспериментальная установка в режиме измерения представлена на рисунке 31.

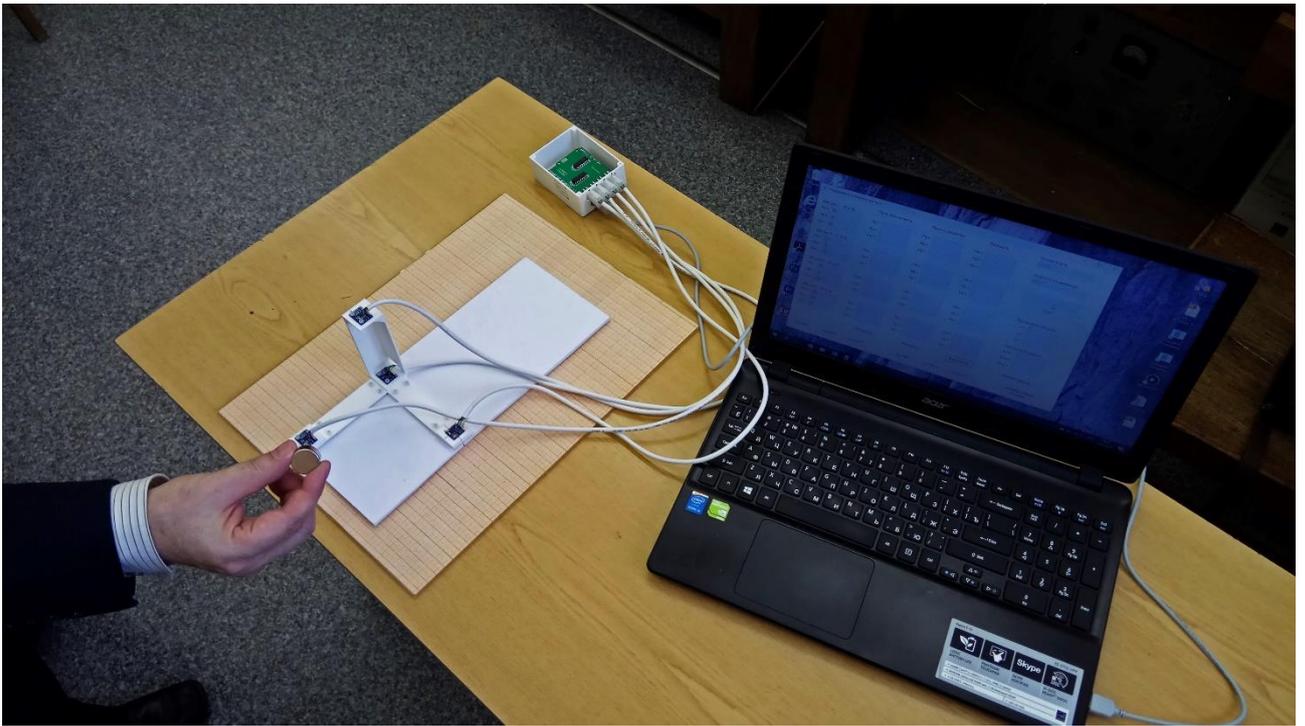


Рисунок 31 - Экспериментальная установка с четырьмя 3-хосевыми датчиками в режиме измерения.

4.4. Экспериментальные результаты

В рамках эксперимента определялось положение магнита в форме цилиндра высотой 1 см и радиусом 1 см. Величина магнитного момента данного образца составляет $2.81 \text{ A} \cdot \text{m}^2$. На рисунке 32 зеленым показано реальное положение магнита, красной стрелкой показано рассчитанное направление магнитного момента. Рассчитанному положению соответствует точка в основании стрелки.

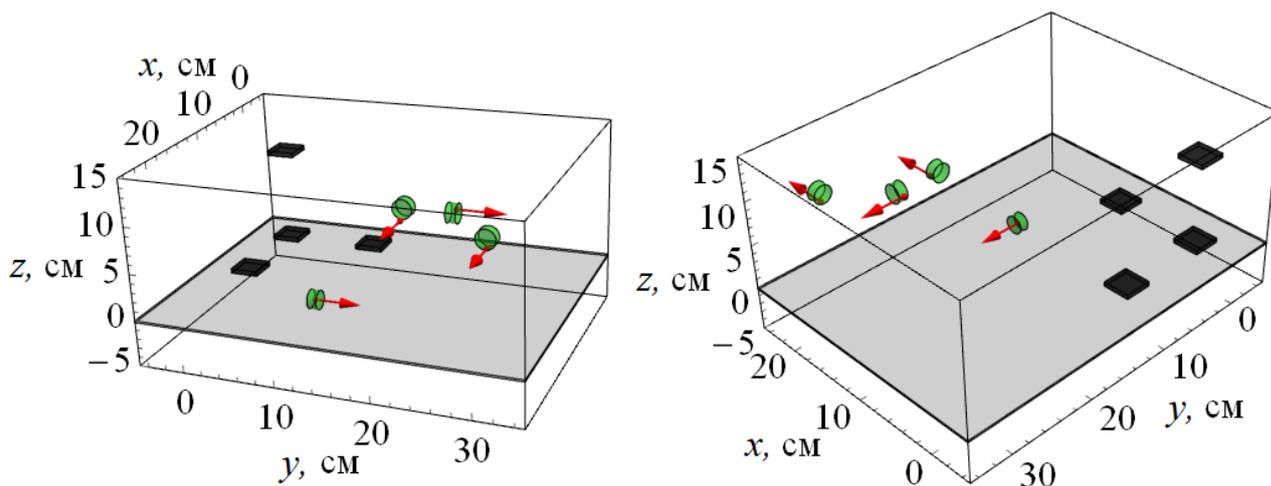


Рисунок 32 - 3D визуализация результатов экспериментальных измерений положения цилиндрического магнита в пространстве.

Во всех проведенных опытах ошибки в определении положения магнита не превышали 1 см. Данная величина определяется шагом сетки при численном решении и выбрана таковой для достижения приемлемого времени вычисления.

4.5. Новый метод измерения магнитных полей

Рассмотрим ферромагнитный шарик, помещенный в однородное внешнее магнитное поле напряженностью \vec{H}_0 . Известно, что намагниченность шарика \vec{M} связана с напряженностью поля \vec{H} внутри шарика следующим выражением:

$$4\pi\vec{M} = (\mu(\vec{H}) - 1)\vec{H}, \quad (43)$$

где μ — эффективная магнитная проницаемость материала, из которого изготовлен шарик. При помещении шарика во внешнее магнитное поле внутри него будет возникать размагничивающее поле, пропорциональное намагниченности \vec{M} шарика

$$\vec{H} = \vec{H}_0 - \frac{4\pi}{3}\vec{M}. \quad (44)$$

Таким образом, подставив (44) в (43) получаем:

$$\vec{H}_0 = \frac{\mu(\vec{H}) \cdot \vec{H}}{3} + \frac{2\vec{H}}{3}. \quad (45)$$

Зависимость магнитной проницаемости μ от напряженности магнитного поля \vec{H} внутри ферромагнетика впервые была получена Столетовым А.Г. и имеет

сложный вид. Используя табличные данные кривой Столетова для электролитического железа [47] и формулу (45) можно построить график зависимости магнитной проницаемости μ от модуля напряженности внешнего поля H_0 (рисунок 33):

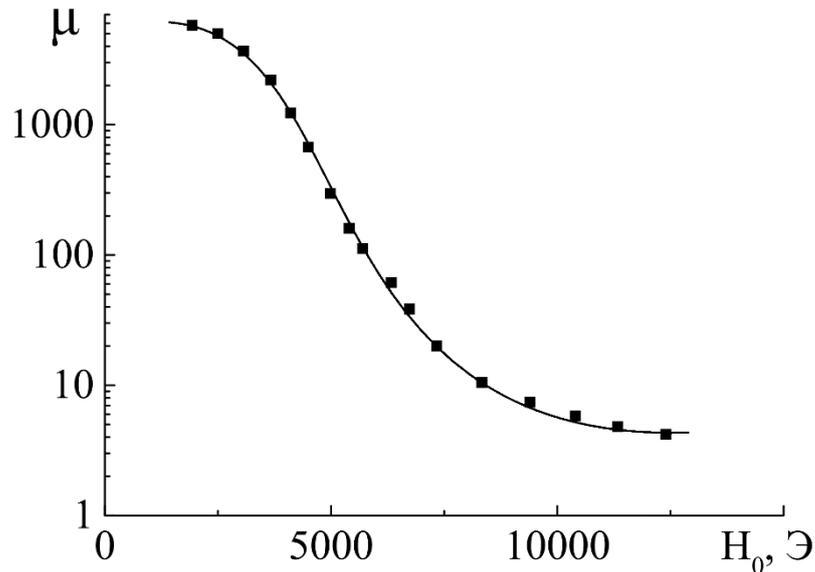


Рисунок 33 - Зависимость магнитной проницаемости μ шарика из электролитического железа от модуля напряженности внешнего магнитного поля H_0 .

Из (43) и (44) можно также получить:

$$\vec{M} = \frac{3}{4\pi} \vec{H}_0 \frac{\mu - 1}{\mu + 2}. \quad (46)$$

Если магнитная проницаемость μ достаточно велика, то формулу (46) можно упростить:

$$\vec{M} = \frac{3}{4\pi} \vec{H}_0. \quad (47)$$

Из рисунка 33 видно, что данное условие выполняется с точностью до 0.1 %, если модуль напряженности внешнего магнитного поля $H_0 < 4$ кЭ.

Учитывая, что

$$\vec{M} = \frac{\vec{p}_m}{V}, \quad (48)$$

где \vec{p}_m — магнитный момент шарика, а V — его объем, окончательно получаем:

$$\vec{H}_0 = \frac{4\pi\vec{p}_m}{3V}. \quad (49)$$

Соотношение (49) позволяет определить величину внешнего магнитного поля \vec{H}_0 в области расположения ферромагнитного шарика по значениям проекций магнитного момента \vec{p}_m шарика, полученным при помощи метода магнитной локации. Основным преимуществом данного метода является возможность дистанционного измерения магнитного поля в агрессивных средах.

В качестве примера рассмотрим магнит в форме прямоугольного параллелепипеда, имеющий размеры $4 \times 4 \times 1.5$ см, поле которого выражается аналитическими формулами [5]. При помощи метода магнитной локации определяется магнитный момент стального шарика радиусом 13.5 мм. Шарик перемещается вдоль прямой, изображенной на рисунке 34.

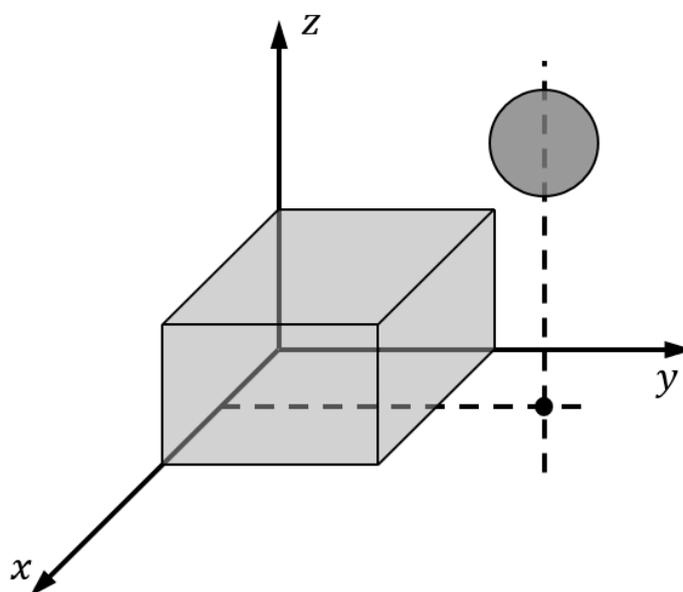


Рисунок 34 - Иллюстрация эксперимента по определению величины поля магнита. Шарик перемещается вдоль пунктирной прямой, параллельной оси z , на расстоянии 2 см от боковой грани магнита.

Сравнение экспериментальных значений и теоретических кривых представлено на рисунке 35.

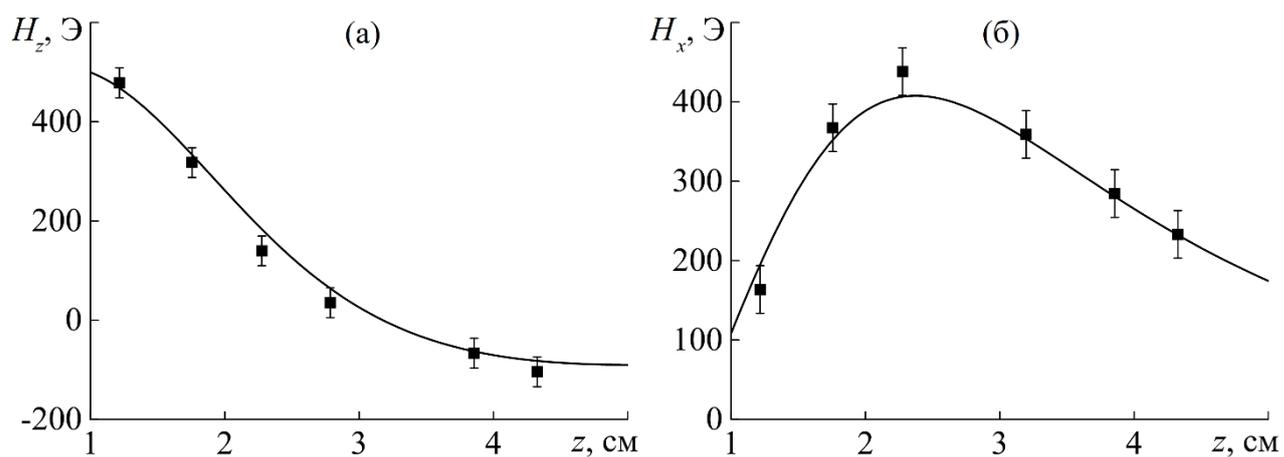


Рисунок 35 - Зависимость проекций магнитного поля H_z на ось z (а) и H_x на ось x (б) параллелепипеда от координаты по оси z .

Хорошее совпадение подтверждает возможность измерения магнитного поля с помощью метода магнитной локации.

ВЫВОДЫ

На основании изложенного в данной диссертации материала можно сделать следующие выводы:

1. Измерение магнитного поля полосковых проводников датчиками Холла и магниторезистивными датчиками позволяет обнаружить различного рода дефекты на их поверхности. Это подтверждается точным совпадением экспериментально полученных значений магнитного поля в области дефекта в виде прямоугольного выреза с теоретически рассчитанными по имеющимся аналитическим формулам;
2. В качестве одного из методов диагностики топологии магнитного поля постоянного магнита можно использовать экспериментальное измерение распределения этого поля и сравнение его с теоретическим расчетом для той же структуры. На основе сравнения можно установить степень однородности намагниченности данного образца. Также, с помощью полученных в статье аналитических формул для поля параллелепипеда, намагниченного однородно под углом к боковым граням, возможно оценить угол поворота намагниченности относительно оси симметрии;
3. Одной из наиболее сложных и важных задач проектирования таких систем, как статоры электродвигателей, магнитные втулки и т.д., является вычисление коллективного магнитного поля, обусловленного системой магнитных зерен, и энергии их взаимодействия, так как равновесная структура определяется минимумом результирующей магнитной энергии ансамбля таких частиц. В данной работе представлен расчет энергии взаимодействия зерен с учетом их формы. Приведена аналитическая формула для энергии взаимодействия двух кубических магнитов, расположенных в одной плоскости. Также проведено сравнение с методом крупных частиц, в котором каждое зерно заменяется эффективным магнитным диполем, помещенным в центр зерна, с магнитным моментом, равным магнитному

моменту данного зерна. Показано наличие существенных различий при малых расстояниях между зернами;

4. В данной работе представлено развитие метода магнитной локации с использованием трех 3-хосевых датчиков магнитного, а также впервые была предложена схема с использованием четырех 3-хосевых магниторезистивных датчиков магнитного поля, расположенных в разных плоскостях. Благодаря использованию современных технологий, удалось создать устройство, способное определять положение магнита с магнитным моментом $2.81 \text{ A} \cdot \text{m}^2$ в области $1 \times 1 \times 1 \text{ м}$ с точностью $\pm 1 \text{ см}$.
5. Существенным прорывом в решении любой обратной задачи можно считать получение результата в виде аналитического выражения. В данной работе, благодаря использованию четырех 3-хосевых датчиков, впервые удалось получить приближенную аналитическую формулу для нахождения координат магнитного диполя в пространстве. В эксперименте данный метод давал погрешность не более 10 %.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение приведем основные результаты, полученные в данной работе:

1. Показана возможность выявления дефектов в полосковых проводниках печатных плат посредством измерения чувствительными магниторезистивными датчиками магнитных полей, вызванных неоднородным распределением токов в области дефектов;
2. Получено аналитическое решение прямой задачи магнитостатики для параллелепипеда, однородно намагниченного в произвольном направлении;
3. Найдена аналитическая формула для энергии взаимодействия двух объемных кубических магнитов. Показано существенное отличие этой энергии от аналогичной энергии дипольного приближения метода крупных частиц, который обычно используется в прикладных программах для расчета подобных систем;
4. Разработано и создано новое эффективное устройство для магнитной локации, существенно превосходящее по всем параметрам известные аналогичные разработки. Устройство основано на одновременном измерении магнитного поля 12-ю магниторезистивными датчиками и способно, например, определять положение и ориентацию небольшого цилиндрического магнита $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ (радиусом 1 см и высотой 1 см) в области $1 \times 1 \times 1$ м с точностью ± 1 см в режиме реального времени (за время, не превышающее 40 мс);
5. На основе созданного устройства для магнитной локации разработан новый метод измерения напряженности магнитного поля посредством регистрации индуцированного этим магнитным полем магнитного дипольного момента небольшого ферромагнитного шарика, помещенного в исследуемую область. Принципиальным отличием этого метода от других способов измерения магнитного поля является отсутствие каких-либо держателей и подводящих проводов к измерительному инструменту (шарику) и возможность измерения

магнитного поля в широком диапазоне температур, давлений и в присутствии агрессивной среды;

- б. Получено приближенное аналитическое решение обратной задачи магнитостатики, т.е. определение положения и ориентации магнитного диполя в пространстве по результатам измерения магнитного поля 12-ю датчиками разработанного устройства для магнитной локации. Данное решение справедливо для достаточно больших расстояний от датчиков.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. William J. Greig. *Integrated Circuit, Packaging, Assembly and Interconnections*. New York: Springer, 2007.
2. Zhang P., Lau Y. Y., Gilgenbach R. M. Minimization of thin film contact resistance // *Applied Physics Letters*. 2010. Vol. 97. Iss. 20. P. 204103.
3. Стрэттон Дж.А. *Теория электромагнетизма*. М.–Л.: ГТТИ, 1948.
4. Engel-Herbert R., Hesjedal T. Calculation of the magnetic stray field of a uniaxial magnetic domain // *Journal of Applied Physics*. 2005. Vol. 97. Iss. 7. P. 074504.
5. Вагин Д.В., Герасименко Т.Н., Поляков П.А. Точное аналитическое выражение для индукции магнитного поля образца прямоугольной формы // *Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия*. 2008. № 6. С. 53–55.
6. Furlani E.P., Sahoo Y. Analytical model for the magnetic field and force in a magnetophoretic microsystem. // *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2006. Vol. 39. № 9. P. 1724–1732.
7. Хокни Р., Иствуд Дж. *Численное моделирование методом частиц*. М.: Мир, 1987.
8. Балабанов А.Б., Касаткин С.И., Муравьев А.М. Система магнитной локации на примере капсулы эндоскопа // *Датчики и системы*. 2012. № 12. С. 2–6.
9. Wang X., Meng M.Q.-H. Study of a position and orientation tracking method for wireless capsule endoscope // *International Journal of Information Acquisition*. 2005. Vol. 2. № 2. P. 113–121.
10. Katie M.P. Localization Method for a Magnetic Capsule Endoscope Propelled by a Rotating Magnetic Dipole Field / *IEEE ICRA*. Karlsruhe, Germany, 2013.
11. Veron B., Abadie J., Hubert A. Magnetic manipulation with several mobile coils towards gastrointestinal capsular endoscopy. URL: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00772408>

12. Aziz S.M., Grcic M., Vaithianathan T. A Real-Time Tracking System for an Endoscopic Capsule using Multiple Magnetic Sensors // *Smart Sensors and Sensing Technology*, Springer. 2008. P. 201–218.
13. Карпов Р.Г. Алгоритмическая, программная и аппаратная реализация системы магнитной локации скрытых объектов // *Известия вузов. Электроника*. 2009. № 3(77). С. 53–60.
14. Батыгин Ю.В., Бондаренко А.Ю. Силы, действующие на тонкостенный немагнитный проводник, в проникающем поле плоского одновиткового соленоида // *Техн. електродинаміка*. 2010. № 1. С. 9–14.
15. Lee J.S. A direct field formulation for transient eddy current calculations in thin conductors // *IEEE Transactions on Magnetics*. 1991. Vol. 27, № 5. P. 4000–4003.
16. Brambilla R., Grilli F., Martini L. Integral equations for the current density in thin conductors and their solution by the finite-element method // *Supercond. Sci. Technol*. 2008. Vol. 21. P. 105008.
17. Fangohr H., Chernyshenko D.S., Franchin M. Joule heating in nanowires // *Physical Review B*. 2011. Vol. 84. P. 054437.
18. Petersen T.H., Carpenter K.H., May C.M. Comparison of Experimental Measurements of Current Distribution in a Flat Conductor With Simulated Results From the Partial Inductance Method // *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*. 2009. Vol. 51, № 2. P. 345–350.
19. Афанасьев А.А., Белов В.В., Ефимов В.В. Расчет магнитного поля в однофазных магнитоэлектрических вентильных двигателях методом конформных отображений // *Вестник Чувашского Университета*. 2011. № 3. С. 21–32.
20. Зайцев Д.А., Модин И.Н. Расчет магнитного поля постоянного тока над трехмерными вытянутыми проводящими объектами // *Разведка и охрана недр*. 2010. № 8. С. 22–27.
21. Rinke Wijngaarden J., Heeck K., Spoelder H. J. W. Fast determination of 2D current patterns in flat conductors from measurement of their magnetic field // *Physica C: Superconductivity*. 1998. Vol. 295, № 3–4. P. 177–185.

22. Lozanova S.V., Noykov S.A., Ivanov A.J. Functional multisensor for temperature and subsequent 3D magnetic-field measurement // *Procedia Engineering*. 2015. Vol. 120. P. 824–827.
23. Sinha B., Ramulu T.S., Kim K.W. Planar Hall magnetoresistive aptasensor for thrombin detection // *Biosensors and Bioelectronics*. 2014. Vol. 59. P. 140–144.
24. Lai Y.-S., Kao C.-L. Electrothermal coupling analysis of current crowding and Joule heating in flip-chip packages // *Microelectronics Reliability*. 2006. Vol. 46. P. 1357–1368.
25. Герасименко Т.Н. Применение конформных преобразований к расчетам распределений токов, температур и магнитных полей двумерных проводников: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.02. М., 2012.
26. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: Издательство иностранной литературы, 1954.
27. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
28. Иванов В.И., Попов В.Ю. Конформное отображение и их приложения. М.: Едиториал УРСС, 2002.
29. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. М.: ФИЗМАТ–ГИЗ, 1962.
30. Вагин Д.В., Касаткин С.И., Поляков П.А. Полосковые концентраторы магнитного поля для магниторезистивных датчиков тока и датчиков Холла // *Датчики и системы*. 2010. № 12. С. 25–29.
31. Резинкина М.М. Численный расчет магнитного поля и магнитного момента ферромагнитных тел сложной пространственной конфигурации // *Журнал технической физики*. 2009. Том 79. Вып. 8. С. 8–17.
32. Соколов Д.Ю. Синтез высокооднородного постоянного поля постоянного магнита МР-томографа и задача реконструкции плотности объекта: дис. ... канд. техн. наук: 05.11.01. СПб., 2007.
33. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: ГТТИ, 1957.

34. Muhsein M.Y., Sarah H.O., Glynn J.A. MFM Study of a Sintered Nd–Fe–B Magnet: Analyzing Domain Structure and Measuring Defect Size in 3-D View // IEEE Transactions on Magnetics. Vol. 52. Iss. 6.
35. Yutaka M. Recent development of Nd–Fe–B sintered magnets and their applications // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 2006. Vol. 303. Iss. 2. P. 344–347.
36. Bader S.D. Opportunities in nanomagnetism // Reviews of Modern Physics. 2006. Vol. 78. Iss. 1.
37. Санков О.В., Легкий В.Н. Исследование феррозондовых датчиков магнитных объектов для систем ближней локации // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Машиностроение”. 2009. № 2. С. 90–101.
38. Горделий В.И. Магнитный дефектоскоп для контроля железнодорожных рельсов // Патент России № 2310836. 2006. Бюл. № 32.
39. Касаткин С.И., Поляков П.А., Абакумов А.А. Манипулятор для виртуальной реальности // Датчики и системы. 2001. № 11. С. 6–9.
40. Касаткин С.И., Поляков О.П., Поляков П.А. Возможности реализации аппаратно-программного комплекса трехмерной мыши на основе решения обратной задачи магнитной локации // Датчики и системы. 2005. № 8. С. 33–36.
41. Kasatkin S.I., Polyakov O.P., Rusakova N.E. On uniqueness of solution of a reverse problem of magnetic location // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 2006. Vol. 305. P. 361–364.
42. Wang X. Study on Magnetic Localization and Actuation of Active Capsule Endoscope: Ph.D. thesis / The Chinese University of Hong Kong. 2006.
43. Артамонов Е.И., Балабанов А.Б., Касаткин С.И. Система магнитной локации на примере капсулы эндоскопа // Датчики и системы. 2012. № 12. С. 2–5.
44. Карпов Р.Г. Метода анализа и обработки данных для устройства трехмерной магнитной локации: Дис. ... к. техн. наук: 05.13.01 – М., 2009.
45. Григорашвили Ю.Е., Притула В.В., Стицей Ю.В. Альтернативный метод оценки состояния защитных покрытий законченных строительством

трубопроводов // Трубопроводный транспорт: теория и практика. 2013. № 6.
С. 34–39.

46. Григорашвили Ю.Е., Бухлин А.В., Мингазин В.Т. Системы магнитовидения для обнаружения скрытых объектов // Известия вузов. Электроника. 2015. Том 20. № 5. С. 551–557.
47. Яковлев К.П. Краткий физико-технический справочник. М.: ФИЗМАТ–ГИЗ, 1960. Т. 1. С. 355.