



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Московский государственный университет им. М. В.
Ломоносова»

Физический факультет Кафедра Общей физики

Бакалаврская работа на тему: «Возбуждение и
резонанс электромагнитных волн в периодических
структурах с электронным потоком при малом
пространственном заряде»

Выполнила студентка 405 группы

Ланкина Алена Дмитриевна

Научный руководитель

к.ф.-м.н Нифанов А. С.

Допущен к защите

Заведующий кафедрой

д. ф.- м. н. Салецкий А. М.

Москва 2018 г.

Оглавление

Введение.....	3
1 Теоретические и экспериментальные исследования мощных устройств СВЧ с длительным взаимодействием (Обзор литературы).....	7
1.1 Теоретические подходы к анализу взаимодействия потока и поля замедляющих систем.	7
1.2. Конструкции и достижения мощных источников релятивистской СВЧ и электроники.	9
2. Матричный многомодовый метод анализа взаимодействия электронного потока и поля сверхразмерного периодического волновода. Малосигнальное приближение.....	11
2.1. Постановка задачи.....	11
2.2 Электронный поток. Волны пространственного заряда основного типа.	12
2.3 Возбуждение вихревого поля на участке гладкого волновода. Матрица передачи.	16
2.4 Трансформация вихревых полей на скачке радиуса волновода.	22
3. Дисперсионные характеристики периодического волновода с учетом несимметричных мод.....	26
3.1 Рассмотрение альтернативных вариантов сшивания электромагнитных полей. Дисперсионные характеристики низшей аксиально-симметричной моды периодического волновода.....	26
3.2 Построение матрицы преобразования полей для несимметричных мод E_{1N}. Дисперсионные характеристики периодического волновода.	29
Заключение.	33
Литература:.....	34

Введение

В настоящее время актуальна задача получения распространение мощного и сверхмощного (10^{10} Вт и выше) СВЧ излучения сантиметрового и миллиметрового диапазона длин волн. Такое излучение может использоваться для задач радиолокации, передачи энергии на большие расстояния, в системах дальней связи, при изучении взаимодействия электромагнитного излучения с веществом, в биологических исследованиях и т.д.

К наиболее перспективным типам приборов мощной микроволновой электроники относятся источники излучения, принцип действия которых основан на длительном взаимодействии (синхронизме) релятивистского электронного потока, формируемого катодами со взрывной эмиссией, с электромагнитным полем периодических (замедляющих) электродинамических структур. Наибольшее усиление и устойчивая генерация в таких устройствах реализуется при синхронизме потока и поля на частотах вблизи границ полосы прозрачности замедляющих систем (прежде всего вблизи π -вида), где проявляются резонансные свойства, т.е. в них одновременно могут возбуждаться прямые и обратные волны, а волновые и колебательные процессы оказываются связанными. В релятивистской электронике больших мощностей наиболее перспективными оказались периодические электродинамические структуры с поперечными размерами, значительно превышающими длину волны излучения (диаметр $D \gg \lambda_{ген}$, сверхразмерные волноводы), в частности в многоволновом черенковском генераторе (МВЧГ) была получена рекордная мощность излучения в 3-х сантиметровом диапазоне длин волн – 10^{10} Вт. Особенностью таких волноведущих систем является то, что в рабочем диапазоне длин волн могут распространяться большое число «холодных» мод структуры, которые могут в системах конечной длины оказывать существенное влияние на структуру возбуждаемого потоком поля.

Основными проблемами в таких устройствах является получение одночастотной генерации с высокой эффективностью взаимодействия электронного потока и поля в генераторах, нахождение режимов с надежной селекцией мод и высоким уровнем усиления. Создание устройств с такими свойствами невозможно без детального изучения линейных и нелинейных процессов взаимодействия потока и поля в таких системах.

Для дальнейшего повышения мощности излучения представляется перспективным переход к все более пространственно развитым структурам, использование многосекционных устройств, а также переход к многолучевым потокам.

Используемые в настоящее время методики расчета процессов взаимодействия потока и полей секционированных сверхразмерных периодических волноводов основаны на строгих электродинамических методах, включают в себя учет нелинейных и нестационарных процессов и требуют исключительно больших вычислительных ресурсов. Как правило, большинство методик ограничиваются рассмотрением взаимодействия трубчатого потока и с полями аксиально – симметричных мод круглого периодического волновода. Зачастую, результаты многодневных расчетов не допускают наглядной физической интерпретации на языке связанных волн, характерном для традиционной СВЧ - электроники.

Цель данной работы в развитии матричного многомодового метода, который в линейном приближении позволяет без больших вычислительных затрат проводить анализ процессов взаимодействия потока и поля сверхразмерных периодических волноводов. Было поставлено две задачи: изменить процедуру сшивания полей на скачке радиуса волновода и модернизировать эту методику для расчета «холодных» (без потока) дисперсионных характеристик несимметричных мод круглого волновода с периодической неоднородностью.

Квалификационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Работа содержит **35** страниц основного текста, **6** рисунков, список литературы из **29** наименований.

В первой главе дается обзор литературы, отражающий современное состояние рассматриваемой проблемы. Обсуждаются различные теоретические подходы к анализу длительного взаимодействия электронного потока и поля. Рассматриваются различные методики, связанные с выделением пространственных гармоник полей, «синхронных» с электронным потоком; методики, основанные на выделении в электродинамической структуре резонансных объемов с известной структурой мод; более строгие электродинамические методы, основанные на совместном решении уравнений Максвелла и уравнений движения пучка.

Анализируются достижения мощной микроволновой электроники СВЧ сантиметрового диапазона длин волн. Обсуждаются вопросы, связанные с формированием сильноточных электронных потоков. Рассматриваются особенности и основные тенденции развития релятивистской СВЧ электроники больших мощностей, приводятся характеристики типичных релятивистских источников.

Дается сводка основных результатов исследований длительного взаимодействия электронных потоков с полями одномодовых и сверхразмерных периодических структур. Приводятся известные данные относительно особенностей взаимодействия потока и поля вблизи границы полосы прозрачности, соответствующей "π"-виду колебаний низшей аксиально – симметричной моды структуры.

Во второй главе излагается используемый в работе матричный многомодовый метод анализа взаимодействия электронного потока с полями сверхразмерных периодических волноводов. Уравнения теории записываются в приближении малого сигнала в рамках кулоновской калибровки потенциалов с разделением полей и токов на вихревые и потенциальные части. Электродинамическая структура разбивается на участки

гладких волноводов с известной структурой мод. В линейном приближении уравнения движения потока и уравнения возбуждения участков гладких волноводов сводятся к матричному виду, удобному для численного анализа.

Постоянные распространения собственных волн связанной системы (поле – поток) и их структура находятся из решения задачи на собственные значения и собственные вектора матрицы передачи отдельного периода замедляющей структуры. Анализ решения дисперсионного уравнения позволяет найти условия наиболее оптимального взаимодействия потока и поля.

В третьей главе записаны уравнения для модернизированого метода сшивания полей при скачкообразном изменении радиуса периодического волновода, записаны уравнения для расчета «холодных» дисперсионных характеристик несимметричной моды E_{1n} . Приведены данные численного анализа.

1 Теоретические и экспериментальные исследования мощных устройств СВЧ с длительным взаимодействием (Обзор литературы).

1.1 Теоретические подходы к анализу взаимодействия потока и поля замедляющих систем.

При анализе устройств традиционной электроники СВЧ (ЛОВ, ЛБВ), основанных на длительном взаимодействии электронного потока с полями периодических структур, большое распространение получили методы, связанные с разложением электромагнитного поля по модам и с выделением гармоник поля, синхронных с электронным потоком, с последующим решением уравнений возбуждения этих полей [1].

Многие приборы СВЧ электроники основаны на взаимодействии электронных потоков с полями электродинамических систем, в которых могут быть выделены периодически повторяющиеся резонансные области с известной структурой мод. Теоретическое рассмотрение удобно проводить при решении уравнений поля в рамках кулоновской калибровки потенциалов с разделением полей и токов на вихревые и потенциальные части [2]. При таком подходе возбуждение поля происходит не конвекционным током пучка, а распределенным во всем пространстве структуры вихревым током. Такой подход позволяет преодолеть многие трудности в анализе энергообмена потока и поля.

Если ограничиться приближением, что структура электромагнитного поля меняется слабо, то в каждой ячейке резонансной электродинамической системы структура мод может считаться фиксированной даже при введении электронного потока. Такой подход позволяет рассматривать каждый отдельный резонатор как волноводный трансформатор, описываемый многополюсником, включающим электронный поток. Вся

электродинамическая система представляется в виде цепочки связанных многополюсников. Чаще всего при помощи такого подхода анализируются одномодовые электродинамические системы, описываемые связанными четырехполюсниками которые, в свою очередь, заменяются эквивалентными схемами. Методы, связанные с введением эквивалентных схем, обладают простотой и наглядностью. Элементы эквивалентных схем находятся из решения электродинамической задачи с учетом вариационных принципов и уточняются данными эксперимента. Такие методики были развиты, в основном, в связи с необходимостью анализа работы мощных ЛБВ на связанных резонаторах, в том числе вблизи границ полосы прозрачности системы. На этапе создания первых многоволновых черенковских генераторов[4] такой подход использовался для анализа процессов взаимодействия потока и поля, включая продольное и поперечное взаимодействие.

Для анализа взаимодействия электронных потоков и электромагнитных полей сверхразмерных волноводов необходимо использовать точные электродинамические методы. К таким методам можно отнести подходы, основанные на неполном методе Галеркина [5-9]. В последнее время такие методы широко используются для анализа усиления и самовозбуждения многоволновых релятивистских источников в линейном приближении с учетом возбуждения несимметричных мод [10]. К достоинствам методов линейной теории, основанных на неполном методе Галеркина, следует отнести относительно высокую скорость счета, позволяющую детально анализировать резонансные и волноведущие свойства электродинамической системы, процессы усиления и условия самовозбуждения генератора.

Для анализа процессов установления генерации и конкуренции мод в черенковских устройствах на сверхразмерных электродинамических структурах перспективным оказывается развитие методик, использующих приближение о медленном изменении амплитуд полей во времени[11].

К особой группе следует отнести прямые методы решения краевых задач микроволновой электроники: сеточные методы, методы конечных элементов, методы интегральных уравнений [12-14]. С помощью таких методов удастся получить наиболее точное решение задачи о возбуждении электромагнитных полей, однако требуют больших вычислительных затрат, не всегда удобны для получения массовых результатов и проведения детального анализа физических процессов в микроволновых источниках черенковского типа.

1.2. Конструкции и достижения мощных источников релятивистской СВЧ и электроники.

Релятивистская электроника бурно развивается в последние 30 лет в связи с возможностью использования источников мощных электронных потоков - сильноточных ускорителей. Важной проблемой, определяющей состояние экспериментальных достижений, является формирование моноэнергетических сильноточных релятивистских электронных потоков. В релятивистской электронике широко используются сильноточные электронные пучки, формируемые коаксиальными диодами с магнитной изоляцией, использующими взрывную эмиссию электронов [15-16].

Большая часть современных работ в области релятивистской СВЧ электроники относится к исследованию излучения электромагнитных волн СВЧ диапазона в релятивистском черенковском генераторе на гофрированном или диафрагмированном волноводе. Стремление к обеспечению одночастотного режима генерации привело к выбору достаточно малых поперечных размеров волноводов - порядка длины генерируемой волны [17-18]. К наибольшим достижениям в этом направлении следует отнести получение на таком генераторе мощности излучения свыше 1 ГВт в 3-х сантиметровом диапазоне длин волн при КПД генерации 30% [19-20]. Принципиальными трудностями при создании мощных генераторов с поперечными размерами порядка длины

генерируемой волны является ограничение величины и длины импульса излучения, прежде всего влиянием высокочастотного пробоя и появлением плазмы в замедляющей структуре генератора. Для перехода к менее напряженным режимам (меньшим плотностям тока и плотностям мощности у стенок структуры) перспективными представляются устройства с пространственно развитыми электродинамическими структурами [21-22]. Работа таких приборов, как правило, определяется несколькими механизмами воздействия. Одной из основных проблем в таких устройствах является проблема селекции мод. Исследованию возможности получения черенковского излучения при взаимодействии потока с поверхностными волнами посвящены работы [21-22,25]. Рекордная мощность $P_{свч} \sim 15$ ГВт получена в многоволновом черенковском генераторе в 3-х сантиметровом диапазоне длин волн [4]. Большой интерес для получения сверхбольших мощностей представляют многомодовые или многоволновые усилители и генераторы на секционированных сверхразмерных замедляющих структурах. В отличие от многомодовых устройств, в многоволновых усилителях и генераторах, не только снимается трудная задача селекции мод, но используется возможность получения направленного излучения [24].

В начале 90-х годов интенсивные экспериментальные исследования в этой области в России сильно замедлились, однако, возобновление этих работ представляется возможным в силу развития практически важных применений мощного и сверхмощного излучения в таких областях как короткоимпульсная локация, ускорение заряженных частиц, силовая электронная борьба, нетепловое воздействие мощных электромагнитных импульсов [26].

2. Матричный многомодовый метод анализа взаимодействия электронного потока и поля сверхразмерного периодического волновода. Малосигнальное приближение

2.1. Постановка задачи.

Для описания полей, возбуждаемых в устройствах на сверхразмерных электродинамических структурах, нужно учитывать взаимодействие волн электронного потока не только с полями синхронными с электронным потоком, но и с высшими типами мод (несинхронные поля).

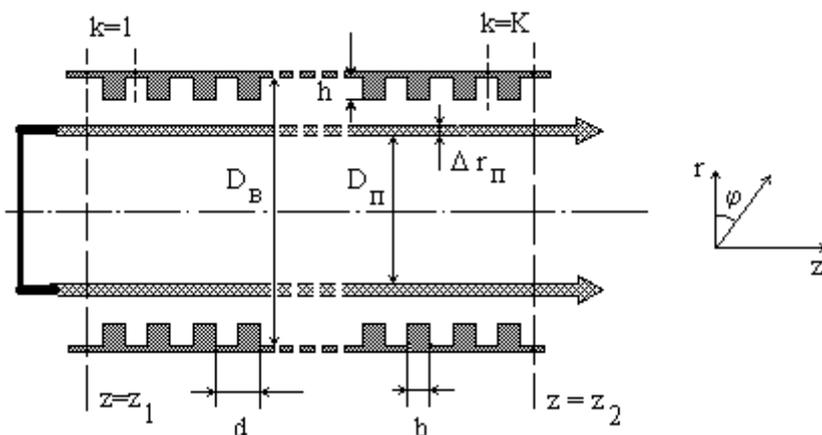


Рис.1 Участок периодического волновода с электронным потоком.

Рассматривается отрезок сверхразмерного (диаметр $D \gg \lambda_{ген}$) аксиально-симметричного волновода, соединенного в сечениях z_1 и z_2 с двумя гладкими полубесконечными волноводами,

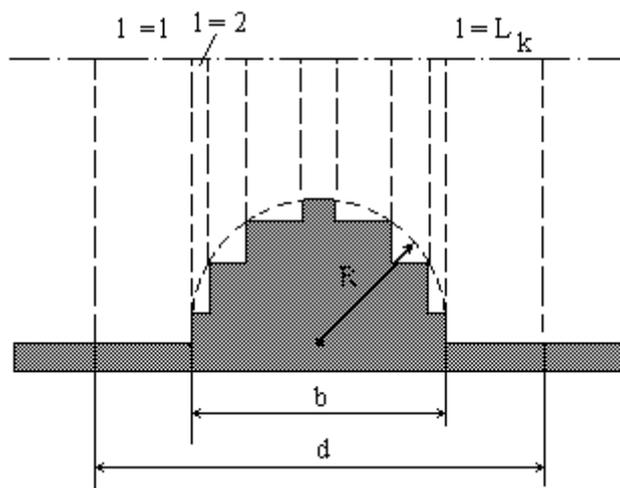


Рис. 2 Разбиение неоднородности системы на последовательность участков гладких волноводов.

рис. 1. Задан период волновода d , глубина гофрировки h , фиксирована форма поверхности.

Волновод возбуждается на входе полем одной или несколькими выделенными модами гладкого волновода. Рассеяние полей на периодической структуре приводит к возбуждению объемных и

поверхностных волн. Одна или несколько волн находятся в синхронизме с трубчатым электронным потоком. На выходе волновода излучается многомодовое поле. Для перехода к матричному анализу электродинамическая система разбивается плоскостями, перпендикулярными оси, рис. 2. Предлагается метод анализа стационарных (на частоте ω) процессов, основанный на разложении вихревых полей электродинамических систем по системам собственных функций выделенных объемов и дальнейшем сшивании этих полей с учетом непрерывности потока Умова-Пойнтинга.

Произвольный аксиально-симметричный нерегулярный волновод представляется в виде последовательности участков гладких волноводов с фиксированным диаметром (см. рис.1). Для каждого выделенного участка с номером записываются уравнения возбуждения вихревого электрического и магнитного полей. В пределах каждого участка вихревое электрическое и магнитное поля рассматриваются в виде суперпозиции прямых и обратных мод гладкого волновода. В общем случае может быть рассмотрено возбуждение симметричных и несимметричных полей E- и H- типов. В рамках конкретной реализации используется симметрия задачи и рассматриваются только аксиально-симметричные моды E_{0n} - типа.

2.2 Электронный поток. Волны пространственного заряда основного типа.

При решении задач электроники уравнения Максвелла дополняются уравнениями движения. Для отдельного электрона оно имеет вид

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\eta}{\gamma} \left\{ \vec{E} + [\vec{v}, \vec{H}] - \frac{v}{c^2} (\vec{v}\vec{E}) \right\} \quad (2.1)$$

где $\eta = |e|/m_0$, e и m_0 - заряд и масса электрона, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ -

релятивистский фактор, c – скорость света.

В случае малых сигналов в приближении большого фокусирующего магнитного поля (магнитное поле $B_0 \rightarrow \infty$) в электронном потоке могут возбуждаться только волны пространственного заряда основного типа.

Уравнение движения в этом случае удобно записать, введя понятие кинетического потенциала

$$V^e = \frac{mc^2 - m_0c^2}{|e|} = \frac{c^2}{\eta}(\gamma - 1).$$

Выделяя постоянную V_0 и переменную V_1^e составляющие на частоте ω для кинетического потенциала $V^e = V_0 + \text{Re}(V_1^e e^{i\omega t})$, получаем из (2.8)

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + i\frac{\omega}{v_0}\right)V_1^e = -(E_{nz} + E_{\phi z}), \quad (2.1)$$

здесь $E_{nz}, E_{\phi z}$ - потенциальная и вихревая составляющие продольного электрического поля в области пучка.

В частности, для тонкого кольцевого потока в круглом волноводе при

условии $\frac{\omega_p}{v_0} \ll \frac{\mu_1}{r_T}$ имеем

$$E_{nz} = \frac{i\rho_1}{\pi r_T^2 \epsilon_0} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_l}{r_T} r_{\Pi}\right)}{J_1^2(\mu_l)} \frac{\beta_e}{\left(\frac{\mu_l}{r_T}\right)^2 + \beta_e^2},$$

где ρ_1 - переменная составляющая линейной плотности заряда, $\beta_e = \omega/v_0$, r_n - средний радиус потока. Здесь предполагается, что поток является тонким, это соответствует условию $\Delta r_n \ll \pi v_0/\omega$.

Уравнение (2.1) дополним уравнением непрерывности, которое после разложения тока и линейной плотности заряда на постоянную и переменную составляющие $I = I_0 + \text{Re}(I_1 e^{i\omega t})$, $\rho = \rho_0 + \text{Re}(\rho_1 e^{i\omega t})$ принимает вид

$$\frac{\partial I_1}{\partial z} + i\omega\rho_1 = 0$$

Используя связь между током, плотностью заряда и скоростью $I = \rho v$, а также учитывая определение кинетического потенциала, получаем

$$\rho_1 = \frac{I_1}{v_0} + \frac{\rho_0 V_1^e}{V_0(\gamma_0 + 1)\gamma_0},$$

где $\gamma_0 = 1 + \frac{V_0(\text{kB})}{511}$ - релятивистский фактор для невозмущенного потока.

После подстановки значений в (2.1) получаем систему уравнений, описывающую продольные колебания в электронном потоке:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + i\beta_e\right)V_1^e = iZ_e\beta_q I_1 - E_{\text{вз}},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + i\beta_e\right)I_1 = i\beta_q \frac{V_1^e}{z_e},$$

где $\beta_q = \frac{\omega_q}{v_0}$, $\omega_q = \omega_p \sqrt{R}$ - редуцированная плазменная частота,

$\omega_p = \sqrt{\frac{\eta J_0}{\gamma_0 S_{\Pi} v_0 \epsilon_0}}$ - плазменная частота бесконечно широкого потока,

$$R = \frac{S_{\Pi}}{\pi r_{\Gamma}^2 \gamma_0^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_0^2\left(\frac{\mu_l}{r_{\Gamma}} r_{\Pi}\right)}{J_1^2(\mu_l)} \frac{1}{\left(\frac{\mu_l}{r_{\Gamma} \beta_e}\right)^2 + 1} - \text{коэффициент редукции},$$

$Z_e = \gamma_0(\gamma_0 + 1) \frac{V_0}{|I_0|} \frac{\omega_q}{\omega}$ - эквивалентное волновое сопротивление электронного

пучка, S_{Π} - площадь поперечного сечения потока.

Уравнения приводятся к симметричной форме после введения амплитуд быстрой a_{q+} (БВПЗ) и медленной a_{q-} (МВПЗ) волн пространственного заряда:

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} + i(\beta_e \pm \beta_q)\right] a_{q\pm} = -\frac{2}{\sqrt{2Z_e}} E_{\text{вз}} \quad (2.2)$$

где $a_{q\pm} = \frac{2}{\sqrt{2z_e}} [V_1^e \pm Z_e(-I_1)]$

Воспользуемся разложением полей в стационарном приближении:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{с}} &= \sum_{n=1}^N [C_n^+(z) \vec{E}_n^+ + C_n^-(z) \vec{E}_n^-] \\ \vec{H} &= \sum_{n=1}^N [C_n^+(z) \vec{H}_n^+ + C_n^-(z) \vec{H}_n^-] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Далее задача разбивается на два этапа - определение трансформации полей на участке волновода с длиной, равной периоду системы и решение граничной задачи для системы, заключенной между сечениями z_1 и z_2 . рассмотрим произвольный (k -й) период электродинамической системы, который мы заменили участками волноводов сравнения (рис.2).

Матрица преобразования волн потока и поля A_l l -го участка гладкого волновода ($l=1,2,\dots,L_k$) строится путем совместного решения уравнений возбуждения вихревых электромагнитных полей и линеаризованных уравнений движения для электронного потока. Определение элементов матрицы $B_{l,l+1}$ трансформации полей на скачке диаметра волновода основывается на проекционных соотношениях, обеспечивающих непрерывность вектора Умова-Пойнтинга. Матрица преобразования полей на периоде системы G получается после перемножения матриц A_l и $B_{l,l+1}$

$$G = \prod_{l=1}^{L_k} A_l \cdot B_{l,l+1},$$

причем на входе и выходе периода выполнено матричное соотношение: $\vec{X}_{k+1} = G \cdot \vec{X}_k$ где \vec{X} - вектор, включающий $2N+2$ элемента, $\vec{X} = (C_1^+, C_1^-, C_2^+, C_2^-, \dots, C_N^+, C_N^-, a_1, a_2)$, C_n^\pm - комплексные коэффициенты разложения (2.1), ($n=1, 2, \dots, N$), a_1, a_2 - амплитуды волн пространственного заряда в потоке.

С помощью матрицы передачи отдельного периода системы G можно определить дисперсионные характеристики периодической структуры, нагруженной электронным потоком. Постоянные распространения и структуры собственных волн «связанной» системы определяются из решения задачи на собственные вектора и собственные значения матрицы G

$$G \cdot E = \Lambda \cdot E,$$

$E = \{E_1, E_2, \dots, E_{2N+2}\}$ - матрица, составленная из собственных векторов матрицы G , Λ - диагональная матрица, элементами которой являются собственные значения G , $\lambda_j = \exp(\alpha_j + i \cdot \varphi_j)$, здесь α_j - постоянная

нарастания (затухания), φ_j - фазовый сдвиг волн на период системы, который определяет постоянную распространения $\beta_j = \frac{\varphi_j}{d}$, d - период системы, N - число рассматриваемых мод, ($j=1, \dots, 2N+2$).

2.3 Возбуждение вихревого поля на участке гладкого волновода.

Матрица передачи.

Вихревое электромагнитное поле на частоте ω удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\begin{cases} \text{rot}\vec{H} = i\omega\varepsilon_0\vec{E} + \vec{j}_{\omega\sigma}, \\ \text{rot}\vec{E} = -i\omega\mu_0\vec{H}, \\ \vec{j}_{\omega\sigma} = \vec{j}_\omega - i\omega \cdot \text{grad}(\varphi_\omega), \end{cases} \quad (2.4)$$

здесь φ_ω - переменная составляющая электростатического потенциала.

Вспользуемся уравнениями Максвелла для собственных волн гладкого волновода на s -м участке гладкого волновода (2.3).

$$\begin{cases} \text{rot}(\vec{E}_{n,s}^\pm)^* = i\omega\mu_0(\vec{H}_{n,s}^\pm)^* & , \\ \text{rot}(\vec{H}_{n,s}^\pm)^* = -i\omega\varepsilon_0(\vec{E}_{n,s}^\pm)^* & . \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.5a) \\ (2.5b) \end{matrix}$$

$C_{n,s}^\pm(z,t)$ - комплексные коэффициенты разложения, $\vec{E}_{n,s} = \vec{e}_{n,s} \cdot \exp(\mp i\Gamma_{n,s}z)$,

$$\vec{H}_{n,s} = \pm \vec{h}_{n,s} \cdot \exp(\mp i\Gamma_{n,s}z), \quad \Gamma_{n,s} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\mu_n}{R_{\theta,s}}\right)^2} \quad - \quad \text{постоянные}$$

распространения волн в гладком волноводе, μ_n - корень уравнения $J_0(x) = 0$ (J_0 - функция Бесселя нулевого порядка), $R_{\theta,s}$ - радиус волновода, $\vec{e}_{n,s}$ и $\vec{h}_{n,s}$ - собственные функции поперечных сечений, $\vec{e}_{n,s} = \{e_r, e_z, e_\varphi\}$, $h_n = \{0, 0, h_\varphi\}$.

В дальнейшем будем использовать нормировку функций $\vec{e}_{n,s}$, $\vec{h}_{n,s}$ на волновые сопротивления [27]: $Z_{n,s} = \frac{\Gamma_{n,s}}{\omega \varepsilon_0}$ (ε_0 – диэлектрическая

проницаемость вакуума):

$$\begin{aligned} \int_{S_s} \vec{e}_{n,s} \cdot \vec{e}_{k,s}^* dS &= \delta_{nk} |Z_{n,s}|, \\ \int_{S_s} \vec{h}_{n,s} \cdot \vec{h}_{k,s}^* dS &= \frac{\delta_{nk}}{|Z_{n,s}|}, \\ \int_{S_s} [\vec{e}_{n,s} \cdot \vec{h}_{k,s}^*]_z dS &= \delta_{nk} \frac{Z_{n,s}}{|Z_{n,s}|}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где S_s - площадь произвольного сечения волновода в пределах участка с номером s , δ_{nk} - символ Кронекера.

Запишем уравнения Максвелла для электромагнитного поля на s -м участке гладкого волновода, а также комплексно сопряженные уравнения для мод гладкого волновода

Умножим (2.5а) на $(\vec{H}_{n,s}^\pm)^*$ и (2.5б) на $\vec{E}_{e,s}$, используя формулы векторного анализа получаем:

$$\oint_S \left\{ \vec{E}_e \cdot (\vec{H}_n^\pm)^* + [(\vec{E}_n^\pm)^* \cdot \vec{H}] \right\} dS = - \int_V \vec{j}_{\omega e} (\vec{E}_n^\pm)^* dV.$$

Воспользовавшись (2.6), а также тем, что для распространяющихся волн ($\omega > \omega_{кр}$) Γ_n и Z_n вещественные и положительные величины, а для запердельных - $\Gamma_n = -i|\Gamma_n|$, $Z_n = -i|Z_n|$, получаем окончательный вид уравнений возбуждения полей на участке гладкого волновода

$$\frac{dC_n^+}{dz} = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{S_z} \vec{j}_{\omega e} (\vec{E}_n^+)^* dS & \omega > \omega_{кр}, \\ \frac{1}{2} \int_{S_z} \vec{j}_{\omega e} (\vec{E}_n^-)^* dS & \omega < \omega_{кр}, \end{cases}$$

$$\frac{dC_n^-}{dz} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \int_{S_z} \vec{j}_{\omega\epsilon} (\vec{E}_n^-)^* dS & \omega > \omega_{кр}, \\ -\frac{1}{2} \int_{S_z} \vec{j}_{\omega\epsilon} (\vec{E}_n^+)^* dS & \omega < \omega_{кр}, \end{cases}$$

Для построения матрицы A_l , описывающей взаимодействие волн потока и поля на участке гладкого волновода перепишем полученные соотношения в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dC_n^+}{dz} &= d_n^+ \frac{d}{dz} \eta_n^+ - d_n^- \frac{d}{dz} \eta_n^-, \\ \frac{dC_n^-}{dz} &= -d_n^+ \frac{d}{dz} \eta_n^- - d_n^- \frac{d}{dz} \eta_n^+, \end{aligned}$$

где $d_n^\pm = \frac{1}{4} \left(\frac{Z_n}{|Z_n|} + \frac{|Z_n|}{Z_n} \right)$, $\eta_n^\pm = -\int_V \vec{j}_{\omega\epsilon} (\vec{E}_n^\pm)^* dV$. Уравнения возбуждения

волновода заданным вихревым током будем решать совместно с уравнениями для волн пространственного заряда (2.2). При этом удобно перейти от величин C_n^\pm , медленно меняющихся вдоль продольной оси по z , к новым переменным:

$$\hat{C}_n^+ = C_n^+ \cdot e^{-i\Gamma_n z}, \hat{C}_n^- = C_n^- \cdot e^{+i\Gamma_n z}.$$

Уравнения для C_n^\pm преобразуются к следующему виду:

$$\frac{d\hat{C}_n^\pm}{dz} = \Phi_n \left(\pm d_n^+ \cdot e^{\pm i(\Gamma_n^* - \Gamma_n)z} \mp d_n^- \cdot e^{\mp i(\Gamma_n^* + \Gamma_n)z} \right) \mp i\Gamma_n \hat{C}_n^\pm,$$

где $\Phi_n = \int_S ((\vec{j}_\omega + i\omega\epsilon_0 \vec{E}_n), \vec{e}_n^*) dS$, $\vec{E}_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{r} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{z}$. Дополняя уравнениями

для волн пространственного заряда

$$\frac{d}{dz} a_{1,2} = -\beta_{1,2} \cdot a_{1,2} + \frac{2}{\sqrt{2Z_e}} \sum_{n=1}^N \frac{1}{S_b} \int_{S_b} (C_n^+ e_n^+ + C_n^- e_n^-) dS,$$

получим замкнутую систему дифференциальных уравнений, описывающую взаимодействие потока и поля на участке гладкого волновода. Эту систему удобно записать в матричном виде:

$$\frac{d\vec{X}}{dz} = \Omega \vec{X},$$

где \vec{X} - вектор, состоящий из амплитуд волн потока и поля, с учетом (2.3)

$\vec{X} = (\hat{C}_1^+, \hat{C}_1^-, \hat{C}_2^+, \hat{C}_2^-, \dots, \hat{C}_N^+, \hat{C}_N^-, a_1, a_2)$, а матрица Ω имеет вид:

$$\Omega = \left\| \begin{array}{cccccc|cc} -i\Gamma_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & P_1 & -P_1 \\ 0 & +i\Gamma_1 & & & & \cdot & Q_1 & -Q_1 \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & -i\Gamma_N & 0 & P_N & -P_N \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & +i\Gamma_N & Q_N & -Q_N \\ \hline -\hat{E}_1^+ & -\hat{E}_1^- & \cdot & \cdot & -\hat{E}_N^+ & -\hat{E}_N^- & -i\beta_1 & 0 \\ -\hat{E}_1^+ & -\hat{E}_1^- & \cdot & \cdot & -\hat{E}_N^+ & -\hat{E}_N^- & 0 & -i\beta_2 \end{array} \right\|$$

и размерность $(2N+2, 2N+2)$, где N - число рассматриваемых мод. Здесь приняты обозначения:

$$P_n = W_n \cdot (d_n^+ \cdot e^{+i(\Gamma_n^* - \Gamma_n)z} - d_n^- \cdot e^{-i(\Gamma_n^* + \Gamma_n)z}),$$

$$Q_n = W_n \cdot (-d_n^+ \cdot e^{-i(\Gamma_n^* - \Gamma_n)z} + d_n^- \cdot e^{+i(\Gamma_n^* + \Gamma_n)z}),$$

$$W_n = \frac{8f_n \sqrt{\pi \cdot |Z_n|}}{R_T^2 \left(\beta_e e^{-\frac{\mu_n}{R_T}} \right) J_1(\mu_n) \sqrt{2Z_e}}$$

$$\left(\frac{\beta_e e^{-\mu_n/R_T} - 2\pi \cdot \beta_e f_n / R_T^2}{\Gamma_n} - i \frac{\beta_e}{\left(\beta_e e^{-\frac{\mu_n}{R_T}} \right)} \right),$$

$$f_m = \frac{\mu_m}{R_T} \left(R^+ J_1\left(\mu_m \frac{R^+ R^+}{R_T}\right) - R^- J_1\left(\mu_m \frac{R^-}{R_T}\right) \right), \quad R^+ = R_b + \delta, \quad R^- = R_b - \delta,$$

$$\hat{E}_n^\pm = \frac{1}{S_b} \int_{S_b} e_{n_z}^\pm dS$$

Для решения полученной системы дифференциальных уравнений зададим начальные условия на входе системы таким образом, чтобы первый элемент вектора \vec{X} , равен "1", а все остальные элементы, при этом, равны

"0". Определяя конечный участок интегрирования, решаем систему дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями методом Рунге-Кутты. При этом полученный вектор \vec{X} на выходе соответствует первому столбцу матрицы A_l трансформации волн потока и поля на участке гладкого волновода. Далее решаем нашу систему с новыми условиями: второму элементу вектора \vec{X} на входе присваиваем значение "1", а всем остальным - "0". Значение вектора \vec{X} на выходе соответствует теперь второму столбцу искомой матрицы. Применяя такую процедуру $2N+2$ раза, получаем матрицу трансформации волн потока и поля на участке гладкого волновода.

Изложенный выше метод построения матрицы A_l требует больших вычислительных затрат, поэтому при проведении конкретных расчетов может использоваться метод последовательных приближений, который дает достаточно точное решение системы при значительном сокращении времени вычислений.

Сотношения между коэффициентами разложения вихревого поля на входе и выходе участка разбиения $C_n^\pm(0)$ и $C_n^\pm(L)$ находим, используя уравнения возбуждения вихревого электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} C_n^+(L) - C_n^+(0) &= d_n^+ \eta_n^+ - d_n^- \eta_n^-, \\ C_n^-(L) - C_n^-(0) &= -d_n^+ \eta_n^- - d_n^- \eta_n^+. \end{aligned}$$

Длина L рассматриваемого гладкого волновода выбирается таким образом, чтоб коэффициенты C_n^\pm мало менялись вдоль участка взаимодействия. Вихревое поле \vec{E}_{e_z} , действующее на пучок, раскладывается по векторам, соответствующим собственным волнам гладкого волновода:

$$\vec{E}_{e_z}(z) = \sum_{n=1}^N \left(C_n^+(z) \vec{e}_{n_z}^+ \cdot e^{-i\Gamma_n z} + C_n^-(z) \vec{e}_{n_z}^- \cdot e^{i\Gamma_n z} \right)$$

Учитывая, что $\vec{j}_{e_\omega} \cdot (\vec{E}_n)^* = \sum_{j=1}^2 \frac{2}{\sqrt{2Z_e}} h_j \cdot a_j (\vec{E}_{n_z})_j^*$, где $h_j = 1, -1$ -

коэффициенты, отражающие знаки кинетической мощности, переносимой

волнами пространственного заряда a_j ($j=1,2$), получим выражение для η_n^\pm в первом приближении:

$$\eta_n^\pm = -\sum_{j=1}^2 h_j \cdot \left(a_j(0) \cdot V_j^\pm(\Gamma_n^*) - D_n \cdot e^{\pm i\Gamma_n L} \cdot (e^{-i\beta_j L} - 1) \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^N \left(C_k^+ (W_j^\pm(\Gamma_k)_n + D_n e^{-i(\Gamma_k \mp \Gamma_n^*)L} \cdot V_j^+(\Gamma_k)) + \right. \right. \\ \left. \left. + C_k^- (W_j^\pm(-\Gamma_k)_n + D_n e^{-i(\Gamma_k \pm \Gamma_n^*)L} \cdot V_j^-(\Gamma_k)) \right) \right),$$

где $W_j^\pm(\Gamma_k)_n = \frac{2}{\sqrt{2Z_e}} \cdot \frac{e_{kz} \cdot e_{n_z}^*}{i(\beta_j - \Gamma_k)} \int_0^L e^{\pm i\Gamma_n^* z} (e^{-i\Gamma_k z} - e^{-i\Gamma_n z}) dz,$

$$V_j^\pm(\Gamma_k) = \frac{2}{\sqrt{2Z_e}} \cdot e_{n_z} \int_0^L e^{-i(\beta_j \mp \Gamma_n)z} dz,$$

$$D_n = \frac{2i\beta_e \mu_n}{R_{-p} \Gamma_n^* R_T^2 \sqrt{\pi} J_1(\mu_n)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{\mu_k}{R_{-p}} R_b\right)}{J_1(\mu_k) \left(\left(\frac{\mu_k}{R_{-p}}\right)^2 + \beta_e^2 \right)} \times \\ \times \int_0^{\min(R_{-p}, R_T)} J_0\left(\frac{\mu_k}{R_{-p}} r\right) \cdot J_0\left(\frac{\mu_k}{R_T} r\right) r dr,$$

R_T - радиус волновода на рассматриваемом участке, R_{-p} - средний радиус периодического волновода.

Изменения амплитуд волн потока получаются при решении уравнений для волн пространственного заряда методом вариации постоянной. В первом приближении выражение для $a_j(L)$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
a_j(L) &= a_j(0)e^{-i\beta_j L} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{4} \cdot V_j^+(\Gamma_k) e^{-i\Gamma_k L} C_k^+(0) + \frac{1}{4} \cdot V_j^-(\Gamma_k) e^{i\Gamma_k L} C_k^-(0) + \\
&\sum_{m=1}^2 \sum_{k=1}^N h_m a_m(0) \{ G_{01}/4 \cdot (F_n)_m^* |e_{nz}|^2 [d_n^-(N_{mnq}^- - M_{mnq}^+)] - \delta_{jm} D_n [2d_n^+ V_j^-(\Gamma_n - \Gamma_n^*) - \\
&2d_n^- V_j^+(\Gamma_n + \Gamma_n^*) + (d_n^+ - d_n^-) \cdot (V_j^+(\Gamma_n) e^{-i\Gamma_n L} + V_j^-(\Gamma_n) e^{i\Gamma_n L})] \}, \\
N_{mnj}^\pm &= \frac{e^{-i(\Gamma_n \mp \Gamma_n^* + \beta_m)L} - e^{-i\beta_j L}}{(\beta_{m \mp \Gamma_n^*})(\beta_j - \beta_{m \mp \Gamma_n \pm \Gamma_n^*})} - \frac{e^{-i\Gamma_n L} - e^{-i\beta_j L}}{(\beta_{m \mp \Gamma_n^*})(\beta_j - \Gamma_n)}, \\
M_{mnj}^\pm &= \frac{e^{-i(-\Gamma_n \mp \Gamma_n^* + \beta_m)L} - e^{-i\beta_j L}}{(\beta_{m \mp \Gamma_n^*})(\beta_j - \beta_{m \mp \Gamma_n \pm \Gamma_n^*})} - \frac{e^{i\Gamma_n L} - e^{-i\beta_j L}}{(\beta_{m \mp \Gamma_n^*})(\beta_j + \Gamma_n)}.
\end{aligned}$$

Матрица трансформации волн поля на s -м участке гладкого волновода A_s имеет следующую структуру:

$$A_s = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix};$$

здесь a_1 - матрица, описывающая трансформацию волн поля на входе области в волны поля на выходе, a_2 - описывает трансформацию волн потока в волны поля, a_3 - трансформацию волн поля в поток, а a_4 - из потока в поток.

2.4 Трансформация вихревых полей на скачке радиуса волновода.

В рамках рассматриваемой методики используются условия, обеспечивающие непрерывность вектора Умова-Пойнтинга [28]. Такие соотношения широко применяются для расчетов замедляющих систем и обеспечивают достаточно хорошее совпадение данных теории и эксперимента. Проекционные соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned}
\int_{S_{s-1,s}} [\vec{E}_{s-1} \times (\vec{h}_{k,s-1})^*] d\vec{s} &= \int_{S_{s,s-1}} [\vec{E}_s \times (\vec{h}_{k,s-1})^*] d\vec{s} \\
\int_{S_{s,s-1}} [\vec{e}_{k,s} \times \vec{H}_{s-1}^*] d\vec{s} &= \int_{S_{s,s-1}} [\vec{e}_{k,s} \times \vec{H}_s^*] d\vec{s} \quad .
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Рассмотрим особенности построения матрицы преобразования аксиально-симметричных вихревых полей на скачке диаметра волновода. Введем обозначения, как на рис.2, и будем рассматривать область слева (1) и справа (2) от скачка. Тангенциальные компоненты поля слева \vec{E}_1, \vec{H}_1 и \vec{E}_2, \vec{H}_2 от скачка разложим по полным системам вектор функций $\vec{e}_{1,2,n}, \vec{h}_{1,2,n}$, являющихся собственными функциями соответствующих поперечных сечений:

$$\vec{E}_{1,2} = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{n,2}^+ + C_{n,2}^-) \vec{e}_n^{1,2}, \vec{H}_{1,2} = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{n,2}^+ - C_{n,2}^-) \vec{h}_n^{1,2}.$$

Подставляя в соотношения (2.7) разложения полей по собственным функциям и учитывая условия нормировки (2.6), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных. При этом мы ограничиваемся рассмотрением конечного числа мод. Их количество выбирается так, чтобы высшие, не распространяющиеся моды достаточно сильно затухали между двумя скачками радиуса. При этом из проекционных соотношений получается матричная связь между векторами поля слева \vec{X}_1 и справа \vec{X}_2 от скачка

$$B_1 \cdot \vec{X}_1 = B_2 \cdot \vec{X}_2.$$

Матрицы B_1 и B_2 имеют вид:

$$B_1 = \left\| \begin{array}{cccccccc} N_{1s-1} & N_{1s-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{2s-1} & N_{2s-1} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N_{Ns-1} & N_{Ns-1} \\ \Pi_{s11}^* & -\Pi_{s11}^* & \Pi_{s12}^* & -\Pi_{s12}^* & \dots & \Pi_{s1N}^* & -\Pi_{sN}^* \\ \Pi_{s21}^* & -\Pi_{s21}^* & \Pi_{s22}^* & -\Pi_{s22}^* & \dots & \Pi_{s2N}^* & -\Pi_{s2N}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Pi_{sN1}^* & -\Pi_{sN1}^* & \Pi_{sN2}^* & -\Pi_{sN2}^* & \dots & \Pi_{sNN}^* & -\Pi_{sNN}^* \end{array} \right\|$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} \Pi_{s11} & \Pi_{s11} & \Pi_{s21} & \Pi_{s21} & \dots & \Pi_{sN1} & \Pi_{sN1} \\ \dots & \dots & \Pi_{s22} & \Pi_{s22} & \dots & \Pi_{sN2} & \Pi_{sN2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Pi_{s1N} & \Pi_{s1N} & \Pi_{s2N} & \Pi_{s2N} & \dots & \Pi_{sNN} & \Pi_{sNN} \\ N_{1s}^* & -N_{1s}^* & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{2s}^* & -N_{2s}^* & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N_{Ns}^* & -N_{Ns}^* \end{pmatrix}$$

где $N_{ks-1} = \frac{Z_{ks-1}}{|Z_{ks-1}|}$, $N_{ks} = \frac{Z_{ks}}{|Z_{ks}|}$,

Матрица преобразования полей и токов на скачке радиуса волновода имеет вид:

$$B_{l,l+1} = \begin{pmatrix} B_2^{-1} \cdot B_1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

E -единичная матрица размерностью 2×2 .

Последовательное определение матриц A_s и $B_{l,l+1}$ позволяет найти матрицу трансформации вихревых полей и амплитуд волн потока на каждом выделенном периоде системы.

Подставляя в проекционные соотношения [27] (2.7) выражения для функций поперечного сечения в приближении аксиальной симметрии:

$$\begin{cases} e_{r_n} = \sqrt{\frac{|Z_n|}{\pi}} \cdot \frac{1}{R_T} \frac{J_1\left(\frac{\mu_n}{R_T} r\right)}{J_1(\mu_n)}, \\ e_{z_n} = \sqrt{\frac{|Z_n|}{\pi}} \cdot \frac{\mu_n}{\Gamma_n R_T^2} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{R_T} r\right)}{J_1(\mu_n)}, \\ e_{\varphi_n} = 0. \end{cases}$$

J_0 , J_1 - функции Бесселя нулевого и первого порядков, μ_n - корень уравнения $J_0(x) = 0$, R_T - радиус волновода, Γ_n - постоянная распространения моды гладкого волновода E_{0n} - типа:

$$\Gamma_n = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\mu_n}{R_T}\right)^2},$$

$Z_n = \frac{\Gamma_n}{\omega \varepsilon_0}$ - волновое сопротивление, ω - частота, c - скорость света, а N -

число рассматриваемых мод получаем искомые выражения для элементов матриц:

$$\Pi_{skm} = \frac{2\mu_l \frac{R_{s+1}}{R_s} \sqrt{|Z_{s+1k}| |Z_{sl}|} J_0\left(\mu_l \frac{R_s}{R_{s+1}}\right)}{Z_{sl}^* R_s R_{s+1} J_1(\mu_l) \left(\left(\frac{\mu_k}{R_{s+1}}\right)^2 - \left(\frac{\mu_l}{R_s}\right)^2 \right)}. \quad (2.8)$$

3. Дисперсионные характеристики периодического волновода с учетом несимметричных мод.

3.1 Рассмотрение альтернативных вариантов сшивания электромагнитных полей. Дисперсионные характеристики низшей аксиально-симметричной моды периодического волновода.

При выполнении квалификационной работы была поставлена задача сравнения двух различных видов сшивания электромагнитных полей при скачке диаметра сверхразмерного волновода:

При увеличении радиуса волновода ($R_{6,s} > R_{6,s-1}$), они имеют вид

$$\int_{S_{s-1,s}} [\vec{E}_{s-1} \times (\vec{h}_{n,s})^*] d\vec{S} = \int_{S_{s,s-1}} [\vec{E}_s \times (\vec{h}_{n,s})^*] d\vec{S}$$

$$\int_{S_{s-1,s}} [\vec{e}_{n,s-1} \times \vec{H}_{s-1}^*] d\vec{S} = \int_{S_{s-1,s}} [\vec{e}_{n,s-1} \times \vec{H}_s^*] d\vec{S} .$$

В том случае, когда радиус волновода уменьшается ($R_{6,s} < R_{6,s-1}$) проекционные соотношения записываются в виде:

$$\int_{S_{s-1,s}} [\vec{E}_{s-1} \times (\vec{h}_{k,s-1})^*] d\vec{S} = \int_{S_{s,s-1}} [\vec{E}_s \times (\vec{h}_{k,s-1})^*] d\vec{S}$$

$$\int_{S_{s,s-1}} [\vec{e}_{k,s} \times \vec{H}_{s-1}^*] d\vec{S} = \int_{S_{s,s-1}} [\vec{e}_{k,s} \times \vec{H}_s^*] d\vec{S} .$$

Такие условия сшивания используются при проведении расчетов нестационарной методики [11]. Так в главе 2 был описан алгоритм сшивания при увеличении диаметра волновода. Рассмотрим вид матриц при уменьшении диаметра периодического волновода.

При этом из проекционных соотношений получается матричная связь между векторами поля слева \vec{X}_1 и справа \vec{X}_2 от скачка

$$B_1 \cdot \vec{X}_1 = B_2 \cdot \vec{X}_2 .$$

Матрицы B_1 и B_2 имеют вид:

$$B_1 = \begin{pmatrix} \Pi_{s11} & \Pi_{s11} & \Pi_{s21} & \Pi_{s21} & \dots & \Pi_{sN1} & \Pi_{sN1} \\ \dots & \dots & \Pi_{s22} & \Pi_{s22} & \dots & \Pi_{sN2} & \Pi_{sN2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Pi_{s1N} & \Pi_{s1N} & \Pi_{s2N} & \Pi_{s2N} & \dots & \Pi_{sNN} & \Pi_{sNN} \\ N_{1s}^* & -N_{1s}^* & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{2s}^* & -N_{2s}^* & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N_{Ns}^* & -N_{Ns}^* \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} N_{1s}^* & -N_{1s}^* & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & N_{2s}^* & -N_{2s}^* & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{Ns}^* & -N_{Ns}^* \\ \Pi_{s11} & \Pi_{s11} & \Pi_{s12} & \Pi_{s12} \dots & \dots & \Pi_{s1N} & \Pi_{s1N} \\ \Pi_{s21} & \Pi_{s21} & \Pi_{s22} & \Pi_{s22} & \dots & \Pi_{s2N} & \Pi_{s2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Pi_{sN1} & \Pi_{sN1} & \Pi_{sN2} & \Pi_{sN2} & \dots & \Pi_{sNN} & \Pi_{sNN} \end{pmatrix},$$

$$\text{где } N_{ks-1} = \frac{Z_{ks-1}}{|Z_{ks-1}|}, N_{ks} = \frac{Z_{ks}}{|Z_{ks}|}, \Pi_{skm} = \frac{2\mu_l \frac{R_{s+1}}{R_s} \sqrt{|Z_{s+1k}|} |Z_{sl}| J_0 \left(\mu_l \frac{R_s}{R_{s+1}} \right)}{Z_{sl}^* R_s R_{s+1} J_1(\mu_l) \left(\left(\frac{\mu_k}{R_{s+1}} \right)^2 - \left(\frac{\mu_l}{R_s} \right)^2 \right)}.$$

Матрица преобразования полей и токов, как и в предыдущем случае, на скачке радиуса волновода имеет вид:

$$B_{l,l+1} = \begin{pmatrix} B_2^{-1} \cdot B_1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

E -единичная матрица размерностью 2×2 .

Для оценки эффективности предложенного алгоритма сшивания электромагнитных полей на скачке радиуса волновода была использована методика, аналогичная изложенной в [29]. Были проведены расчеты дисперсии волн (рис. 3) для периодического волновода периодом 1,5 см с высотой прямоугольной неоднородности 0,3 см и диаметра волновода 14 см

на частоте " π "- вида колебаний нижней аксиально – симметричной моды E_{01} периодического волновода. Вблизи частоты " π "- вида распространяется

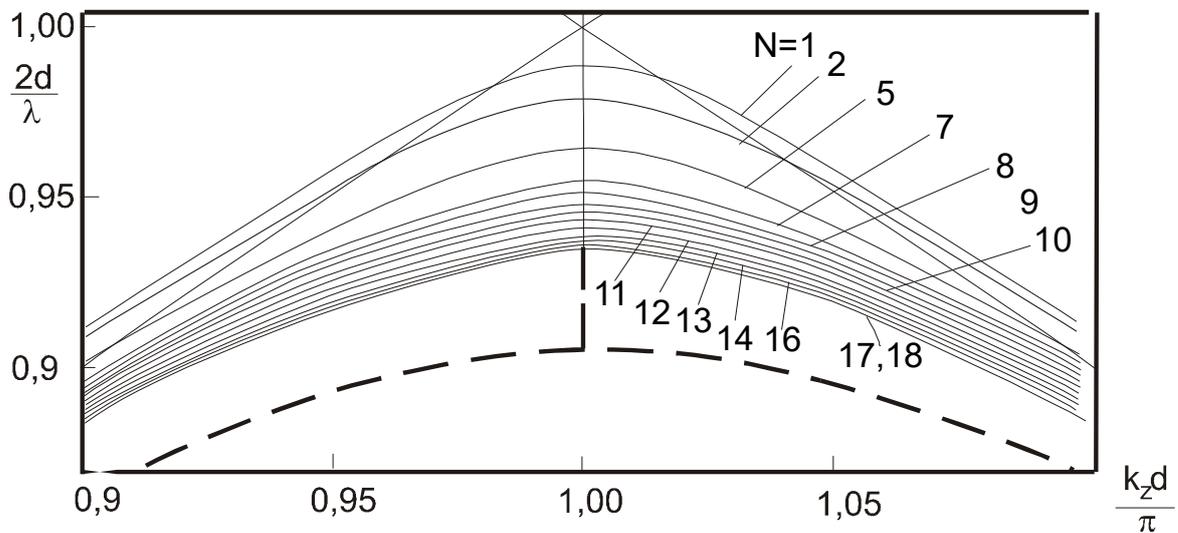


Рис.3 . Сходимость решения дисперсионного уравнения к точному при увеличении числа рассматриваемых мод гладких волноводов сравнения. $D_B=14$ см, $h=0.3$ см, $d=1.5$ см. Штриховой линией показана дисперсионная характеристика, рассчитанная по методике Уолкиншоу [29].

четыре моды периодического волновода. Для достижения точности расчетов $\sim 0,1$ % требуется число мод волноводов сравнения $N \sim 13-14$, что соответствует 10 запердельным модам. При дальнейшем увеличении числа N кривые сближаются и практически совпадают (рис. 3), для $N=17$ и 18.

Расчеты показали, что дисперсионные характеристики периодического волновода, рассчитанные при двух вариантов сшивания, дают идентичные результаты. В таблице 1 приведены значения нормированной частоты $2\pi/\lambda$ " π "- вида колебаний низшей аксиально – симметричной моды с приведенными выше параметрами. С большой точностью значения частот совпадают для различного числа мод N волноводов сравнения.

N	1-вариант	2-вариант
2	0.9782	0.9784
4	0.9667	0.9669
6	0.9585	0.9566
8	0.9501	0.9504
10	0.9448	0.9449

12	0.9446	0.9449
14	0.9442	0.9444
16	0.9349	0.9349
18	0.9348	0.9348
20	0.9347	0.9348
22	0.9346	0.9346
24	0.9345	0.9346
26	0.9344	0.9344
28	0.9342	0.9343
30	0.9342	0.9342
32	0.9342	0.9342
34	0.9342	0.9342
36	0.9341	0.9342

3.2 Построение матрицы преобразования полей для несимметричных мод E_{1N} . Дисперсионные характеристики периодического волновода.

Компоненты электромагнитных полей мод гладкого волновода имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_z = E_{nm}^0 J_n(\chi_{nm} r) A(n\alpha) \\ e_r = -i \frac{\Gamma_{nm}}{\chi_{nm}} E_{nm}^0 J_n'(\chi_{nm} r) A(n\alpha) \\ e_\varphi = -i \frac{\Gamma_{nm}}{\chi_{nm}^2} E_{nm}^0 \frac{n}{r} J_n(\chi_{nm} r) A'(n\alpha) \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} h_z = 0 \\ h_r = -i \frac{\Gamma_{nm}}{W_{nm} \chi_{nm}^2} E_{nm}^0 \frac{n}{r} J_n(\chi_{nm} r) A'(n\alpha); \\ h_\varphi = -i \frac{\Gamma_{nm}}{\chi_{nm}} E_{nm}^0 J_n'(\chi_{nm} r) A(n\alpha) \end{array} \right. \quad (2.9)$$

где штрихом обозначены производные функций по аргументу в скобках $A(n\alpha) = e^{\pm in\alpha}$, Γ_{nm} - постоянные распространения волн в волноводе, W_{nm} - волновые сопротивления, $\chi_{nm} = \frac{\mu_{nm}}{R} r$, μ_{nm} - m -й корень уравнения $J_n(x) = 0$, E_{nm}^0 - постоянная нормировки.

Подставляя (2.9) в проекционные соотношения (2.7) получаем элементы матриц:

$$P_{skm} = \frac{\sqrt{|Z_{s+1k}| |Z_{sl}|} \frac{\mu_k}{R_{s+1}} \frac{\mu_l}{R_s} F_{ss+1kl}}{Z_{sl}^* J_0(\mu_k) \sqrt{\frac{1}{2}((\mu_k + 2)^2 - 1)} J_0(\mu_l) \sqrt{\frac{1}{2}((\mu_l + 2)^2 - 1)}};$$

$$F_{ss+1kl} = \int_0^{R_{s+1}} r \left(J_0\left(\frac{\mu_k}{R_{s+1}} r\right) - \frac{J_1\left(\frac{\mu_k}{R_{s+1}} r\right)}{\mu_k r} \right) \left(J_0\left(\frac{\mu_l}{R_s} r\right) - \frac{J_1\left(\frac{\mu_l}{R_s} r\right)}{\mu_l r} \right) - \frac{J_1\left(\frac{\mu_k}{R_{s+1}} r\right) J_1\left(\frac{\mu_l}{R_s} r\right)}{\frac{\mu_k}{R_{s+1}} \frac{\mu_l}{R_s} r} dr;$$

Интегрирование в программе производилось численно методом Симпсона с автоматическим выбором шага.

На рис. 4-6 приведены дисперсионные характеристики волн периодического волновода диаметром 14 см, с периодом 1,5 см. На рис. 4 приведены дисперсионные кривые для аксиально-симметричных волн волновода с высотой периодической неоднородности $h=0,3$ см. На рис. 5-6 изображены постоянные распространения несимметричных волн периодического волновода типа E_{1n} с $h=0,1$ см (рис. 5) и $h=0,3$ см (рис. 6).

Дисперсионные кривые симметричных и несимметричных волн имеют похожий вид. Низшая мода в случае симметричных и несимметричных волн является замедленной. Таким образом, при реализации взаимодействия с электронным потоком в секциях черенковских устройств, необходим учет взаимодействия электронного потока с несимметричными модами. В реальных устройствах трубчатый электронный поток большого диаметра имеет форму, отличающуюся от идеальной кольцевой, что будет приводить к возбуждению несимметричных мод волновода и нарушению однородности по угловой переменной.

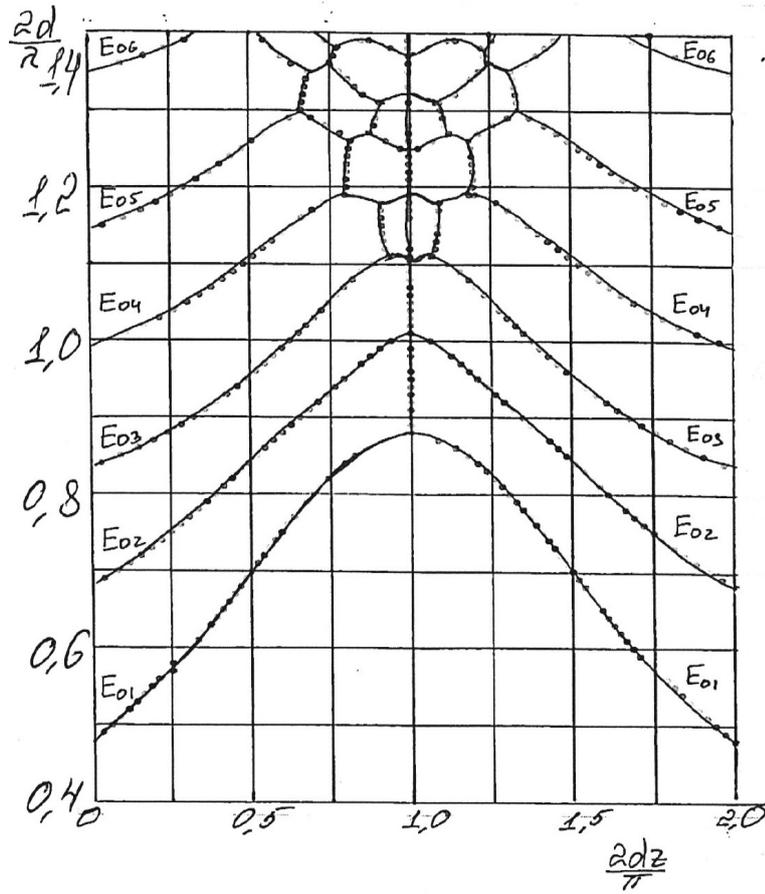


Рис.4

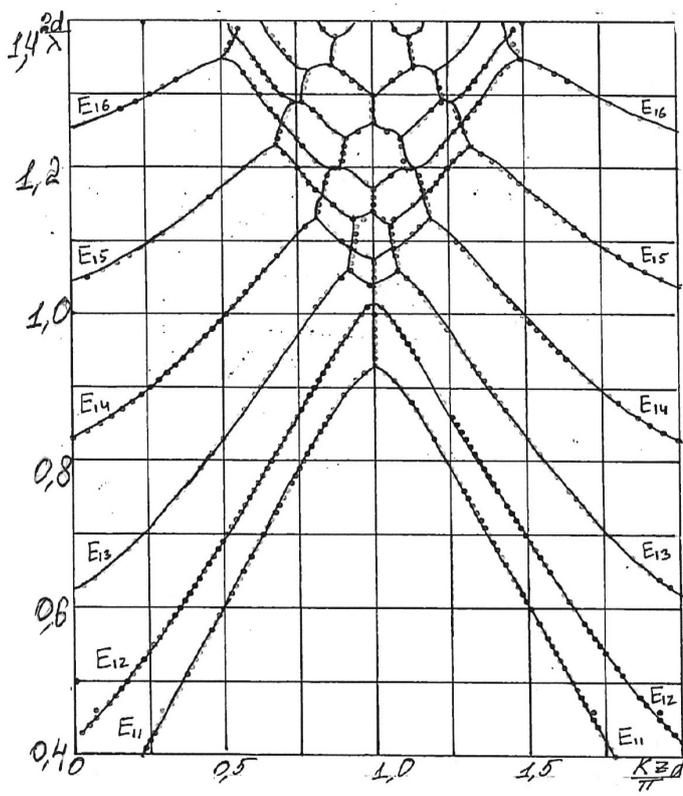


Рис.5

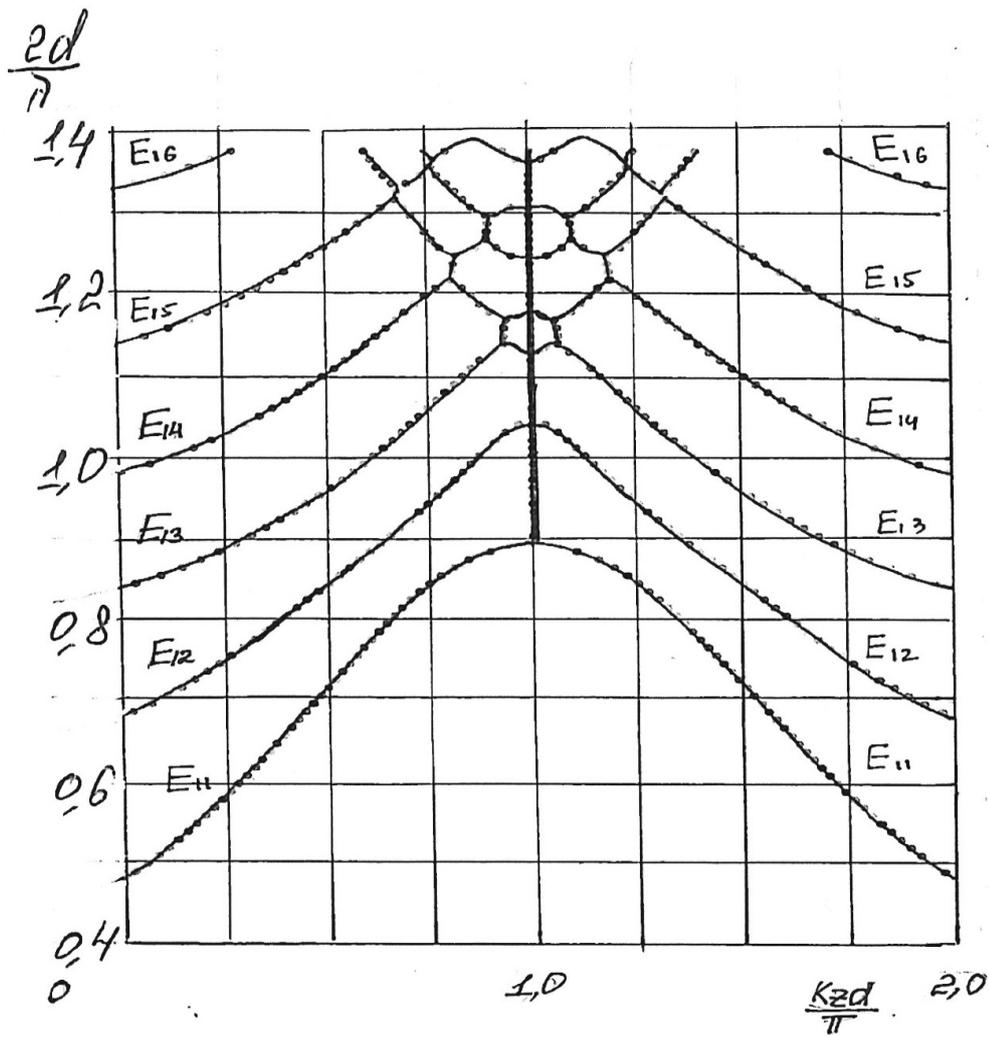


Рис.6

Заключение.

Записаны уравнения матричной многомодовой методики, позволяющей в линейном приближении численно моделировать взаимодействие релятивистского электронного потока и полей сверхразмерных периодических волноводов.

Проведено численное моделирование дисперсии аксиально-симметричных волн для двух различных вариантов сшивания электромагнитных полей на скачке радиуса волновода. Показано, что различные варианты сшивания приводят к совпадающим результатам.

Получены дисперсионные характеристики для несимметричных мод сверхразмерного периодического волновода E_{1n} для различной высоты неоднородности. Показано, что при параметрах характерных для черенковских генераторов распространяется замедленная волна E_{11} типа, которая может взаимодействовать с релятивистским потоком и приводить к его развалу.

Литература:

1. Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М. Сов. радио, 1973. 400 с.
2. Канавец В. И. Возбуждение электронным потоком вихревых полей электродинамических систем. Радиотехника и электроника. 1977. 22, 2, с. 402-408.
3. Канавец В.И., Мозговой Ю.Д., Слепков А.И. Излучение мощных электронных потоков в резонансных замедляющих системах. Изд.Моск.Ун-та. М.1993. 207 С.
4. Бугаев С.П., Канавец В.И., Климов А.И., Кошелев В.И., Слепков А.И., Черепенин В.А. Взаимодействие электронного потока и электромагнитного поля в многоволновом черенковском генераторе с мощностью 10^{10} ватт. Р и Э 1987.т.32, вып.7. С.
5. Копенкин А.Д., Кошелев В.И., Черепенин В.А. Линейная теория многоволнового черенковского генератора.// Радиотехника и электроника. 1990. Т.35. №2. С.389-400.
6. Пикунов В.М., Колесникова И.Ю. Линейная математическая модель релятивистского СВЧ устройства черенковского типа. // Радиотехника и электроника. 1987. Т.33. №11. С.2381-2390.
7. Deichuly M.P., Koshelev V.I., Pikunov V.M., Popov V.A. Linear Mode Computer Code MULTIWAVES 5.2 for Muiltiwave Cerenkov Generator Investigations// Proc. of 14th int. conf. on High-Power Particle Beams. Albuquerque. New Mexico. 2002. P.287.
8. Бугаев С.П., Канавец В.И., Климов А.И., Копенкин А.Д., Кошелев В.И., Попов В.А., Слепков А.И. , Федоров А.В., Черепенин В.А. Физические процессы в многоволновых черенковских генераторах. В сб.Релятивистская высокочастотная электроника,вып.5,1988,ИПФ АН СССР,Горький. С.

9. Гаруца Н.А., Канавец В.И., Слепков А.И. Матричный метод в теории взаимодействия релятивистских электронных потоков с полями многомодовых электродинамических структур. Р и Э, 1988, т.33, вып.4.

10. Пикунов В.М. Вырождение гибридных мод в сверхразмерном периодическом волноводе вблизи частоты « π » - вида колебаний моды E_{01} . Ученые записки физического факультета, вып.5, 2016.

11. Слепков А.И. Многомодовый метод анализа нестационарных процессов в черенковских генераторах на периодических волноводах. // Известия АН. Сер.Физическая. Т.67, N12, 2003 г. С. ___.

12. Tarakanov V.P. User's Manual for code KARAT // Springfield, VA: Berkley Research Associates, Inc. 1992.

13. Bogdankevich I.L., Rukhadze A.A., Strelkov P.S., Tarakanov V.P. Using PIC-plasma model in the numerical Simulation of the relativistic cherenkov plasma maser // Problems of Atomic Science and Technology/ 2003.№1.Series: Plasma Physics (9). P.102-104// Укр.ж. «Вопросы атомной науки и техники».

14. Корниенко В.Н., Черепенин В.А. Численная трехмерная модель динамики электромагнитного поля в многоволновом черенковском генераторе.// Радиотехника и электроника. 2003. Т.47.№ 6.

15. Бугаев С.П., Ильин В.П., Кошелев В.И., Месяц Г.А., Нечаев В.Е., Усов Ю.П., Фукс М.И., Яблоков Б.Н. Формирование сильнооточных релятивистских электронных пучков для мощных генераторов и усилителей СВЧ. В кн. Релятивистская высокочастотная электроника. Горький, ИПФ АН СССР, 1979. с. 5-75.

16. Месяц Г.А. Импульсные ускорители для релятивистской СВЧ – электроники. В сб. Релятивистская высокочастотная электроника. В.4. Горький. ИПФ АН СССР. 1984.С. 193.

17. Ковалев Н.Ф., Петелин М.И., Райзер М.Д., Сморгонский А.В., Цопп А.Э. Генерация мощных импульсов электромагнитного излучения потоком релятивистских электронов. Письма в ЖЭТФ, 18, 1973, с. 232-235.

18. Y.Carmel, J.Ivers, R.E.Kribel, J.Nation Intense coherent -Cherenkov radiation due to the interaction of a relativistic electron beam with a slow-wave structure. Phis. Rev. Lett.. 1974, v.33, 21, p. 1278-1282.

19. Зайцев Н. И., Ковалев Н.Ф., Кораблев Г. С., Кулагин И. С., Офицеров М.М. Релятивистский карсинотрон с длиной волны 3 сантиметра и длительностью импульса 0.4 микросекунды, Письма в ЖТФ, 7, 14, с, 879-882, 1981.

20. Иванов В.С., Кременцов С. И., Куценко В.А., Райзер М.Д., Рухадзе А.А., Федотов А.В. Исследование релятивистского черенковского автогенератора. ЖТФ, 1981, 51, 5, с. 970-975.

21. Александров А.Ф., Галузо С.Ю. Канавец В.И., Плетюшкин В.А. Возбуждение поверхностных волн релятивистским электронным потоком в диафрагмированном волноводе. ЖТФ, 51, 8, 1981, с. 1727-1730.

22. Бугаев С.П., Кошелев В.И., Канавец В.И., Черепенин В.А. Релятивистский многоволновой черенковский генератор. Письма в ЖТФ. 1983, № 22, с. 1385-1389.

23. Канавец В.И. Тенденция развития релятивистской СВЧ электроники больших мощностей //В сб. Генераторы и усилители на релятивистских электронных потоках. М.,1987. С.5-27.

24. Черепенин В.А. Многоволновое когерентное излучение релятивистских электронных потоков// Генераторы и усилители на релятивистских электронных потоках. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. С.76-95.

25. Бугаев С.П., Канавец В.И., Кошелев В.И., Черепенин В.А. Релятивистские многоволновые СВЧ - генераторы. 1991, Новосибирск. Наука. Сибирское отделение. 296 С.

26. Черепенин В.А. Релятивистские многоволновые черенковские генераторы и их возможные применения. Успехи физических наук. 2006. Т. 176. № 10. С. 1124-1130.

27. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространения радиоволн. М.: Изд-во «Наука», 1989. 543 С.

28. Ильинский А.С., Косич Н.Б. Дифракция плоской волны на двумерной периодической структуре. Радиотехника и электроника. Т. 19. 1974. С.1171-1182.

29. Слепков А.И. Излучение мощных электронных потоков в резонансных периодических электродинамических системах. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. М. Физический факультет МГУ 2005.