

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени
М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

**«ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ И
СТРУКТУРЫ НАМАГНИЧЕННОСТИ ПОСТОЯННЫХ МАГНИТОВ»**

Выполнил студент
405 группы
Кулезнев Никита Евгеньевич

_____ подпись студента
Научный руководитель
д.ф.-м.н. проф. Поляков П.А.

_____ подпись научного руководителя

Допущена к защите _____

Зав. кафедрой д.ф.-м.н. проф. Салецкий А.М.

_____ подпись зав. кафедрой

Москва

2018 год

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ОДНОРОДНО НАМАГНИЧЕННОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА.....	5
2. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА, НАМАГНИЧЕННОГО В ПРОИЗВОЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИИ.....	8
3. ОБНАРУЖЕНИЕ ДЕФЕКТА В МАГНИТЕ.....	14
4. СПОСОБ ИЗМЕРЕНИЯ ИНДУКЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ФЕРРОМАГНИТНЫМ ШАРИКОМ.....	18
ВЫВОДЫ.....	27
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	28
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	30

ВВЕДЕНИЕ

Известно всего несколько нетривиальных примеров намагниченных тел, для которых магнитное поле может быть представлено в аналитическом виде. Среди таких примеров задача об однородно намагниченном эллипсоиде и его предельных случаях (шар, бесконечных цилиндр, плоскость) [1]. Для образцов более сложной формы магнитное поле рассчитывается только численными методами, что часто приводит к численным неустойчивостям [2-3]. Аналитические формулы для одноосных магнитов были сперва получены для фактора их размагничивания [4-6], и были рассчитаны поля взаимодействия для трехмерного массива ферромагнитных кубов [7]. Аналитические выражения для одноосных магнитов особенно полезны для моделирования количественной магнитной силовой микроскопии, поскольку такие модели дают доступ к точным значениям магнитного поля вместе с их производными [8].

Аналитические формулы для вычисления поля однородно намагниченного вдоль ребра прямоугольного параллелепипеда были получены и изучены в работах [9-11]. В настоящей работе же проведено обобщение этого решения и получено аналитическое решение для магнитного поля параллелепипеда, намагниченного под углом к граням.

Постоянные магниты нашли широкое применение в современной электротехнике, радиотехнике, электронике, медицине и бытовых приспособлениях [12-13]. В качестве одного из методов диагностики топологии магнитного поля постоянного магнита можно использовать экспериментальное измерение распределения этого поля и сравнение его с теоретическим расчетом для той же структуры. На основе сравнения можно установить степень однородности намагниченности данного образца, а также обнаружить неоднородности.

Неоднородности, вызванные сколами внутри объема магнита можно обнаружить, решая обратную задачу магнитостатики – задачу об определении

положения, формы, размеров и природы источника магнитной неоднородности по известным значениям магнитного поля. Решение такой задачи важно не только для многих прикладных задач в области медицины [14] и безопасности [15], но и для обнаружения дефектов при изготовлении редкоземельных постоянных магнитов.

Традиционные методы измерения магнитного поля часто недоступны в труднодостижимых средах. Благодаря аналитическому решению прямой задачи магнитостатики удалось разработать и проверить новый метод измерения магнитного поля с помощью метода магнитной локации.

1. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ОДНОРОДНО НАМАГНИЧЕННОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Задача о распределении магнитного поля однородно намагниченного вдоль вертикальной оси прямоугольного параллелепипеда решается методом скалярного магнитного потенциала [16]. В ходе решения задачи будем рассматривать параллелепипед со сторонами a , b и c и направим оси x , y и z в положительном направлении вдоль его граней как показано на рисунке 1.

В случае однородно намагниченного вдоль оси z параллелепипеда использование метода скалярного магнитного потенциала сводится к подсчету напряженности поля \vec{H} , создаваемого двумя разноименно заряженными с плотность $\sigma = |\vec{M}_s|$ плоскостями (рисунок 1). \vec{M}_s – намагниченность насыщения.

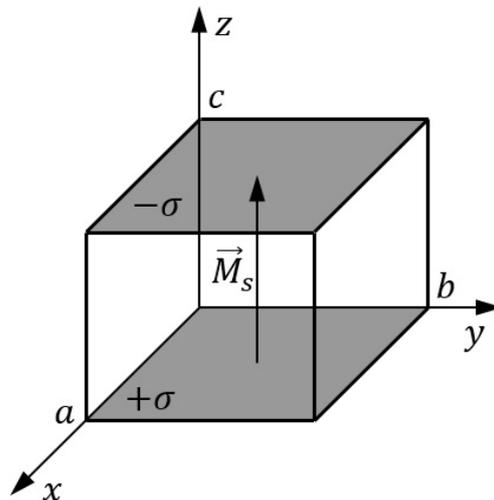


Рисунок 1. Иллюстрация к методу скалярного магнитного потенциала.

Так как расчет напряженности поля \vec{H} от одной пластины не имеет физического смысла, ведь магнитное поле может создаваться только парой таких разноименно заряженных пластин, найдем поле, создаваемое положительно заряженной пластиной, находящейся на произвольной высоте ζ .

$$dH_x(x, y, z, \sigma, \zeta) = -\frac{\sigma(\xi - x) d\xi d\eta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}},$$

$$dH_y(x, y, z, \sigma, \zeta) = -\frac{\sigma(\eta - y) d\xi d\eta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}},$$

$$dH_z(x, y, z, \sigma, \zeta) = -\frac{\sigma(\zeta - z) d\xi d\eta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}}.$$

Удобно совершить замену переменных:

$$\begin{cases} u \equiv \xi - x, \\ v \equiv \eta - y, \\ w \equiv \zeta - z. \end{cases}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} H_x(x, y, z, \sigma, \zeta) &= -\sigma \int_{-x}^{a-x} du \int_{-y}^{b-y} dv \frac{u}{[u^2 + v^2 + w^2]^{3/2}} = \\ &= \sigma \int_{-y}^{b-y} \frac{dv}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \Big|_{u=-x}^{u=a-x} = \sigma \ln \left| v + \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \right| \Big|_{u=-x}^{u=a-x} \Big|_{v=-y}^{v=b-y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_y(x, y, z, \sigma, \zeta) &= -\sigma \int_{-x}^{a-x} du \int_{-y}^{b-y} dv \frac{v}{[u^2 + v^2 + w^2]^{3/2}} = \\ &= \sigma \int_{-x}^{a-x} \frac{du}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \Big|_{v=-y}^{v=b-y} = \sigma \ln \left| u + \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \right| \Big|_{u=-x}^{u=a-x} \Big|_{v=-y}^{v=b-y}, \end{aligned}$$

$$H_z(x, y, z, \sigma, \zeta) = -\sigma \int_{-x}^{a-x} du \int_{-y}^{b-y} dv \frac{w}{[u^2 + v^2 + w^2]^{3/2}} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\sigma \int_{-x}^{a-x} \frac{du}{u^2 + w^2} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \Big|_{v=-y}^{v=b-y} = \\
&= -\sigma \frac{v}{|v|} \frac{w}{|w|} \operatorname{arctg} \frac{u|v|}{|w|\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \Big|_{u=-x}^{u=a-x} \Big|_{v=-y}^{v=b-y}.
\end{aligned}$$

Для нахождения создаваемого параллелепипедом поля, необходимо сложить поле от двух разноименно заряженных пластин.

$$H_i(x, y, z, \sigma) \equiv H_i(x, y, z, \sigma, 0) - H_i(x, y, z, \sigma, c).$$

Таким образом, для компонент поля получаем:

$$H_x(x, y, z, \sigma) = -\sigma \ln \left(v + \sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2} \right) \Big|_{u=-x}^{u=a-x} \Big|_{v=-y}^{v=b-y} \Big|_{\omega=-z}^{\omega=c-z}, \quad (1)$$

$$H_y(x, y, z, \sigma) = -\sigma \ln \left(u + \sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2} \right) \Big|_{u=-x}^{u=a-x} \Big|_{v=-y}^{v=b-y} \Big|_{\omega=-z}^{\omega=c-z}, \quad (2)$$

$$H_z(x, y, z, \sigma) = \sigma \frac{v}{|v|} \frac{\omega}{|\omega|} \operatorname{arctg} \frac{u|v|}{|\omega|\sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2}} \Big|_{u=-x}^{u=a-x} \Big|_{v=-y}^{v=b-y} \Big|_{\omega=-z}^{\omega=c-z}. \quad (3)$$

Полученные выражения расходятся вблизи горизонтальных ребер бруска. К примеру:

$$\lim_{0 < y < b, x \rightarrow 0, z \rightarrow 0} \left[\ln \left(-y + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) \right] = \lim_{0 < y < b, x \rightarrow 0, z \rightarrow 0} [\ln(-y + y)] \rightarrow \infty.$$

Эта расходимость связана с тем, что при использовании метода скалярного магнитного потенциала заряды оказались локализованы в плоскостях на границе проводника. Поэтому вблизи границ этих плоскостей возникли некорректные с физической точки зрения значения. Однако в ряде задач эта расходимость не играет роли.

2. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА, НАМАГНИЧЕННОГО В ПРОИЗВОЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИИ

В случае параллелепипеда, намагниченого под произвольным углом, напряженность поля \vec{H} в любой точке пространства является суперпозицией полей \vec{H}^x , \vec{H}^y и \vec{H}^z , создаваемых параллелепипедом, намагниченным вдоль осей x , y и z соответственно:

$$\vec{H} = \vec{H}^x + \vec{H}^y + \vec{H}^z. \quad (4)$$

В таком случае, при расчете напряженности поля методом скалярного магнитного потенциала, плоскости будут заряжены с плотностью

$$\sigma_x = M_{sx}, \quad \sigma_y = M_{sy}, \quad \sigma_z = M_{sz} \quad (5)$$

для намагниченности вдоль осей x , y и z соответственно.

Для удобства определения направления намагниченности параллелепипеда, перейдем к сферическим координатам (рисунок 2):

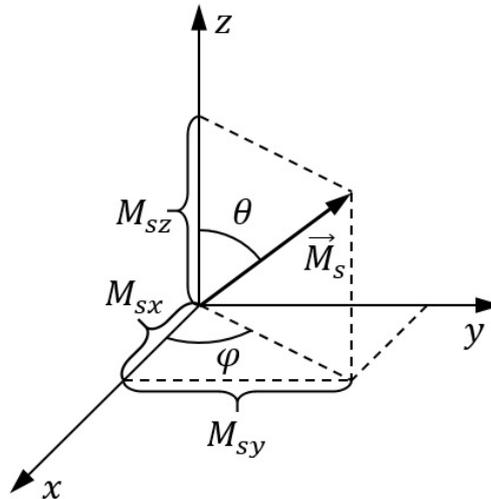


Рисунок 2. Намагниченность насыщения \vec{M}_s в сферической системе координат.

Тогда получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= |\vec{M}_s| \sin \theta \cos \varphi, \\ \sigma_y &= |\vec{M}_s| \sin \theta \sin \varphi, \\ \sigma_z &= |\vec{M}_s| \cos \theta. \end{aligned} \quad (6)$$

Заменяв σ на σ_z в (1) – (3) получаем составляющую поля \vec{H}^z в (4). Аналогично можно рассчитать составляющие \vec{H}^x и \vec{H}^y для намагниченности вдоль осей x и y соответственно.

Для удобства воспользуемся выражениями для проекций напряженности поля \vec{H} , полученными при решении задачи без регуляризации. Окончательно получаем напряженность поля \vec{H} , создаваемого прямоугольным параллелепипедом, намагниченным под произвольным углом, в проекции на ось x :

$$H_x = H_x^x + H_x^y + H_x^z, \quad (7)$$

$$H_x^x(x, y, z, \sigma) = \sigma_x \frac{u}{|u|} \frac{v}{|v|} \operatorname{arctg} \frac{|v|\omega}{|u|\sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2}} \Big|_{u=-x}^{u=a-x} \Big|_{v=-y}^{v=b-y} \Big|_{\omega=-z}^{\omega=c-z}, \quad (8)$$

$$H_x^y(x, y, z, \sigma) = -\sigma_y \ln \left(\omega + \sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2} \right) \Big|_{u=-x}^{u=a-x} \Big|_{v=-y}^{v=b-y} \Big|_{-z}^{\omega=c-z}, \quad (9)$$

$$H_x^z(x, y, z, \sigma) = -\sigma_z \ln \left(v + \sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2} \right) \Big|_{u=-x}^{u=a-x} \Big|_{v=-y}^{v=b-y} \Big|_{\omega=-z}^{\omega=c-z}, \quad (10)$$

на ось y :

$$H_y = H_y^x + H_y^y + H_y^z, \quad (11)$$

$$H_y^x(x, y, z, \sigma) = -\sigma_x \ln \left(\omega + \sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2} \right) \Big|_{u=-x}^{u=a-x} \Big|_{v=-y}^{v=b-y} \Big|_{\omega=-z}^{\omega=c-z}, \quad (12)$$

$$H_y^y(x, y, z, \sigma) = \sigma_y \frac{v}{|v|} \frac{\omega}{|\omega|} \operatorname{arctg} \frac{u|\omega|}{|v|\sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2}} \Big|_{u=-x}^{u=a-x} \Big|_{v=-y}^{v=b-y} \Big|_{\omega=-z}^{\omega=c-z}, \quad (13)$$

$$H_y^z(x, y, z, \sigma) = -\sigma_z \ln \left(u + \sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2} \right) \Big|_{u=-x}^{u=a-x} \Big|_{v=-y}^{v=b-y} \Big|_{\omega=-z}^{\omega=c-z}, \quad (14)$$

на ось z :

$$H_z = H_z^x + H_z^y + H_z^z, \quad (15)$$

$$H_z^x(x, y, z, \sigma) = -\sigma_x \ln \left(v + \sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2} \right) \Big|_{u=-x}^{u=a-x} \Big|_{v=-y}^{v=b-y} \Big|_{\omega=-z}^{\omega=c-z}, \quad (16)$$

$$H_z^y(x, y, z, \sigma) = -\sigma_y \ln \left(u + \sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2} \right) \Big|_{u=-x}^{u=a-x} \Big|_{v=-y}^{v=b-y} \Big|_{\omega=-z}^{\omega=c-z}, \quad (17)$$

$$H_z^z(x, y, z, \sigma) = \sigma_z \frac{v}{|v|} \frac{\omega}{|\omega|} \operatorname{arctg} \frac{u|v|}{|\omega| \sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2}} \Big|_{u=-x}^{u=a-x} \Big|_{v=-y}^{v=b-y} \Big|_{\omega=-z}^{\omega=c-z}. \quad (18)$$

Полученные формулы можно использовать для анализа изменений в распределении магнитного поля намагниченного параллелепипеда при отклонении вектора намагниченности от оси симметрии.

Рассмотрим отклонение вектора намагниченности \vec{M}_s от вертикали при $\varphi = 0^\circ$ и соответствующие ему изменения в распределениях проекций вектора напряженности магнитного поля H_x и H_z вдоль прямой, изображенной на рисунке:

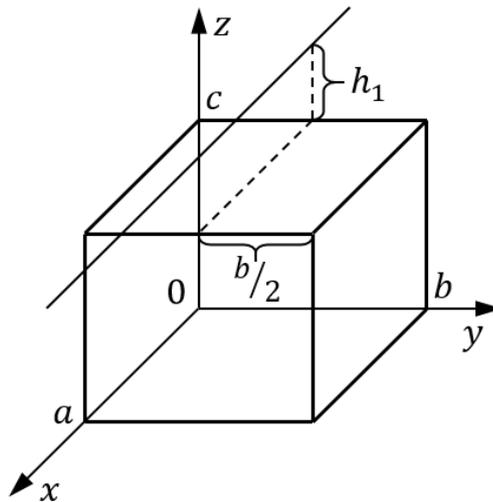


Рисунок 3. Линия, вдоль которой проводился теоретический расчет магнитного поля.

Линия параллельна оси Ox , $h_1 = 3,8$ мм.

Ниже на графиках изображены теоретические кривые, соответствующие повороту вектора \vec{M}_s на углы $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ с шагом в 10° (рисунки 4, 5).

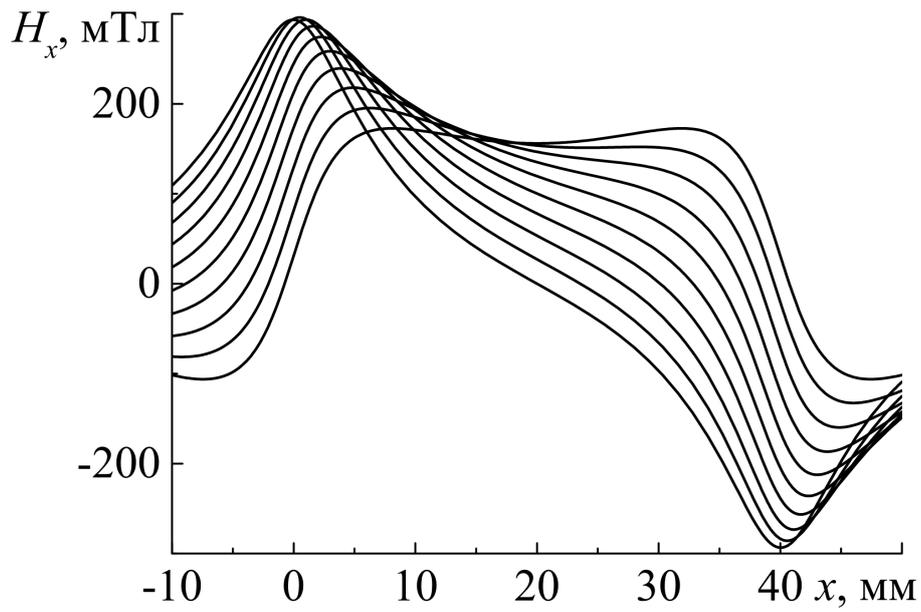


Рисунок 4. Теоретические распределения проекции вектора напряженности магнитного поля H_x (мТл) на ось Ox в зависимости от координаты x (мм) ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ, \varphi = 0^\circ$).

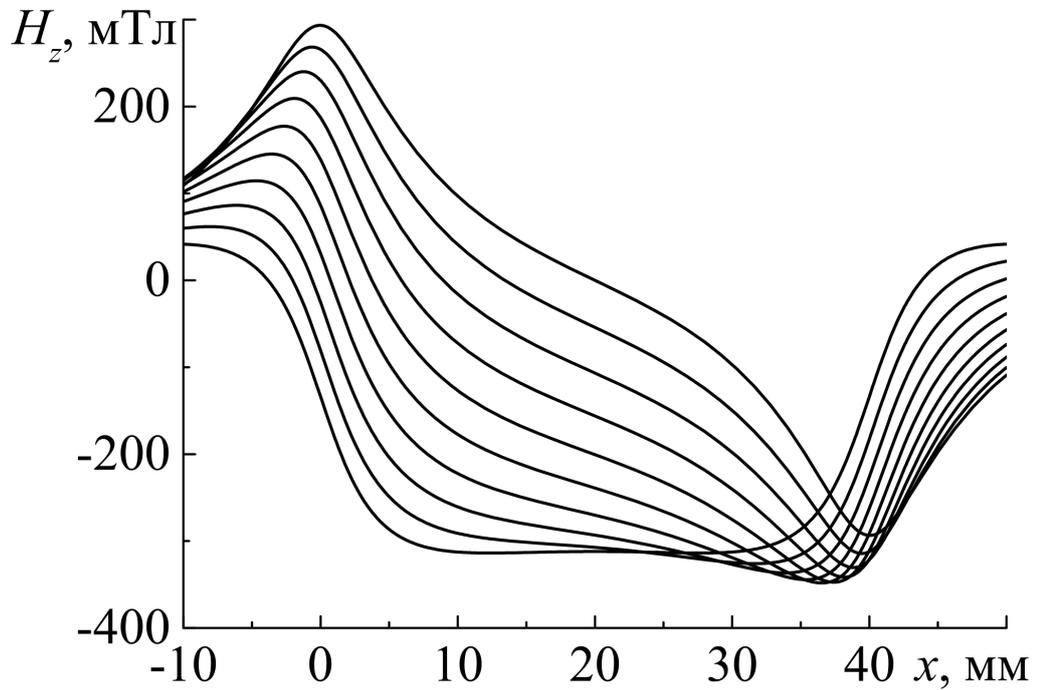


Рисунок 5. Теоретические распределения проекции вектора напряженности магнитного поля H_z (мТл) на ось Oz в зависимости от координаты x (мм) ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ, \varphi = 0^\circ$).

Также были исследованы изменения в распределениях магнитного поля при фиксированном отклонении вектора намагниченности \vec{M}_s от вертикали $\theta = 60^\circ$ и изменении угла $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ с шагом в 10° вдоль прямой, изображенной на рисунке 3:

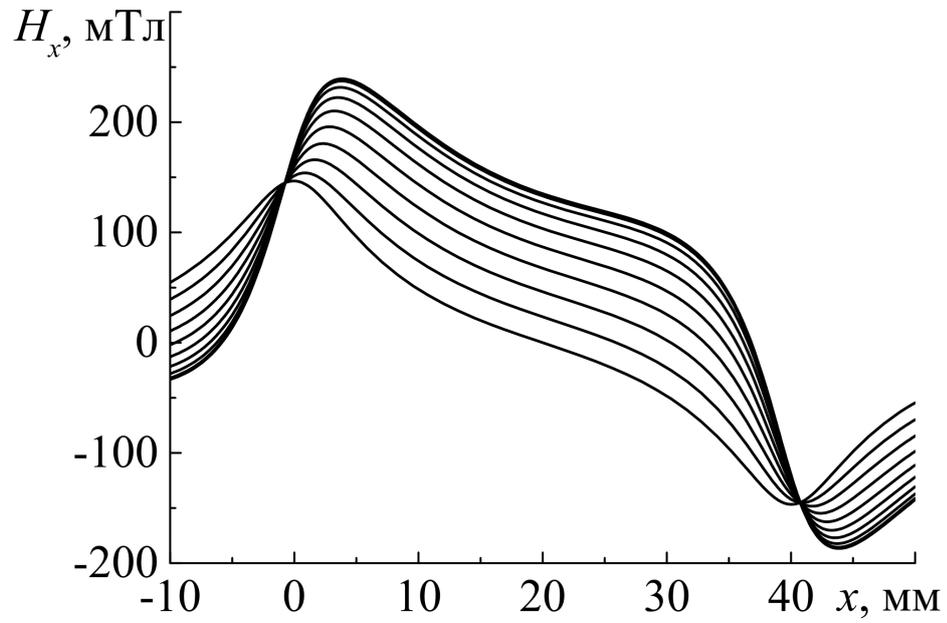


Рисунок 6. Теоретические распределения проекции вектора напряженности магнитного поля H_x (мТл) на ось Ox в зависимости от координаты x (мм) ($\theta = 60^\circ, 0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$).

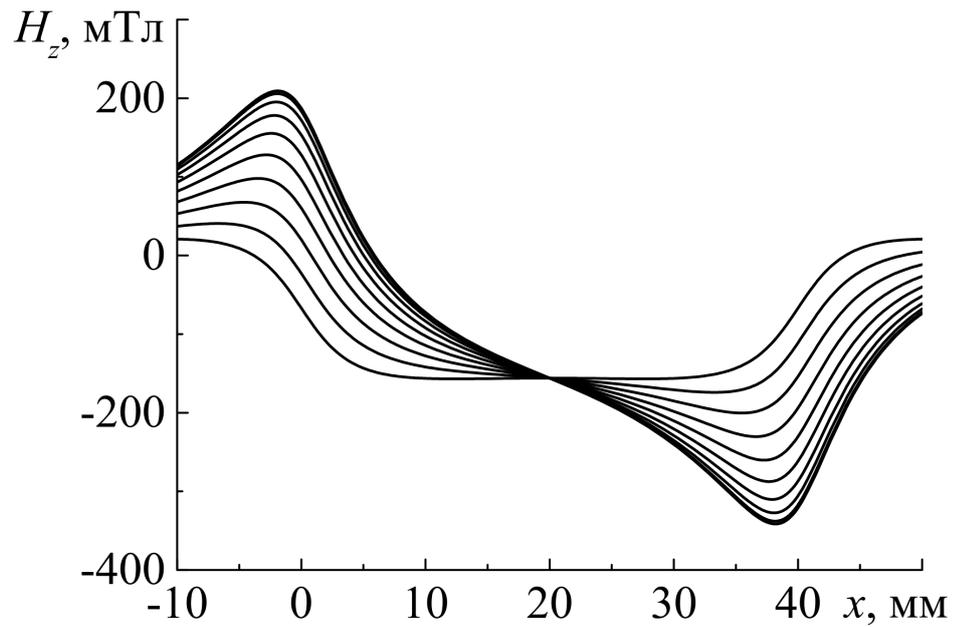


Рисунок 7. Теоретические распределения проекции вектора напряженности магнитного поля H_z (мТл) на ось Oz в зависимости от координаты x (мм) ($\theta = 60^\circ, 0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$).

Полученные формы зависимостей можно использовать для оценки угла поворота намагниченности в образцах, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда.

3. ОБНАРУЖЕНИЕ ДЕФЕКТА В МАГНИТЕ

Благодаря полученному выше общему аналитическому решению, нам удалось решить ранее практически нерешаемую обратную задачу магнитостатики об обнаружении дефекта в объеме магнита.

В нашем распоряжении имелся однородно намагниченный постоянный магнит в форме прямоугольного параллелепипеда размером 35x28x15 мм состава неодим-железо-бор, со сколом на одном из его углов. При помощи датчика Холла с эффективным размером порядка 2 мм и чувствительностью порядка 1-5 Э [17] были проведены экспериментальные измерения проекции на ось z вектора напряженности магнитного поля \vec{H} вдоль прямой, параллельной грани образца со сколом (рисунок 8).

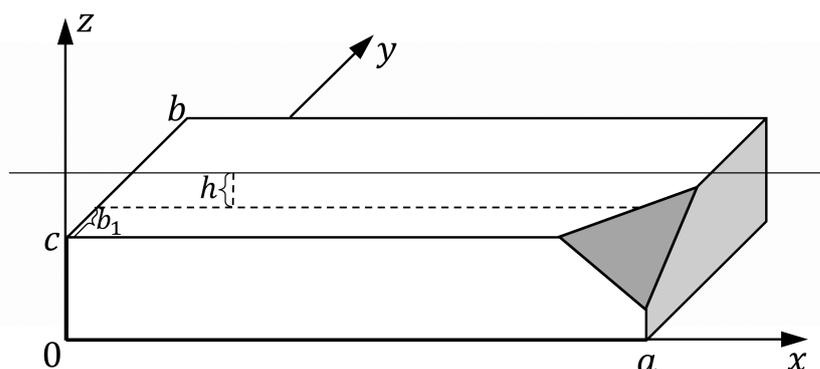


Рисунок 8. Магнит со сколом.

Линия параллельна оси Ox , $h = 0.9$ мм, $b_1 = 2$ мм.

Затем по ранее полученным аналитическим формулам (3) было построено распределение проекции на ось z вектора напряженности магнитного поля \vec{H} однородно намагниченного образца в форме прямоугольного параллелепипеда со сторонами, соответствующими тем, что и у имеющегося образца, вдоль той же прямой, вдоль которой проводились экспериментальные измерения. Однако теоретическое распределение было рассчитано без учета дефекта магнита.

На теоретическую кривую, соответствующую напряженности магнита без скола, были наложены экспериментальные значения, полученные при

измерении магнита со сколом (рисунок 9). Несовпадение экспериментальных значений с теоретическими означает присутствие дефекта в магните на этом отрезке прямой, в рассмотренном нами случае это скол на углу магнита.

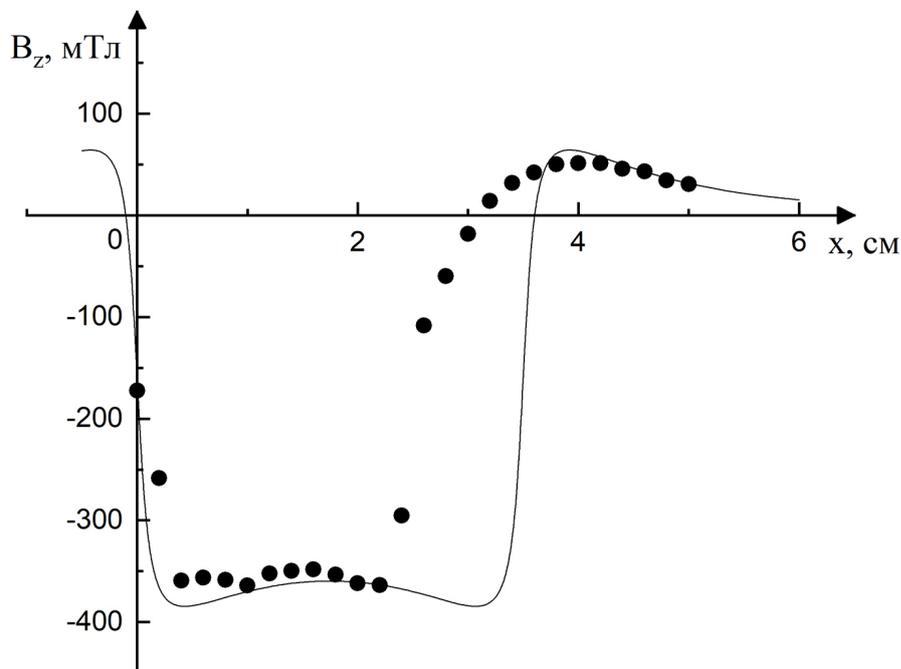


Рисунок 9. Зависимость проекции вектора напряженности магнитного поля \vec{H} (мТл) магнита на ось Oz от координаты x (мм). Сплошная линия соответствует теоретическому распределению, точками обозначены экспериментальные значения.

Из значений проекции на ось z вектора напряженности \vec{H} магнита без скола, рассчитанных теоретически в каждой из точек, в которых проводились экспериментальные измерения, были вычтены экспериментальные значения для магнита со сколом. Полученный результат был наложен на теоретическую кривую, описывающую распределение вдоль той же прямой проекции на ось z вектора напряженности \vec{H} диполя, помещенного в геометрический центр скола магнита (рисунок 10). Магнитный момент диполя был подобран таким образом, чтобы он наилучшим образом аппроксимировал полученный результат.

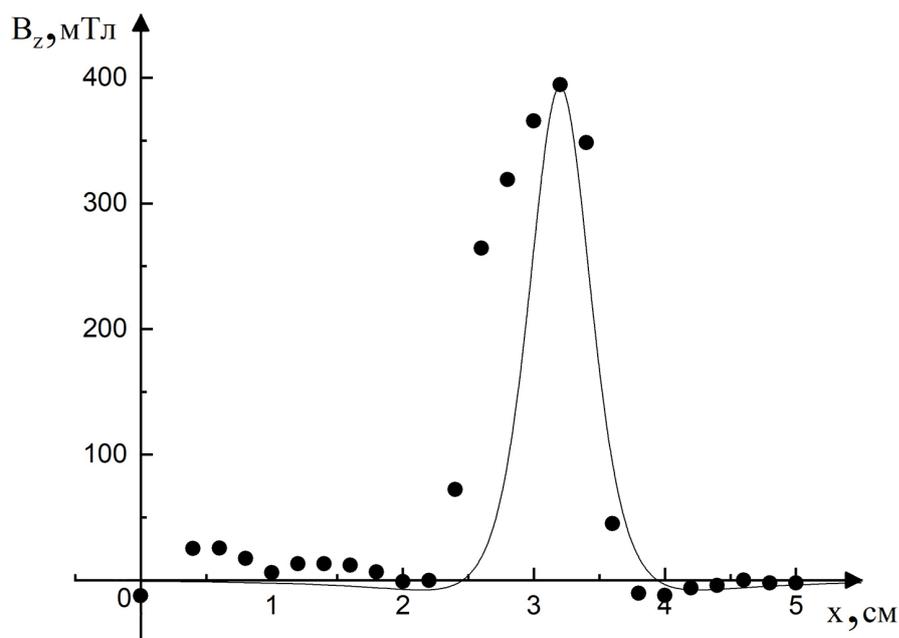


Рисунок 10. Зависимость проекции вектора напряженности магнитного поля \vec{H} (мТл) диполя на ось Oz от координаты x (мм). Сплошная линия соответствует теоретическому распределению, точками обозначены экспериментальные значения.

По результатам сравнения экспериментальных и теоретических данных удалось установить положение скола. По величине подобранного магнитного момента диполя был определен эффективный объем скола $V_{\text{эфф}} = 311,6 \text{ мм}^3$, в то время как реальный объем скола $V_{\text{реал}} = 338 \text{ мм}^3$. Таким образом по полученным аналитическим формулам было положено начало разработке метода определения дефектов в магните в форме прямоугольного параллелепипеда.

Данный эксперимент изучает метод обнаружения эффективного объема дефекта в магните в форме прямоугольного параллелепипеда только в случае, если положение дефекта заведомо известно. Если же дефект неопределенной формы находится в неопределенной точке внутри или на поверхности магнита, то измерения следует проводить вдоль нескольких параллельных боковым граням прямых с неким шагом Δ . Затем нужно выявить, вдоль какой из прямых результаты экспериментальных измерений больше всего расходятся с теоретическими расчетами для однородно намагниченного

магнита в форме прямоугольного параллелепипеда без дефектов. Для выбранной прямой затем необходимо провести такие же исследования, как и те, что представлены выше. Таким образом, проведя сравнение с теоретическим расчетом напряженности магнитного поля, создаваемого диполем, можно выявить эффективный объем дефекта и его положение в магните в форме прямоугольного параллелепипеда.

4. СПОСОБ ИЗМЕРЕНИЯ ИНДУКЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ФЕРРОМАГНИТНЫМ ШАРИКОМ

В данной главе предлагается новый способ измерения индукции магнитного поля посредством помещения в исследуемую область пространства ферромагнитного шарика. В нашем случае используется стальной шарик радиусом 13,5 мм. А в качестве источника магнитного поля используется прямоугольный однородно намагниченный магнит, для которого в предыдущих главах была получена общая аналитическая формула для индукции магнитного поля. Используя эту формулу, мы можем рассчитать величину погрешности, допускаемую данным методом.

Под воздействием магнитного поля ферромагнитный шарик намагничивается и приобретает магнитный момент, направленный вдоль вектора индукции внешнего магнитного поля, если в данном материале отсутствует какая-либо магнитная анизотропия.

При помещении ферромагнетика в магнитное поле с напряженностью \vec{H} , индукция \vec{B} в нем выражается соотношением

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{I}), \quad (19)$$

где μ_0 – магнитная постоянная ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м), \vec{I} – намагниченность.

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I} \quad (20)$$

Если ферромагнитный шарик помещается во внешнее магнитное поле с напряженностью \vec{H}_0 , то его напряженность магнитного поля \vec{H} определяется следующим выражением [1]:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 - \frac{1}{3}\vec{I}(\vec{H}), \quad (21)$$

где $\vec{I}(\vec{H})$ – намагниченность шарика.

Из (20) и (21):

$$\vec{H} = \vec{H}_0 - \frac{1}{3} \left(\frac{\vec{B}(\vec{H})}{\mu_0} - \vec{H} \right), \quad (22)$$

$$\vec{H}_0 = \vec{H} + \frac{1}{3} \left(\frac{\vec{B}(\vec{H})}{\mu_0} - \vec{H} \right) = \frac{2}{3} \vec{H} + \frac{1}{3} \frac{\vec{B}(\vec{H})}{\mu_0}. \quad (23)$$

Зависимость модуля вектора индукции магнитного поля от величины напряженности магнитного поля в какой-либо точке внутри ферромагнитного шарика определяется нелинейной кривой намагнитченности, представленной графически на рисунке 11 [18].

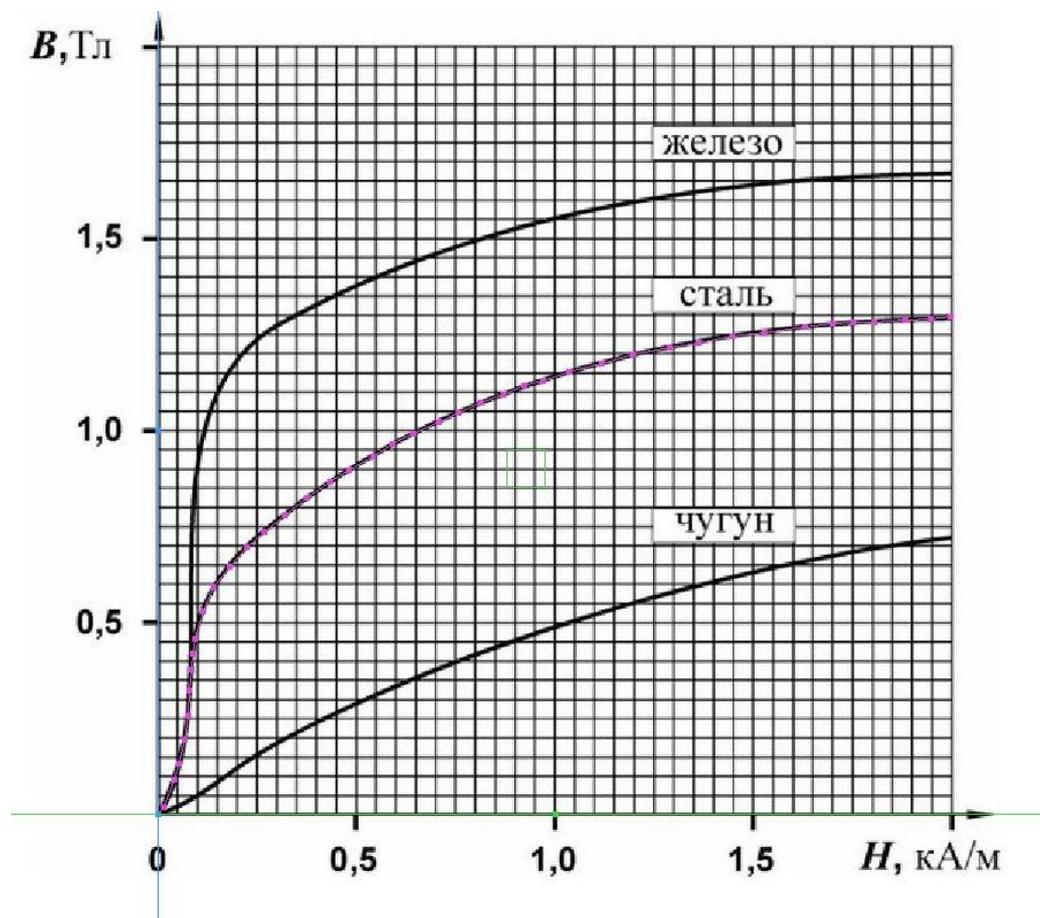


Рисунок 11. Теоретическая кривая намагнитченности для чугунного, стального и железного образца.

Графическая зависимость для стали была оцифрована (см. рисунок 11) и полученные табличные значения были подставлены в формулу (23). Разрешая это уравнение, находим численную зависимость $\vec{H}_0 = \vec{H}_0(\vec{H})$. Тогда,

подставляя эту зависимость в формулу (21) находим зависимость вектора намагниченности \vec{I} от напряженности внешнего поля \vec{H}_0

$$\vec{I} = 3 \left(\vec{H}_0 - \vec{H}(\vec{H}_0) \right).$$

Теперь построим график зависимости величины вектора намагниченности \vec{I} от величины индукции внешнего магнитного поля $\vec{B}_0 = \vec{H}_0 \mu_0$:

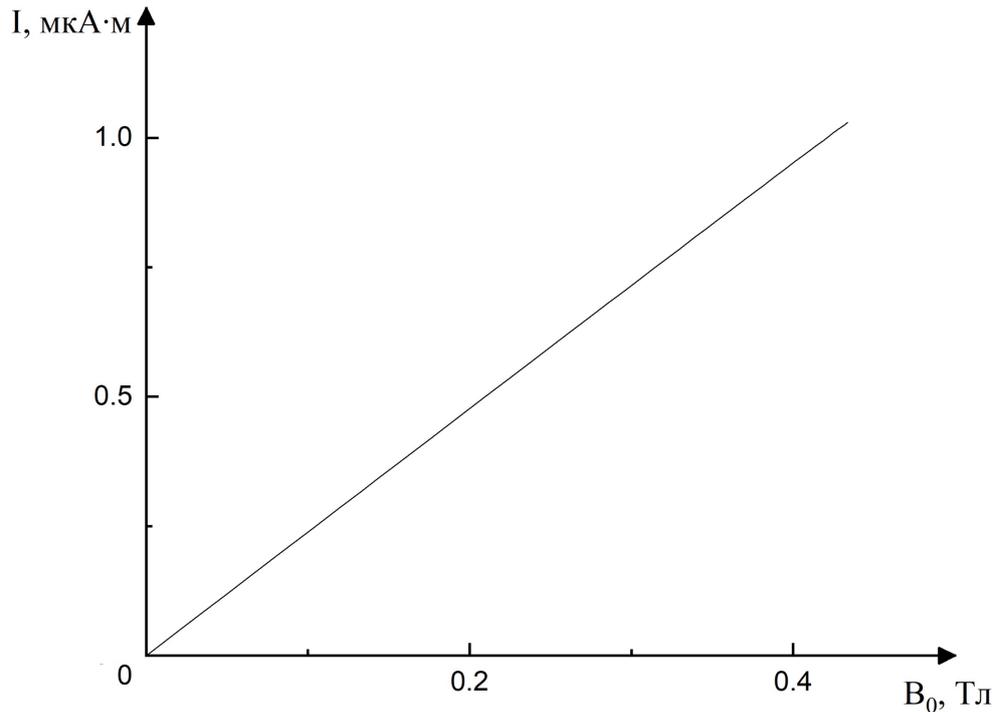


Рисунок 12. График зависимости намагниченности I от индукции внешнего магнитного поля B_0 .

Видно, что этот график в рассматриваемом диапазоне с высокой точностью является линейным с тангенсом угла наклона равным $3/\mu_0$. Относительная ошибка отклонения от этой линейной зависимости не превышает одной десятой процента. Физически это означает, что в данном диапазоне полей эффективная относительная магнитная проницаемость является очень большой и принимает значения от тысячи до десяти тысяч. Поэтому при внесении шарика во внешнее магнитное поле \vec{H}_0 в шарике

индуцируется размагничивающее поле равное $\frac{1}{3}\vec{I}$ практически равное \vec{H}_0 , меньшее его на величину порядка 0,1 - 0,01%.

Таким образом с высокой точностью мы можем приближенно считать, что

$$\vec{H}_0 \approx \frac{1}{3}\vec{I}(\vec{H})$$

Отсюда получаем, что $\mu_0\vec{I} = 3\vec{H}_0\mu_0$. Примем индукцию внешнего магнитного поля за $\vec{B}_0 = \vec{H}_0\mu_0$ и получим:

$$\vec{I} = \frac{3\vec{B}_0}{\mu_0}.$$

А так как магнитный дипольный момент ферромагнетика связан с его намагниченностью как $\vec{p} = \vec{I} \cdot V$, где V – объем этого ферромагнетика, то получаем

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{3} \frac{\vec{p}_m}{V}. \quad (24)$$

Перепишем формулу (24) в удобном для нас виде:

$$\vec{I}\mu_0 = \mu_0 \frac{\vec{p}}{V} = 3\vec{B}_0. \quad (25)$$

В случае, если внешнее магнитное поле создается магнитом в форме прямоугольного параллелепипеда, индукция \vec{B}_0 определяется из полученных выше аналитических выражений (1) – (3).

Для экспериментальных исследований был взят однородно намагниченный постоянный магнит в форме прямоугольного параллелепипеда размерами 40×40×15 мм и стальной шарик радиусом $R = 13,5$ мм. Шарик был помещен сбоку от магнита на расстоянии $d = b/2$ от его центра до боковой грани магнита и перемещался вдоль параллельной оси z прямой с шагом $\Delta z = 5$ мм (рисунок 13).

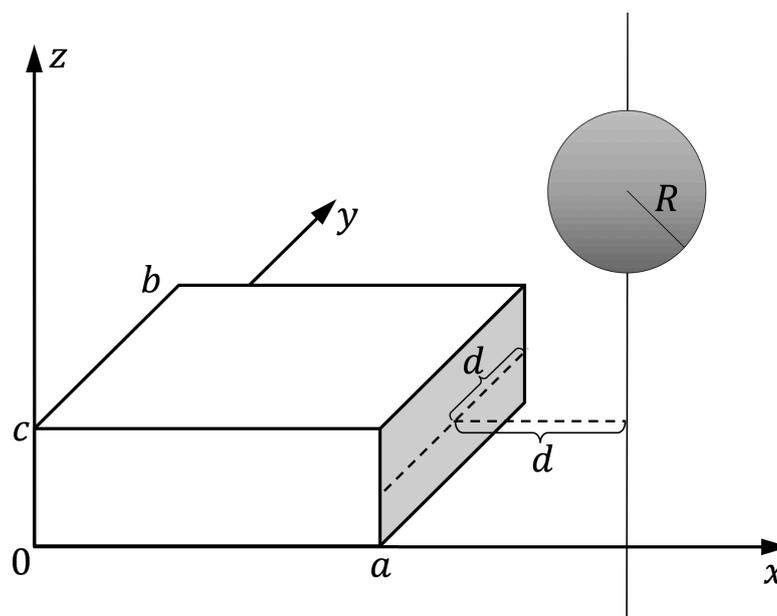


Рисунок 13. Измерения шарика, намагниченного от постоянного прямоугольного магнита.

Линия параллельна оси Oz , $d = b/2 = 20$ мм, $R = 13,5$ мм.

Шарик намагничивался внешним магнитным полем, создаваемым постоянным магнитом в форме прямоугольного параллелепипеда, и при перемещении шарика вдоль вертикально направленной прямой измерялись проекции на оси x , y и z его магнитного дипольного момента специальным прибором (магнитостатическим локатором [19-21]). Из полученных результатов проекций магнитного дипольного момента шарика \vec{p} были построены в соответствии с формулой (25) зависимости проекций намагниченности стального шарика \vec{I} , умноженные на магнитную постоянную μ_0 , от значений в точках, соответствующих положению шарика, проекций индукции внешнего магнитного поля \vec{B}_0 , создаваемого постоянным магнитом в форме прямоугольного параллелепипеда. Полученные экспериментальные точки были аппроксимированы по пропорциональной зависимости методом наименьших квадратов. Из формулы (25) видно, что полученный из метода наименьших квадратов коэффициент $k = \frac{\vec{I}\mu_0}{B_0}$ должен быть равен трем, однако поле в пределах шарика неоднородно, поэтому к коэффициенту k необходима поправка, что и определяет этот эксперимент. На рисунках 14-15

представлены экспериментальные результаты для проекций на ось x и z векторов \vec{I} и \vec{B}_0 и аппроксимация этих результатов МНК.

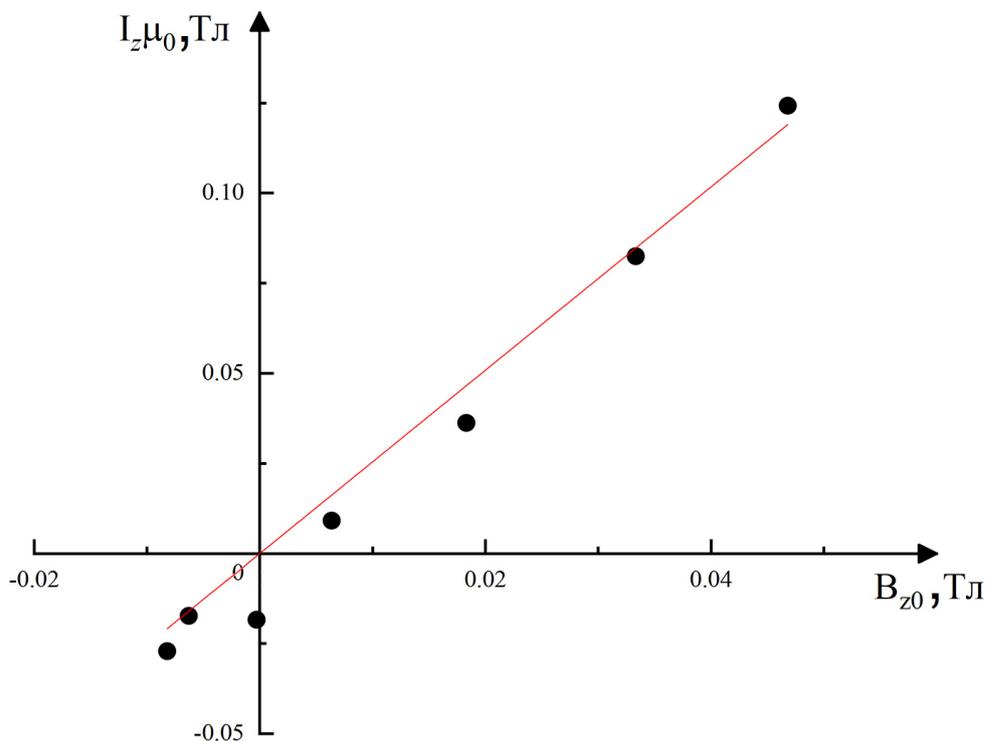


Рисунок 14. Зависимость произведения проекции на ось z вектора намагниченности стального шарика \vec{I} на магнитную постоянную μ_0 от проекции на ось z индукции внешнего магнитного поля \vec{B}_0 . Точками обозначены экспериментальные значения, прямой

линией – аппроксимация МНК. $k_z = \frac{I_z \mu_0}{B_{z0}} = 2,54 \pm 0,15$.

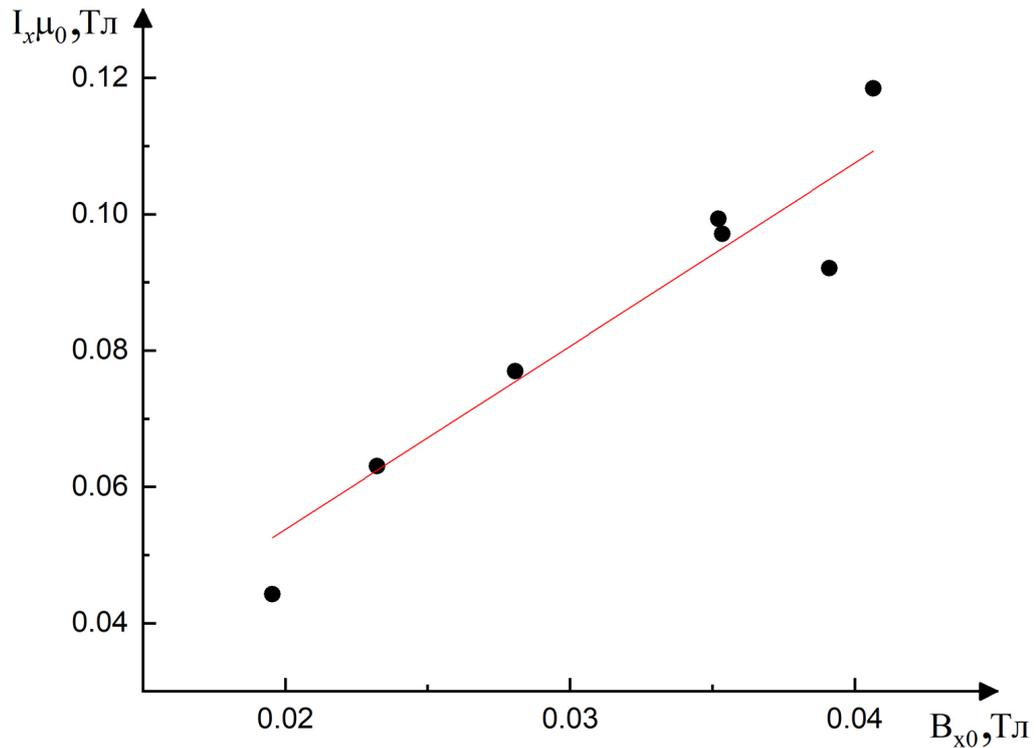


Рисунок 15. Зависимость произведения проекции на ось x вектора намагниченности стального шарика \vec{I} на магнитную постоянную μ_0 от проекции на ось x индукции внешнего магнитного поля \vec{B}_0 . Точками обозначены экспериментальные значения, прямой

$$\text{линией – аппроксимация МНК. } k_x = \frac{I_x \mu_0}{B_{x0}} = 2,68 \pm 0,08.$$

Также были проведены аналогичные измерения дипольного магнитного момента стального шарика над магнитом, вдоль прямой, изображенной на рисунке 16. На рисунке 17 представлены экспериментальные результаты для проекций на ось z векторов \vec{I} и \vec{B}_0 и аппроксимация этих результатов МНК.

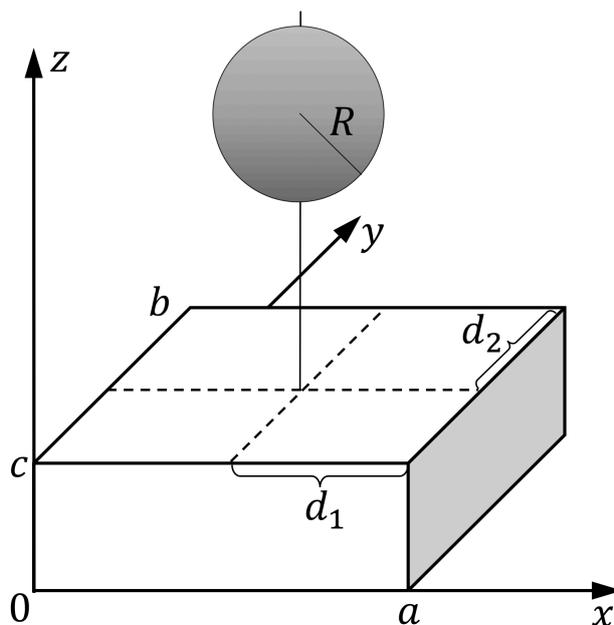


Рисунок 16. Измерения шарика, намагниченного от постоянного прямоугольного магнита.

Линия параллельна оси Oz , $d_1 = d_2 = a/2 = b/2 = 20$ мм, $R = 13,5$ мм.

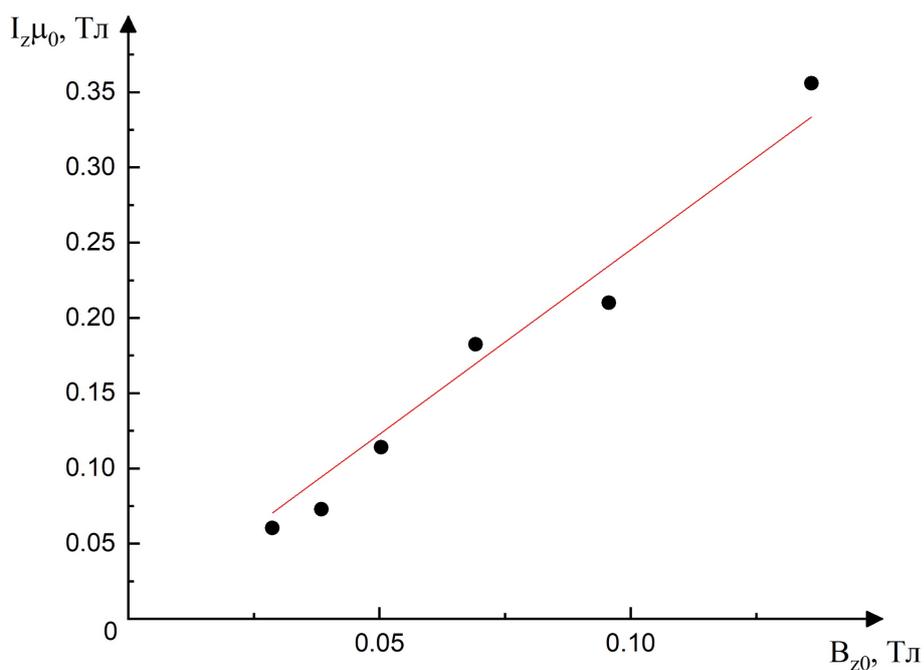


Рисунок 17. Зависимость произведения проекции на ось x вектора намагниченности стального шарика \vec{I} на магнитную постоянную μ_0 от проекции на ось x индукции внешнего магнитного поля \vec{B}_0 .

Точками обозначены экспериментальные значения, прямой линией – аппроксимация

$$\text{МНК. } k_z = \frac{I_z \mu_0}{B_{x0}} = 2,4 \pm 0,1.$$

Проделанный эксперимент показывает, что теоретический коэффициент пропорциональности, рассматриваемый между вектором намагниченности и внешним магнитным полем, имеет немного меньшее значение по сравнению с 3, которая справедлива только для случая строго однородного поля. В нашем случае поле в пределах шарика неоднородно, что приводит к несколько большему эффективному значению размагничивающего коэффициента, соответственно равному $\frac{1}{k}$.

Таким образом, при наличии прибора (магнитостатического локатора), позволяющего с высокой точностью измерять положение и проекции дипольного магнитного момента шарика, можно измерять индукцию магнитного поля в области нахождения стального шарика без непосредственного контакта прибора с этим шариком. Следовательно, мы можем этим способом измерять индукцию магнитного поля в средах, не доступных для измерения традиционными магнитометрами. Например в агрессивной жидкости, при низких и высоких температурах (не превышающих температуру Кюри), в бетоне, внутри работающих устройств: электродвигателей, генераторов, турбин, двигателей внутреннего сгорания и т.п.

ВЫВОДЫ

В данной работе было изучено аналитическое решение прямой задачи магнитостатики для однородно намагниченного магнита в форме прямоугольного параллелепипеда. На основе этого решения было проведено его обобщение в случае однородно намагниченного в произвольном направлении магнита в форме прямоугольного параллелепипеда, что позволяет изучать свойства магнита, вектор намагниченности которого направлен под углом к боковым граням.

Благодаря полученному общему аналитическому решению прямой задачи магнитостатики, удалось решить ранее практически нерешаемую обратную задачу магнитостатики об обнаружении дефекта в объеме магнита. Было рассмотрено решение задачи, в которой известно положение дефекта в объеме магнита, и в результате было получено значение эффективного объема такого дефекта. Также было сделано предположение о том, как решить подобную обратную задачу магнитостатики, в которой положение дефекта в объеме магнита заведомо неизвестно.

Также был разработан новый метод измерения магнитного поля с помощью ферромагнетика в форме шара, а полученное ранее общее аналитическое решение прямой задачи магнитостатики для магнита в форме прямоугольного параллелепипеда позволило внести в этот метод поправку. Из экспериментальных измерений удалось получить реальную зависимость исследуемого внешнего магнитного поля от магнитного дипольного момента помещенного в это поле стального шарика, что позволяет определять индукцию этого внешнего магнитного поля, измеряя дипольный момент стального шарика магнитостатическим локатором.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Так как постоянные магниты имеют широкое применение в самых разных отраслях производства, важно уметь определять их свойства. Поскольку аналитическое решение прямой задачи магнитостатики раньше использовалось только в случае однородно намагниченных магнитов симметричной (сферической или цилиндрической) формы, а магнитные поля более сложных фигур рассчитывались только численно, было возникает необходимость в изучении решения прямой задачи магнитостатики для магнитов в форме прямоугольного параллелепипеда, так как магниты такой формы наиболее широко распространены в производстве. Обобщение аналитического решения этой задачи может быть применимо для определения степени намагниченности образца прямоугольной формы посредством проведения экспериментального исследования этого образца и сравнения его с теоретическим расчетом по аналитическим формулам. В частности, для образца прямоугольной формы можно таким образом определить направление вектора его намагниченности, если он отклоняется от вертикали, что может являться последствием дефекта в изготовлении постоянного редкоземельного магнита прямоугольной формы.

В процессе изготовления и эксплуатации редкоземельных постоянных магнитов могут также возникать дефекты в объеме магнита, из-за которых поле, создаваемое магнитом, может иметь неоднородности. Изучая с помощью экспериментального исследования и аналитического расчета эти неоднородности, удалось разработать метод определения наличия, положения и эффективного объема этих дефектов, тем самым решив обратную задачу магнитостатики.

Обобщенное решение прямой задачи магнитостатики для магнита в форме прямоугольного параллелепипеда было также использовано при разработке нового метода измерения магнитного поля с помощью ферромагнетика в форме шара. В средах, в которых измерение магнитного

поля традиционными методами невозможно, можно при помощи магнитостатического локатора без непосредственного контакта измерять индукцию магнитного поля, в которое помещен стальной ферромагнитный шарик. При помощи аналитического расчета поля, создаваемого однородно намагниченным магнитом в форме прямоугольного параллелепипеда, удалось внести поправку к значению размагничивающего коэффициента стального шарика, помещенного в это поле.

За помощь в проведении исследований к этой бакалаврской работе выражаю благодарность студенту магистратуры физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова В.С. Шевцову.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Стрэттон Дж.А. Теория электромагнетизма. М.-Л.: ГТТИ, 1948.
2. Самарский А.А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1978.
3. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. М.: ФИЗМАТГИЗ, 1962.
4. Aharoni A. Demagnetizing factors for rectangular ferromagnetic prisms // Journal of Applied Physics. 1998. Vol. 83. P. 3432.
5. Joseph R.I., Schlömann E. Demagnetizing Field in Nonellipsoidal Bodies // Journal of Applied Physics. 1965. Vol. 36. P. 1579.
6. Zheng G., Pardavi-Horvath M., Huang X. Experimental determination of an effective demagnetization factor for nonellipsoidal geometries // Journal of Applied Physics. 1996. Vol. 79. P. 5742.
7. Schabes M.E., Aharoni A. Magnetostatic interaction fields for a 3-dimensional array of ferromagnetic cubes // IEEE Trans. Magn. 1987. Vol. 23. P. 3882.
8. Kebe Th., Carl A. Calibration of magnetic force microscopy tips by using nanoscale current-carrying parallel wires // Journal of Applied Physics. 2004. Vol. 95. P. 775.
9. Engel-Herbert R., Hesjedal T. Calculation of the magnetic stray field of a uniaxial magnetic domain // Journal of Applied Physics. 2005. Vol. 97. Iss. 7. P. 074504.
10. Вагин Д.В., Герасименко Т.Н., Поляков П.А. Точное аналитическое выражение для индукции магнитного поля образца прямоугольной формы // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. 2008. № 6. С. 53-55.
11. Печенков А.Н. Алгоритмы расчетов и моделирования прямых и обратных задач магнитостатической дефектоскопии и устройств технической магнитостатики: дис. ... д. тех. наук: 05.02.11, Екатеринбург, 2007.

12. Резинкина М.М. Численный расчет магнитного поля и магнитного момента ферромагнитных тел сложной пространственной конфигурации // Журнал технической физики. 2009. Т. 79. В. 8. С. 8-17.
13. Соколов Д.Ю. Синтез высокооднородного поля постоянного магнита МР-томографа и задача реконструкции плотности объекта: дис. ... к. техн. наук: 05.11.01, СПб, 2007.
14. Wang X., Meng M.Q.-H. Study of a position and orientation tracking method for wireless capsule endoscope // International Journal of Information Acquisition. 2005. Vol. 2. № 2. P. 113-121.
15. Карпов Р.Г. Алгоритмическая, программная и аппаратная реализация системы магнитной локации скрытых объектов // Известия вузов. Электроника: 2009. № 3(77). С. 53-60.
16. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: ГТТИ, 1957.
17. Вагин Д.В., Касаткин С.И., Поляков П.А. Полосковые концентраторы магнитного поля для магниторезистивных датчиков тока и датчиков Холла // Датчики и системы. 2010. № 12. С. 25-29.
18. Теоретическая кривая намагниченности для чугунного, стального и железного образца URL: https://otvet.imgsmail.ru/download/318f020d1c1323f571c55297b8b30e6e_i-6.jpg
19. Касаткин С.И., Поляков О.П., Поляков П.А. Возможности реализации аппаратно-программного комплекса трехмерной мыши на основе решения обратной задачи магнитной локации // Датчики и системы. 2005. № 8. С. 33-36.
20. Артамонов Е.И., Балабанов А.Б., Касаткин С.И. Система магнитной локации на примере капсулы эндоскопа // Датчики и системы. 2012. № 12. С. 2-5.
21. Карпов Р.Г. Метода анализа и обработки данных для устройства трехмерной магнитной локации: дис. ... к. техн. наук: 05.13.01, М., 2009.