

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

**«ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ И ДИФРАКЦИИ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ИСТОЧНИКОВ,
РАСПОЛОЖЕННЫХ У ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА
ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ И ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕД»**

Выполнил студент

205М группы

ГЛАЗУНОВ ПАВЕЛ СЕРГЕЕВИЧ

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор

СЛЕПКОВ АЛЕКСАНДР ИВАНОВИЧ

Допущен к защите

Зав. кафедрой _____

Москва

2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ.....	5
2. ТОКИ И ЗАРЯДЫ МАТЕРИАЛЬНОЙ СРЕДЫ. СТОРОННИЕ ТОКИ И ЗАРЯДЫ.....	16
3. МАТЕРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕЛИЧИН, ВХОДЯЩИХ В УРАВНЕНИЕ МАКСВЕЛЛА, В ИНТЕГРАЛЫ ФУРЬЕ..	19
4. ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ ДЛЯ СЛУЧАЯ ОДНОРОДНЫХ ИЗОТРОПНЫХ СРЕД С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ.....	24
5. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ОДНОРОДНЫХ ИЗОТРОПНЫХ СРЕД С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫ- МИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ.....	28
6. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ И МАГНИТНОЕ ДИПОЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ С УЧЁТОМ БЛИЖНЕГО ПОЛЯ В ПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ	30
7. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ.....	33
8. СРАВНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ С ЧИСЛЕННЫМ ЭКСПЕРИМЕНТОМ	44
ВЫВОДЫ.....	54
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	56
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	57
ПРИЛОЖЕНИЕ 1.....	60

ВВЕДЕНИЕ

В большинстве задач об излучении электромагнитных волн источник излучения находится в диэлектрике или вакууме. Однако большой интерес также представляют прикладные задачи, в которых излучение и дифракция происходят в изотропных средах с произвольными электромагнитными характеристиками: проводящих средах, средах с отрицательной вещественной частью диэлектрической проницаемости, метаматериалах и т.п. К числу подобных прикладных задач относятся: дезинтеграция минеральных руд и декапсуляция наночастиц с помощью электромагнитных импульсов, возбуждение объёмных и поверхностных плазмонов, проблема подводной радиосвязи, ближнеполевая СВЧ - микроскопия и многие другие. По конкретной тематике можно найти достаточно большой объём литературы, но весьма затруднительно найти работы, посвященные обобщению теории, используемой при решении вышеописанных задач, несмотря на его относительную простоту. По этой причине основными целями первой части диссертации являются:

- проведение обзора литературы, посвященной задачам данной тематики;
- проведение обобщения методов решения задач излучения и дифракции электромагнитных волн в однородных средах с произвольными электромагнитными характеристиками;
 - уточнение сложившейся в данной области терминологии;
 - формирование общего теоретического фундамента для решения прикладных задач подобного класса.

Во второй части диссертации изложенная теория применяется для решения конкретной задачи из области радиофизики - задачи Зоммерфельда о вертикальном излучающем диполе, расположенном вблизи границы раздела двух материальных сред. Нерешённой частью данной задачи

является вопрос о возбуждении поверхностной волны, распространяющейся вдоль границы сред. Из анализа литературы можно заключить, что наличие или отсутствие поверхностной волны в решении, как это ни парадоксально, зависит от применяемого авторами метода. Однако, с помощью обобщения, проведенного в первой части диссертации, данный парадокс успешно разрешается. Доказывается, что наличие поверхностной волны в решении зависит не от используемого метода, а от характеристик сред. Выводится условие, при выполнении которого, поверхностная волна присутствует в решении и вычисляется как вычет некоторого подынтегрального выражения.

Далее аналитические выражения, в частности, выражение, соответствующее поверхностной волне, проверяются при помощи численного моделирования. Показывается, что результаты численного эксперимента и аналитического решения совпадают, тем самым доказывается их корректность, а также правильность теории. Таким образом, вторая часть диссертации посвящена:

- применению изложенной в первой части работы теории для решения практической задачи, а именно задачи Зоммерфельда о вертикальном излучающем диполе;
- решению проблемы о возбуждении поверхностной волны в задаче Зоммерфельда;
- выводу условия существования поверхностной волны;
- проверке аналитических выражений при помощи численного моделирования.

Отдельно стоит отметить, что условие существования поверхностной волны было проверено и на принцип соответствия. В том случае, когда одной из сред является диэлектрик, а другой - метаматериал, из выведенного условия следует хорошо известное из плазмоники и физики метаматериалов условие положительности произведения вещественных частей диэлектрических проницаемостей сред.

1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Приведём основные типы прикладных задач, в которых распространение и дифракция электромагнитных волн происходят в изотропных средах с различными электромагнитными характеристиками, поясним их значимость и актуальность.

1) Задачи дезинтеграции минеральных руд и декапсуляции наночастиц электромагнитными импульсами (ЭМИ). ЭМИ, как правило, воздействуют на твёрдые композитные среды с чёткими границами между веществами, имеющими разные физические свойства (диэлектрическую, магнитную проницаемости, проводимости, коэффициенты температурного расширения и др.), например, на диэлектрические среды, содержащие металлические вкрапления. Цель - добиться селективного эффекта: при воздействии ЭМИ возникают физические процессы, приводящие к разрушению материала диэлектрика преимущественно вокруг металлических вкраплений [1, 2]. Таким образом, использование этого явления актуально для широкого спектра прикладных задач в различных отраслях промышленности и медицине, среди которых адресная доставка лекарств [1], дезинтеграция минеральных руд [3], чистка поверхностей различных промышленных установок [4], разделение промышленных отходов для утилизации и переработки [4], декапсуляция наночастиц [5].

2) Задачи возбуждения объёмных и поверхностных плазмонов, а также задачи, связанные с физикой метаматериалов. Метаматериал - композиционный материал, искусственная периодическая структура которого позволяют модифицировать его диэлектрическую и магнитную проницаемости, что позволяет управлять законами дисперсии, преломления и отражения электромагнитных волн в данных материалах. Это обуславливает актуальность изучения метаматериалов. Подробнее об этом можно посмотреть в обзорной статье [6]. Плазмоника также обладает широким спектром применения - сол-

нечные элементы, микроскопия высокого разрешения, изготовление медикаментов. Всё это возможно благодаря эффекту сверхпрозрачности периодических структур из отверстий, диаметр которых много меньше длины волны оптического излучения [7-8].

3) Проблема возбуждения и распространения радиоволн в проводящих средах изложена в [9]. Основная сложность заключается в том, что не удаётся обеспечить связь на расстояния, превышающие толщину скин-слоя в среде. Считается, что эта проблема может быть решена с помощью возбуждения поверхностных электромагнитных волн над поверхностью проводящей среды. Возможность возбуждения поверхностных волн реальными антеннами остаётся на настоящий момент спорным вопросом, который обсуждается в пункте 5 настоящей главы.

4) Ближнеполевая СВЧ - микроскопия открывает широкие возможности для различного рода диагностик. Она объединяет в себе качества, востребованные сегодня для исследования свойств различных материалов и сред. Одной из главных особенностей ближнеполевых микроскопов является высокое пространственное разрешение, намного превосходящее рабочую длину волны. Дифракционный предел разрешения в ближнеполевой диагностике преодолевается благодаря субволновому размеру апертуры зонда. Зонд функционирует не как излучатель или приёмник, а как сенсор, регистрирующий свойства среды в непосредственной близости с разрешением порядка размера апертуры. Детальное описание принципа работы ближнеполевой СВЧ - микроскопии содержится в [10].

5) Далее, рассмотрим исторические аспекты задачи Зоммерфельда, а поскольку вторая часть диссертации посвящена ей, сделаем это более подробно.

Постановка данной задачи появилась ещё в начале 20 века - века интенсивного развития радиофизики. Учёные в то время не знали о наличии ионосферы, поэтому не могли объяснить причину, по которой радиоволны спо-

собны распространяться на огромные расстояния, превышающие даже радиус земного шара. Многие физики пытались теоретически описать данный феномен. Первым, кому удалось приблизиться к разгадке, оказался Арнольд Вильгельм Зоммерфельд. Постановка задачи была следующей: на некоторой высоте h от земли (поверхность которой считается плоскостью) в воздушном пространстве находится антенна (электрический или магнитный диполь Герца). Земля рассматривается как среда с конечной проводимостью, воздух считается диэлектриком (рис. 1). При этом дипольный момент излучателя перпендикулярен поверхности земли. Пусть токи, текущие в антеннах заданы, необходимо найти распределение электромагнитных полей во всём окружающем пространстве.

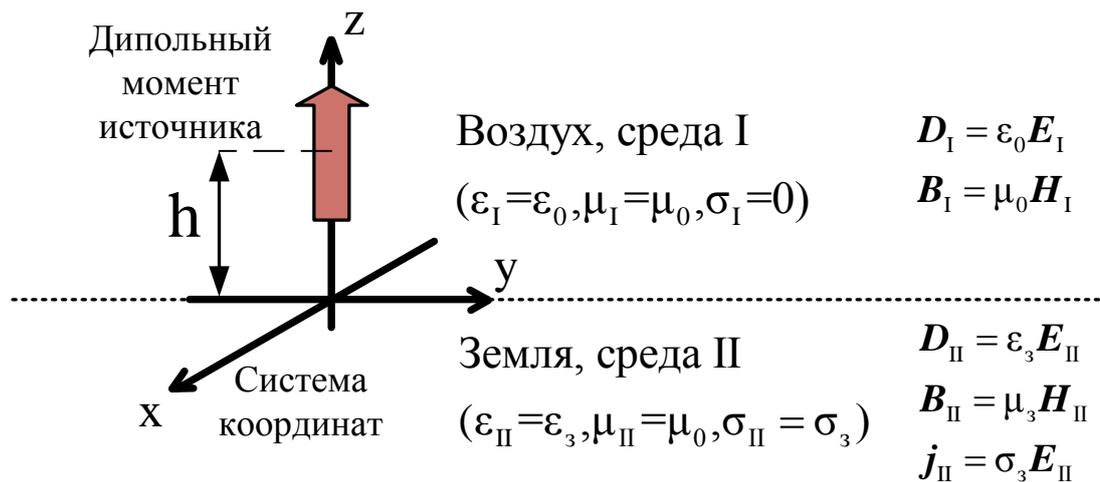


Рисунок 1.1 - К условию задачи Зоммерфельда

В 1909 году Зоммерфельд разработал метод [11], в котором поле элементарного излучателя раскладывается по спектру собственных функций задачи в цилиндрической системе координат. Этот метод был использован в настоящей диссертации, поэтому имеет смысл рассмотреть решение, полученное Зоммерфельдом, более подробно.

Решение было получено для потенциалов Герца и имело для электрического диполя следующий вид [12].

В воздухе ($z > 0$):

$$\Pi(r, z) = \frac{e^{ik\sqrt{r^2+(z-h)^2}}}{\sqrt{r^2+(z-h)^2}} + \frac{e^{ik\sqrt{r^2+(z+h)^2}}}{\sqrt{r^2+(z+h)^2}} - 2 \int_0^\infty J_0(\zeta r) e^{-\beta(z+h)} \frac{\beta_3}{n^2\beta + \beta_3} \frac{\zeta d\zeta}{\beta} \quad (1.1)$$

Под землёй ($z < 0$):

$$\Pi_3(r, z) = 2 \int_0^\infty J_0(\zeta r) e^{\beta_3 z - \beta h} \frac{\zeta d\zeta}{n^2\beta + \beta_3} \quad (1.2)$$

Здесь J_0 - функция Бесселя нулевого порядка, h - высота (относительно земли) расположения излучателя, r - координата r в цилиндрической системе координат (расстояние от точки наблюдения до оси Oz , см. рис.1.1), z - координата z точки наблюдения (высота точки наблюдения относительно уровня земли), $\beta = \sqrt{\zeta^2 - k^2}$, $\beta_3 = \sqrt{\zeta^2 - k_3^2}$ - обозначения, вводимые для краткости, ζ - собственные значения задачи, k , k_3 - волновые числа электромагнитной волны в воздухе и в земле соответственно, n - комплексный показатель преломления почвы, определяемый следующей формулой: $n^2 = (\epsilon_a + i\sigma/\omega)/\epsilon_0$, где ϵ_a - абсолютная диэлектрическая проницаемость грунта, ϵ_0 - диэлектрическая проницаемость вакуума, σ - проводимость грунта, ω - циклическая частота колебаний электромагнитной волны. Магнитные проницаемости воздуха и грунта брались равными магнитной проницаемости вакуума.

Отметим недостаток решения: в нём дипольный момент излучателя положен равным единице, поэтому формулы (1.1)-(1.2) позволяют лишь качественно рассмотреть электромагнитные поля, не давая возможности найти их абсолютные значения. Этот недостаток легко исправить, решая задачу для дипольного источника с амплитудой, равной некоторому значению Π_0 . При этом из классической теории излучения следует, что:

$$\Pi_0 = d/4\pi\epsilon_a \quad (1.3)$$

где ϵ_a - абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, в которой происходит излучение, d - дипольный момент антенны.

Однако этим проблема полностью не снимается. Допустим, средой, в которой происходит излучение, является вещество с конечной проводимостью. В таком случае возникает эффект экранирования (заряды проводимости среды экранируют заряды, протекающие в антенне), из-за чего амплитуда излучения диполя уменьшается, что не учитывается в формуле (1.3). Поэтому для случая проводящих сред формула (1.3) требует обобщения. Для этого необходимо углубиться в теорию мультипольного разложения электромагнитного поля и, обобщая её для сред с конечной проводимостью, вывести формулу, аналогичную (1.3). Описанию этого обобщения посвящены главы 4, 6 настоящей диссертации. Кроме того, когда излучатель находится в проводящей среде, оказывается важным, перемешиваются ли заряды проводимости среды с зарядами, протекающими в излучателе. Очевидно, что учёт этого процесса, в общем случае влияет на амплитуду излучаемого поля, а в случае размещения диполя над поверхностью земли этот процесс не играет никакой роли.

Подведём итог. Для случая нахождения излучателя в изотропной среде с произвольными электромагнитными характеристиками решение (1.1) - (1.2) требует пересмотра и обобщения.

Однако Зоммерфельд не остановился на решении (1.1)-(1.2). Дело в том, что интегралы, в выражениях (1.1) - (1.2) не берутся в аналитическом виде, а в первой половине 20 века нельзя было их вычислить численно. Поэтому, чтобы получить от решения (1.1)-(1.2) практическую пользу, Зоммерфельд попытался приближённо вычислить интегралы. Для этого он перевёл путь интегрирования в комплексную плоскость. Замкнув контур интегрирования на бесконечности и, обходя точки ветвления $\zeta = \pm k, \pm k_z$, как показано на рис. 1.2, учёный воспользовался теорией вычетов.

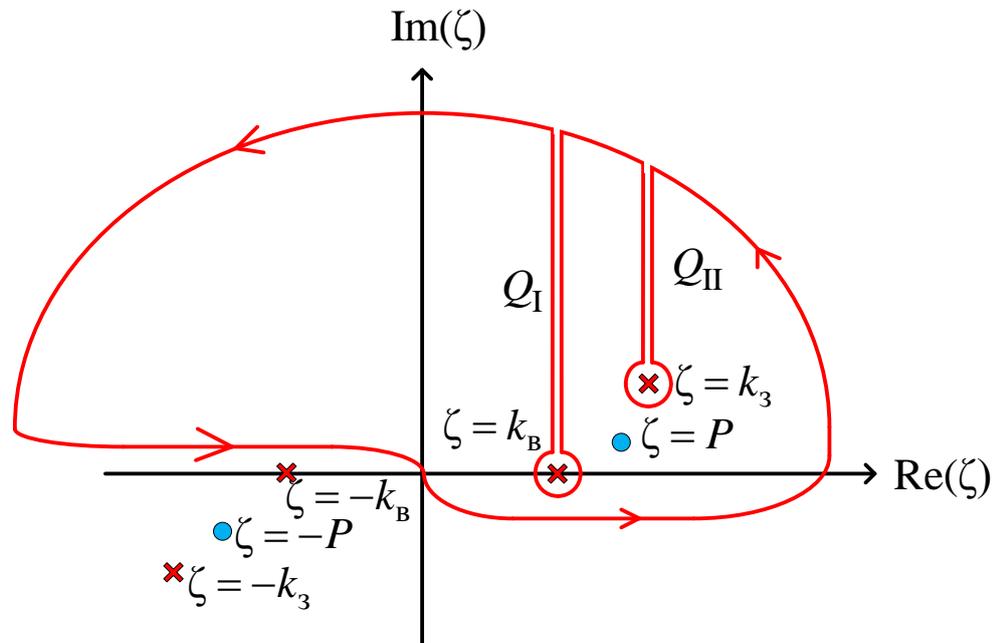


Рисунок 1.2 - Контур интегрирования (красные линии), используемый Зоммерфельдом, для приближённого вычисления интегралов

На рис.1.2 точки ветвления отмечены красными крестиками, полюсы, которые соответствуют обращению знаменателя дробей в подынтегральных выражениях (1.1)-(1.2) в ноль, отмечены синими точками. Разрезы, соединяющие точки ветвления с контуром, обозначены буквами Q_I , Q_{II} .

После этого, первоначальные интегралы распались на три слагаемых. Первое слагаемое соответствовало вычету в полюсе $\zeta = p$, при этом $p^2 = k^2 k_3^2 / (k^2 + k_3^2)$ (значение $\zeta = p$ находится из условия $n^2 \beta + \beta_3 = 0$). Оно имело вид поверхностной волны [12]:

$$\Pi(r, z) = \frac{2\pi i k_3^2}{(k_3^2 / \sqrt{p^2 - k^2}) + (k^2 / \sqrt{p^2 - k_3^2})} H_0^{(1)}(pr) \exp(-z \sqrt{p^2 - k_3^2}), \quad z > 0 \quad (1.4)$$

$$\Pi_3(r, z) = \frac{2\pi i k^2}{(k_3^2 / \sqrt{p^2 - k^2}) + (k^2 / \sqrt{p^2 - k_3^2})} H_0^{(1)}(pr) \exp(+z \sqrt{p^2 - k_3^2}), \quad z < 0 \quad (1.5)$$

Здесь, $H_0^{(1)}$ - функция Ханкеля первого рода, нулевого порядка. Действительно, выражения (1.4)-(1.5) удовлетворяют основным особенностям, присущим поверхностным волнам.

1) Волны, соответствующие формулам (1.4)-(1.5), связаны с поверхностью $z = 0$ и экспоненциально затухают при удалении от неё.

2) Если пренебречь поглощением в радиальном направлении, то амплитуда выражений (1.4)-(1.5) с увеличением расстояния до излучателя уменьшается как $r^{-1/2}$, что соответствует амплитуде двумерной цилиндрической волны.

Поверхностные волны типа (1.4)-(1.5) в литературе называют волнами Ценнека, в честь учёного, впервые обнаружившего решения такого типа.

Отметим также, что данная волна затухает и в радиальном направлении по показательному закону [12] пропорционально:

$$\sim \exp\left[-\frac{kr}{2} \operatorname{Re}\left(\frac{i}{n^2}\right)r\right] = \exp\left[-\left(\frac{kr}{2} \frac{\varepsilon_0 \sigma}{\omega} r\right) / \left(\varepsilon_a^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2}\right)\right]$$

Два других слагаемых, представляли собою интегралы по разрезам Q_I , Q_{II} , показанным на рис. 1.2. Слагаемые Q_I , Q_{II} описывают объёмные (пространственные) волны в воздухе (или почве).

При этом вклад в решение (1.1)-(1.2) каждого из слагаемых довольно сложно оценить. Зоммерфельд считал, что слагаемым Q_{II} при достаточно большом $|k_z|$, можно пренебречь, а вклады p и Q_I не следует рассматривать отдельно друг от друга.

Отметим, что поскольку амплитуда поверхностной волны уменьшается как $r^{-1/2}$ (в то время как амплитуда объёмной волны уменьшается как r^{-1}), при помощи поверхностных волн казалось возможным объяснить причину, по которой радиосигнал может передаваться на значительные расстояния.

Вернёмся к истории, отметим в мнения физиков-теоретиков, работавших в данной области.

Эпштейн показал [13], что поверхностная волна p , взятая в отдельности, является решением данной задачи. Следовательно, волна p в принципе не обязательно сопровождается комплексом объёмных волн Q_1 . Однако сумму $Q_1 + p$, лучше представлять одним интегралом, контур интегрирования которого охватывает сразу две точки $\zeta = k$, $\zeta = p$, из-за того, что в большинстве случаев эти точки находятся очень близко.

Зоммерфельд вводит безразмерный параметр $\rho = i(k - p)r$, модуль которого, называет численным расстоянием. По возрастающим степеням этого параметра он в своей работе [11], приходит к приближённой формуле для интеграла $Q_1 + p$ при $z = 0$ (см. также [12]):

$$\Pi(r, z = 0) = 2 \frac{e^{ikr}}{r} \left\{ 1 + i\sqrt{\pi\rho}e^{-\rho} - 2\sqrt{\rho}e^{-\rho} \int_0^{\sqrt{\rho}} e^{\xi^2} d\xi \right\} \quad (1.6)$$

Приближённая формула (1.6) была вновь получена рядом авторов (Ван дер Поль, Ниссен, Томас, Муррей) более простым способом. Интеграл $Q_1 + p$ исследован Оттом [14] при помощи метода седловых точек.

В дальнейшем судьба решения (1.1)-(1.2) записанного в виде волн (1.4)-(1.6) была не слишком удачной.

Вейль решает данную задачу другим способом [15]. Он раскладывает функцию излучения элементарного источника по плоским волнам, решает задачу дифракции каждой из этих плоских волн на проводящем полупространстве, затем собирает все эти решения вместе. Решение, полученное Вейлем, не содержит поверхностной волны.

Выкладки Зоммерфельда и Вейля были настолько сложными, что вопрос о том, кто из них прав, пытались определить экспериментально. Решение Вейля более соответствовало действительности [16].

Ван-дер-Поль, приближённо решая задачу несколько иным способом [17], получил функцию ослабления источника в виде, соответствовавшем решению Вейля.

В 1937 г. [16] при редактировании русского перевода работы Зоммерфельда [18], В.А. Фок, обнаружил ошибку, исправил её и получил правильный результат, опять же согласующийся с формулой Вейля.

В 1961 г. выходит статья Мура и Блэйра [19], посвящённая подобной задаче, с тем только отличием, что диполь находится в морской воде. Задача была решена для больших проводимостей, а в начале статьи сделано замечание о том, что при таком предположении ошибка, допущенная Зоммерфельдом, не возникает. При этом в решении содержится поверхностная волна.

В.В. Шевченко в своей работе [20] показал, что если искать поверхностную волну методом перевала из интегралов Зоммерфельда (1.1)-(1.2), то перевальный путь никогда не пересекается полюсом, соответствующим волне Ценнека, поэтому волна Ценнека не выделяется в качестве вычета из-под интеграла. Этот факт, в частности, был предметом дискуссии известных физиков Барлоу и Уэйта. В связи со сказанным выше, Уэйт ставил под сомнение существование волны Ценнека [21].

Позднее в работе [22] В.В. Шевченко обосновал возможность существования волны Ценнека методом нахождения спектра нормальных волн над импедансной поверхностью. Его результаты были подтверждены Ю.В. Кистовичем [23].

В книге Л.А. Вайнштейна [24] отмечено, что передающие антенны не возбуждают поверхностной волны Ценнека, а для распространения радиоволн над сушей или морем реального значения она не имеет, так как поле радиоволн имеет совершенно иную структуру.

А.А. Олинер [25] относит тему, связанную с вопросом о возможности возбуждения волны Ценнека, к числу псевдонаучных.

В своей книге Марков и Чаплин [26] считают, что наличие или отсутствие волны Ценнека зависит от контура интегрирования. При выборе контура интегрирования аналогичного контуру Зоммерфельда (рис.1.2) поверхностной волны не возникает. Однако Марков и Чаплин указывают другой контур интегрирования (отличный от контура указанного на рис.1.2). В полученном решении в виде интеграла по разрезам, предложенного ими контура, поверхностная волна существует.

Экспериментальные данные также весьма противоречивы.

В.Н. Дацко и группа учёных утверждают [27], что ими была впервые экспериментально обнаружена волна Ценнека (1989 г.). В серии лабораторных экспериментов, проведённых на солёной воде в СВЧ диапазоне, волна Ценнека была отделена от объёмного поля практически в чистом виде.

Г.Н. Жижин экспериментально наблюдал волны Ценнека в твёрдом теле в оптическом диапазоне частот [28].

А.В. Кукушкин высказал своё мнение о том, что предсказанная физиками-теоретиками волна Ценнека на самом деле экспериментально так и не была обнаружена [29].

В.А. Егоров утверждает, что наблюдал волну Ценнека [30].

Некоторые авторы, например, В.Н. Дацко и А.А. Копылов, запатентовывали ряд установок, работающих, по их мнению, на использовании поверхностных волн [31-34].

Наконец, процитируем современную преобладающую точку зрения на сложившуюся ситуацию, удачно изложенную в статье А.В. Кукушкина [35]: «Преобладающей точкой зрения (условно назовём её «стандартной») является укоренившееся мнение, что реальные антенны не способны возбудить эту волну (волну Ценнека). Как правило, здесь имеется в виду то, что размеров апертуры реальных антенн недостаточно для эффективного возбуждения волны Ценнека, которая по структуре очень близка к обычной однородной плоской волне, скользящей по поверхности волновода. Вместе с тем при этом

считается, что сама по себе волна Ценнека обладает физическим смыслом волноводной волны открытого волновода. Иначе говоря, её структура такова, что подстилающая поверхность с определёнными свойствами импеданса способна направлять эту волну вдоль себя, независимо от каких-либо характеристик реальных источников».

Приведём также цитату из статьи В.Н. Дацко [36], в которой сделан следующий вывод: «...необходимо продолжить теоретические и экспериментальные исследования поверхностных электромагнитных волн, в том числе и поверхностных электромагнитных волн Ценнека.»

Подведём итоги. Среди физиков (теоретиков и экспериментаторов), как в России (СССР), так и за рубежом сложилось двоякое мнение относительно возможности возбуждения поверхностной волны. Большинство учёных высказалось против существования волны Ценнека. В целом, отношение к существованию поверхностной волны весьма скептическое, поскольку выходит так, что наличие или отсутствие её в решении зависит от используемого метода.

В диссертации будет показано, что наличие или отсутствие поверхностной волны определяется из некоторого условия, накладываемого на характеристики сред. Однако сначала будет проведено обобщение теории излучения и дифракции электромагнитных волн в изотропных средах с произвольными электромагнитными характеристиками.

2. ТОКИ И ЗАРЯДЫ МАТЕРИАЛЬНОЙ СРЕДЫ. СТОРОННИЕ ТОКИ И ЗАРЯДЫ

Система уравнений Максвелла для случая бесконечной материальной среды в системе единиц СИ записывается следующим образом:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho \quad (2.2)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \partial\mathbf{D}/\partial t + \mathbf{j} \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \quad (2.4)$$

В уравнениях (2.2)-(2.3) ρ - заряды проводимости среды, \mathbf{j} - токи проводимости среды. С физической точки зрения понятно, что система (2.1)-(2.4) может иметь лишь тривиальное решение, если в среде не будут присутствовать источники излучения, поэтому возникает необходимость их введения. Сформулируем основные свойства, которым должны удовлетворять источники возбуждения электромагнитных волн, чтобы задача была корректной как с математической, так и с физической точки зрения (по вопросу введения сторонних токов и зарядов см.[24,37-49]).

1) Будем считать, что источниками излучения служат заряженные частицы, заряд которых может быть как положительным, так и отрицательным. (Иначе, появляется несимметричность: заряды в источнике возбуждения могут быть только одного знака).

2) В общем случае, эти частицы не обязаны быть частицами, обеспечивающими проводимость материальной среды, а также её поляризацию или намагниченность (хотя в частном случае это возможно). Они могут быть инородными, взятыми извне. Поэтому в дальнейшем данные частицы будут называться сторонними, а токи и заряды, создаваемые этими сторонними частицами, будут называться сторонними токами и зарядами, и обозначаться как $\mathbf{j}_{\text{ex}}, \rho_{\text{ex}}$.

3) Токи и заряды, не являющиеся сторонними, будут называться токами и зарядами среды. Их, как правило, разделяют на свободные (обеспечивающие проводимость) и связанные (обеспечивающие поляризацию или намагниченность) токи и заряды. Свободные токи и заряды будут обозначаться \mathbf{j} , ρ .

4) Будем считать, что сторонние частицы взаимодействуют с частицами материальной среды лишь посредством классических электромагнитных взаимодействий. Это означает, что токи и заряды среды и сторонние токи и заряды являются взаимопроникаемыми, и при движении в материальной среде сторонние частицы не испытывают никакого сопротивления со стороны среды, кроме электромагнитного. Данное предположение принимается в целях упрощения задачи, поскольку в этом случае она становится чисто электродинамической и не приходится принимать во внимание, например, гидродинамическую вязкость или упругую (или пластическую) деформацию материальной среды.

5) Считается, что законы движения сторонних частиц известны или их можно задать. Иными словами, в материальной среде присутствует N частиц, законы движения которых будем считать известными и будем называть такие частицы сторонними:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t), \quad i=1\dots N \quad (2.5)$$

Это необходимо для того, чтобы можно было рассчитать макроскопические сторонние токи и заряды по формулам:

$$\rho_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) = \int_{\Delta V} \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) dV \quad (2.6)$$

$$\mathbf{j}_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) = \int_{\Delta V} \sum_{i=1}^N q_i \dot{\mathbf{r}}_i(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) dV \quad (27)$$

где q_i - заряд i -ой сторонней частицы, ΔV - физически малый объём, по которому производится усреднение микроскопических величин, $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))$ - дельта функция Дирака.

6) Вообще говоря, сторонние частицы совершают свои движения под действием некоторых внешних сил, природа которых не обязательно должна быть электромагнитной. Эти внешние силы не играют существенной роли при постановке или решении задачи электродинамики, хотя с физической точки зрения понятно, что они должны существовать для того, чтобы сторонние частицы двигались по заданным законам (2.5).

7) Токи и заряды среды заранее не известны и подлежат определению. Они возбуждаются сторонними токами и зарядами и являются своего рода откликом среды на возмущение электромагнитного поля, создаваемого сторонними токами и зарядами.

8) Из всего вышперечисленного следует, что в правых частях уравнений (2.2)-(2.3) следует заменить $\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{ex}}$, $\rho \rightarrow \rho + \rho_{\text{ex}}$. Уравнение непрерывности, таким образом, будет иметь вид:

$$\partial(\rho + \rho_{\text{ex}})/\partial t + \text{div}(\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{ex}}) = 0 \quad (2.8)$$

9) Сделаем важное предположение: сторонние токи и заряды и заряды и токи среды не могут переходить друг в друга. Таким образом, уравнение непрерывности (2.8) распадается на два:

$$\partial\rho/\partial t + \text{div}\mathbf{j} = 0 \quad (2.9)$$

$$\partial\rho_{\text{ex}}/\partial t + \text{div}\mathbf{j}_{\text{ex}} = 0 \quad (2.10)$$

Уравнение (2.10) предполагает, что первоначальный набор из N сторонних частиц не изменяется со временем.

3. МАТЕРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕЛИЧИН, ВХОДЯЩИХ В УРАВНЕНИЕ МАКСВЕЛЛА, В ИНТЕГРАЛЫ ФУРЬЕ

Рассмотрим изотропные среды, тогда в случае статики в любой точке пространства выполняются соотношения:

$$\mathbf{j} = \sigma_{\infty} \mathbf{E} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi_{\varepsilon}^{\infty} \mathbf{E} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \chi_{\mu}^{\infty} \mathbf{H} \quad (3.3)$$

Здесь $\chi_{\varepsilon}^{\infty}$, χ_{μ}^{∞} - относительные диэлектрическая и магнитная восприимчивости среды соответственно в случае статики, σ_{∞} - проводимость среды в случае статики. Эти параметры не зависят от времени, но могут являться функциями от пространственных координат. Далее для краткости все рассуждения будут проведены только для проводимости σ_{∞} . Для диэлектрической и магнитной восприимчивостей $\chi_{\varepsilon}^{\infty}$, χ_{μ}^{∞} будут справедливы аналогичные рассуждения.

Понятно, что в общем случае, когда векторы электромагнитного поля зависят от времени произвольным образом, уравнение (3.1) не выполняется. Действительно, при появлении электрического поля электроны начинают двигаться не сразу, поскольку обладают массой. Для того чтобы установился равновесный ток, описываемый уравнением (3.1), необходимо, чтобы прошёл некоторый промежуток времени. Кроме того, очевидно, что электрическое поле во все предшествующие моменты времени влияет на величину тока в настоящий момент времени. Поэтому при произвольной зависимости электромагнитных полей от времени необходимо положить:

$$\mathbf{j}(t) = \sigma_{\infty} \int_0^{\infty} f(t') \mathbf{E}(t-t') dt' \quad (3.4)$$

здесь $f(t')$ - некоторая функция, описывающая меру влияния электрического поля \mathbf{E} в предшествующий момент времени $t-t'$ на ток \mathbf{j} в настоящий мо-

мент времени t , σ_∞ - проводимость среды в статическом случае из (3.1). Рассмотрим свойства функции $f(t')$. Пусть постоянное и однородное электрическое поле амплитудой E_0 появляется в момент времени $t=0$. Тогда формула (3.4) принимает вид:

$$\mathbf{j}(t) = \sigma_\infty \mathbf{E}_0 \int_0^t f(t') dt' \quad (3.5)$$

Из (3.5) видно, что функция $f(t')$ описывает релаксацию системы к статическому случаю: при $t \rightarrow \infty$, $\sigma(t) = \sigma_\infty \int_0^t f(t') dt' \rightarrow \sigma_\infty$, поэтому:

$$\int_0^\infty f(t') dt' = 1 \quad (3.6)$$

Из (3.6) следует, что при $t \rightarrow \infty$ функция $f(t') \rightarrow 0$, это необходимо для сходимости интеграла (3.6) (при этом $f(t')$ не обязательно должна быть монотонной функцией).

Далее разложим $\mathbf{j}(t)$, $\mathbf{E}(t-t')$ в интегралы Фурье, при этом далее комплексные Фурье-амплитуды соответствующих физических величин будут обозначаться символом « ^ »:

$$\mathbf{j}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{j}}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.7)$$

$$\mathbf{E}(t-t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i\omega(t-t')} d\omega \quad (3.8)$$

Подставим выражения (3.7)-(3.8) в (3.4), получим:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{j}}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega &= \sigma_\infty \int_0^\infty f(t') \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i\omega(t-t')} d\omega \right) dt' = \\ &= \sigma_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i\omega t} \left(\int_0^\infty f(t') e^{i\omega t'} dt' \right) d\omega \end{aligned} \quad (3.9)$$

В (3.9) был изменён порядок интегрирования. Далее обозначив $\sigma_\infty \int_0^\infty f(t')e^{i\omega t'} dt' = \hat{\sigma}(\omega)$, перенесём все слагаемые в левую часть и, записав их

под одним интегралом, получим:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \hat{j}(\omega) - \hat{\sigma}(\omega)\hat{E}(\omega) \right\} e^{-i\omega t} d\omega = 0$$

В силу теоремы о единственности интегрального представления Фурье:

$$\hat{j}(\omega) = \hat{\sigma}(\omega)\hat{E}(\omega) \quad (3.10)$$

В формуле (3.10) $\hat{j}(\omega)$, $\hat{E}(\omega)$ имеют смысл комплексных амплитуд векторов тока и напряжённости электрического поля, $\hat{\sigma}(\omega)$ имеет смысл комплексной амплитуды проводимости среды на циклической частоте ω (поскольку по определению это есть коэффициент пропорциональности между комплексной амплитудой вектора тока и комплексной амплитудой вектора напряжённости электрического поля). Модуль $\hat{\sigma}(\omega)$ показывает во сколько раз величина тока отличается от величины напряжённости электрического поля по абсолютному значению. Фаза $\hat{\sigma}(\omega)$ определяет разность фаз между током и напряжённостью электрического поля (очевидно, что ток в силу принципа причинности и в силу того, что электроны обладают некоторой инертностью, всегда должен немного отставать по фазе от напряжённости электрического поля). Далее везде реальную составляющую какой-либо комплексной величины $a \in \mathbb{C}$ будем обозначать a_1 , мнимую - a_2 , её модуль $|a| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}$.

Проводя аналогичные рассуждения с $\chi_\varepsilon^\infty, \chi_\mu^\infty$ в материальных уравнениях (3.2)-(3.3), найдём что:

$$\hat{D}(\omega) = \hat{\varepsilon}(\omega)\hat{E}(\omega) \quad (3.11)$$

$$\hat{B}(\omega) = \hat{\mu}(\omega)\hat{H}(\omega) \quad (3.12)$$

здесь $\hat{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_0(1 + \hat{\chi}_\varepsilon(\omega)) = \varepsilon_0\hat{\varepsilon}_r(\omega)$, $\hat{\mu}(\omega) = \mu_0(1 + \hat{\chi}_\mu(\omega)) = \mu_0\hat{\mu}_r(\omega)$, где $\hat{\varepsilon}_r(\omega)$, $\hat{\mu}_r(\omega)$ - комплексные амплитуды относительной диэлектрической и магнитной проницаемостей. В дальнейшем будем пользоваться именно материальными соотношениями (3.10)-(3.12).

Разложим все остальные величины в интегралы Фурье вида (3.7)-(3.8) и подставим их в уравнение Максвелла (2.1)-(2.4). В каждом из уравнений объединив все слагаемые под одним интегралом, и воспользовавшись теоремой о единственности интегрального представления Фурье, найдём, что комплексные амплитуды соответствующих физических величин должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\text{rot } \hat{\mathbf{E}}(\omega) = i\omega\hat{\mathbf{B}}(\omega) \quad (3.13)$$

$$\text{div } \hat{\mathbf{D}}(\omega) = \hat{\rho}(\omega) + \hat{\rho}_{\text{ex}}(\omega) \quad (3.14)$$

$$\text{rot } \hat{\mathbf{H}}(\omega) = -i\omega\hat{\mathbf{D}}(\omega) + \hat{\mathbf{j}}(\omega) + \hat{\mathbf{j}}_{\text{ex}}(\omega) \quad (3.15)$$

$$\text{div } \hat{\mathbf{B}}(\omega) = 0 \quad (3.16)$$

Уравнения непрерывности (9)-(10) примут вид:

$$i\omega\hat{\rho}(\omega) = \text{div } \hat{\mathbf{j}}(\omega) = \text{div } (\hat{\sigma}(\omega)\hat{\mathbf{E}}(\omega)) \quad (3.17)$$

$$i\omega\hat{\rho}_{\text{ex}}(\omega) = \text{div } \hat{\mathbf{j}}_{\text{ex}}(\omega) \quad (3.18)$$

Далее исключим из уравнений (3.13)-(3.16) $\hat{\mathbf{j}}(\omega)$, $\hat{\mathbf{D}}(\omega)$, $\hat{\mathbf{B}}(\omega)$, $\hat{\rho}(\omega)$, используя соответственно формулы (3.10), (3.11), (3.12), (3.17):

$$\text{rot } \hat{\mathbf{E}}(\omega) = i\omega\hat{\mu}(\omega)\hat{\mathbf{H}}(\omega) \quad (3.19)$$

$$\text{div} \left[(\hat{\varepsilon}(\omega) + i\hat{\sigma}(\omega)/\omega)\hat{\mathbf{E}} \right] = \hat{\rho}_{\text{ex}}(\omega) \quad (3.20)$$

$$\text{rot } \hat{\mathbf{H}}(\omega) = -i\hat{\mathbf{E}}(\omega\varepsilon(\omega) + i\hat{\sigma}(\omega)) + \hat{\mathbf{j}}_{\text{ex}}(\omega) \quad (3.21)$$

$$\text{div}(\hat{\mu}(\omega)\hat{\mathbf{H}}(\omega)) = 0 \quad (3.22)$$

Далее везде для краткости будем опускать зависимость всех величин из уравнений (3.19)-(3.22) от ω , а также для удобства введём коэффициенты:

$$\hat{\xi} = \hat{\varepsilon} + i\hat{\sigma}/\omega, \quad \hat{\xi}_r = \hat{\xi} / \varepsilon_0 \quad (3.23)$$

Коэффициент $\hat{\xi}$ в литературе называется по-разному. В [24,37,39] - комплексной диэлектрической проницаемостью, в [38] - комплексной диэлектрической постоянной среды, в [40] - полной комплексной диэлектрической проницаемостью. В настоящей диссертации данный коэффициент называется обобщенной диэлектрической проницаемостью, поскольку, по мнению автора, этот термин правильно отражает его суть (это обобщение диэлектрической проницаемости для случая сред, обладающих проводимостью). Коэффициент $\hat{\xi}_r = \hat{\xi} / \varepsilon_0$ назовём относительной обобщенной диэлектрической проницаемостью. С учётом вышеописанных допущений и введения коэффициента (3.23) уравнения (3.19)-(3.22) можно переписать в наиболее удобной форме:

$$\text{rot } \hat{E} = i\omega \hat{\mu} \hat{H} \quad (3.24)$$

$$\text{div}(\hat{\xi} \hat{E}) = \hat{\rho}_{\text{ex}} \quad (3.25)$$

$$\text{rot } \hat{H} = -i\omega \hat{\xi} \hat{E} + \hat{j}_{\text{ex}} \quad (3.26)$$

$$\text{div}(\hat{\mu} \hat{H}) = 0 \quad (3.27)$$

Эта форма удобна тем, что схожа с формой записи системы уравнений Максвелла (2.1)-(2.4) в случае гармонической зависимости всех величин от времени при отсутствии проводимости среды с точностью до замены $\hat{\varepsilon} \rightarrow \hat{\xi}$, $\hat{j} \rightarrow \hat{j}_{\text{ex}}$, $\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}_{\text{ex}}$. Таким образом, дальше возможно использование классической теории потенциалов и мультипольного разложения.

Заметим, что уравнения (3.24)-(3.27) справедливы в случае, когда величины $\hat{\sigma}(\omega)$, $\hat{\mu}(\omega)$, $\hat{\varepsilon}(\omega)$ зависят от радиус-вектора \mathbf{r} .

4. ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ ДЛЯ СЛУЧАЯ ОДНОРОДНЫХ ИЗОТРОПНЫХ СРЕД С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Далее, чтобы воспользоваться классической теорией потенциалов, предположим, что величины $\hat{\sigma}(\omega)$, $\hat{\mu}(\omega)$, $\hat{\epsilon}(\omega)$ не зависят от пространственных переменных и являются скалярами, таким образом, их можно беспрепятственно выносить из-под дифференциальных операторов. Основные результаты показаны ниже.

Уравнения для комплексных амплитуд потенциалов электромагнитного поля без калибровки имеют вид:

$$\Delta \hat{\mathbf{A}} + k^2 \hat{\mathbf{A}} = \text{grad} \left\{ -i\omega \hat{\mu} \hat{\xi} \hat{\phi} + \text{div} \hat{\mathbf{A}} \right\} - \hat{\mu} \hat{\mathbf{j}}_{\text{ex}} \quad (4.1)$$

$$\Delta \hat{\phi} + k^2 \hat{\phi} = i\omega \left\{ -i\omega \hat{\mu} \hat{\xi} \hat{\phi} + \text{div} \hat{\mathbf{A}} \right\} - \hat{\rho}_{\text{ex}} / \hat{\xi} \quad (4.2)$$

В выражениях (4.1)-(4.2) коэффициент k играет роль волнового числа в материальной среде, причём:

$$k^2 = \omega^2 \hat{\xi} \hat{\mu} \quad (4.3)$$

При калибровке Лоренца:

$$i\omega \hat{\mu} \hat{\xi} \hat{\phi} = \text{div} \hat{\mathbf{A}} \quad (4.4)$$

уравнения (4.1)-(4.2) принимают вид:

$$\Delta \hat{\mathbf{A}} + k^2 \hat{\mathbf{A}} = -\hat{\mu} \hat{\mathbf{j}}_{\text{ex}} \quad (4.5)$$

$$\Delta \hat{\phi} + k^2 \hat{\phi} = -\hat{\rho}_{\text{ex}} / \hat{\xi} \quad (4.6)$$

Связь комплексных амплитуд векторов электромагнитного поля и комплексных амплитуд потенциалов задаётся соотношениями:

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{\hat{\mu}} \text{rot} \hat{\mathbf{A}} \quad (4.7)$$

$$\hat{\mathbf{E}} = -\text{grad} \hat{\phi} + i\omega \hat{\mathbf{A}} \quad (4.8)$$

В формуле (4.6) коэффициент $\hat{\xi}$ описывает экранирование сторонних зарядов источника зарядами среды. При $\omega \rightarrow 0$ (что соответствует случаю статики) знаменатель дроби в правой части (4.6) стремится к ∞ , поскольку $\hat{\xi} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \sigma_{\infty}/\omega$. Это соответствует полной экранировке. При $\omega \rightarrow \infty$, $\hat{\xi} \rightarrow \epsilon_0$, так как, если частота излучения достаточно велика, то из-за инертности электроны не успевают ускориться, приобрести скорость и вообще сместиться. Поэтому при достаточно высоких частотах поле почти не взаимодействует с электронами (естественно, такое рассуждение не применимо для случая таких высоких частот, что электромагнитное излучение необходимо описывать уже с точки зрения квантовой механики). Для наглядности введём коэффициент экранирования, характеризующий этот эффект:

$$s_{scr} = |\hat{\xi}|/\epsilon_0 = |\hat{\xi}_r| \quad (4.9)$$

Например, если этот коэффициент равен 2, это означает, что сторонние заряды в среде экранируются настолько, что значение эффективного заряда (т.е. стороннего заряда с учётом притёкшего заряда среды) будет в два раза меньше.

Рассмотрим волновое число k и найдём в нём реальную и мнимую части:

$$k = k_1 + ik_2 \quad (4.10)$$

Возведем выражение (4.10) в квадрат и получим:

$$\text{Re}(k^2) = k_1^2 - k_2^2 \quad (4.11)$$

$$\text{Im}(k^2) = 2k_1k_2 \quad (4.12)$$

Решив систему (4.11)-(4.12), можно найти коэффициенты k_1, k_2 , однако мы найдём их более простым способом. Заметим, что:

$$|k^2| = |k|^2 = k_1^2 + k_2^2 \quad (4.13)$$

Складывая и вычитая уравнения (5.11), (5.13) получим соответственно:

$$k_1^2 = \frac{|k^2| + \text{Re}(k^2)}{2} \quad (4.14)$$

$$k_2^2 = \frac{|k^2| - \text{Re}(k^2)}{2} \quad (4.15)$$

Если не делать никаких предположений относительно $\hat{\varepsilon}, \hat{\mu}, \hat{\sigma}$ и считать, что каждая из этих величин может обладать реальной и мнимой частями, то, используя формулы (4.3), (4.14)-(4.15), получим:

$$k_1 = \pm \sqrt{[|\mu| |\xi| + (\mu_1 \xi_1 - \mu_2 \xi_2)] \omega^2 / 2} \quad (4.16)$$

$$k_2 = \pm \sqrt{[|\mu| |\xi| - (\mu_1 \xi_1 - \mu_2 \xi_2)] \omega^2 / 2} \quad (4.17)$$

В формулах (4.16)-(4.17) присутствует неоднозначность в выборе знака. Выбор необходимо осуществлять следующим образом. Во-первых, знак произведения $k_1 k_2$ определяется формулой (4.12). Во-вторых, если среда не является активной, то коэффициент k_2 должен описывать диссипацию энергии электромагнитных волн в среде и поэтому должен быть положительным. Если же среда является активной, то правильнее будет выбирать знак не у k_2 , а у k_1 , таким образом, чтобы групповая скорость $v_{gr} = \left(\frac{\partial k_1(\omega)}{\partial \omega} \right)^{-1} \geq 0$ (таким образом, энергия будет исходить от источника излучения, а не наоборот).

Если предположить что величины $\hat{\varepsilon}, \hat{\mu}, \hat{\sigma}$ имеют лишь реальные части, которые равны соответственно ε, μ, σ , то формулы (4.16)-(4.17) упрощаются и соответствуют формулам из [41]:

$$k_1 = \sqrt{\frac{\omega^2 \mu \varepsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2} + 1 \right]} \quad (4.18)$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{\omega^2 \mu \varepsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2} - 1 \right]} \quad (4.19)$$

Уравнения (4.5)-(4.6) являются уравнениями Гельмгольца с комплексным волновым числом, решения которых в случае излучения в бесконечных областях:

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\hat{\xi}} \iiint_V \frac{\hat{\rho}_{\text{ex}}(\mathbf{r}') e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dx' dy' dz' \quad (4.20)$$

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mu}}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\hat{\mathbf{j}}_{\text{ex}}(\mathbf{r}') e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dx' dy' dz' \quad (4.21)$$

Рассмотрим формулы (4.20)-(4.21) более подробно. Из этих формул следует, что экранирование сказывается лишь на комплексной амплитуде потенциала $\hat{\phi}$. На комплексную амплитуду векторного потенциала $\hat{\mathbf{A}}$ экранирование не оказывает никакого эффекта. Причиной этого является то, что в природе не существует магнитных зарядов, поэтому токи $\hat{\mathbf{j}}_{\text{ex}}$ ничем не могут быть экранированы.

В качестве примера рассмотрим точечный источник, расположенный в начале системы координат: $\hat{\rho}_{\text{ex}}(\mathbf{r}') = q_{\text{ex}} \delta(\mathbf{r}')$, $\hat{\mathbf{j}}_{\text{ex}}(\mathbf{r}') = \mathbf{I}_{\text{ex}} \delta(\mathbf{r}')$. В этом случае формулы (4.20)-(4.21) приобретают вид:

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\hat{\xi}} \frac{q_{\text{ex}} e^{ikr}}{r} = \frac{1}{4\pi\hat{\xi}} \frac{q_{\text{ex}} e^{ik_1 r} e^{-k_2 r}}{r} \quad (4.22)$$

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mu}}{4\pi} \frac{\mathbf{I}_{\text{ex}} e^{ikr}}{r} = \frac{\hat{\mu}}{4\pi} \frac{\mathbf{I}_{\text{ex}} e^{ik_1 r} e^{-k_2 r}}{r} \quad (4.23)$$

Из формул (4.22)-(4.23) видно, что реальная часть волнового числа k описывает скорость распространения постоянной фазы волны Φ_0 :

$$0 = d\Phi_0/dt = d(k_1 r - \omega t)/dt = k_1 v_{\text{ph}} - \omega \Rightarrow v_{\text{ph}} = \omega/k_1$$

Мнимая часть k описывает затухание амплитуды волны. В таких случаях, обычно вводят величину, равную расстоянию, на котором амплитуда плоской волны затухала бы в e раз - глубину скин-слоя: $\delta = 1/k_2$.

5. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ОДНОРОДНЫХ ИЗОТРОПНЫХ СРЕД С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Классические граничные условия для векторов электромагнитного поля на границе раздела сред I, II записываются следующим образом:

$$(\mathbf{E}_I - \mathbf{E}_{II}, \boldsymbol{\tau}) = 0 \quad (5.1)$$

$$(\mathbf{D}_I - \mathbf{D}_{II}, \mathbf{n}_{II,I}) = \rho_s \quad (5.2)$$

$$(\mathbf{B}_I - \mathbf{B}_{II}, \mathbf{n}_{II,I}) = 0 \quad (5.3)$$

$$[\mathbf{n}_{II,I}, (\mathbf{H}_I - \mathbf{H}_{II})] = \mathbf{j}_s \quad (5.4)$$

В формулах (5.1)-(5.4) $\mathbf{n}_{II,I}$ - нормаль к границе раздела сред, направленная из среды II в среду I, $\boldsymbol{\tau}$ - тангенциальный вектор на границе раздела сред, ρ_s - поверхностные свободные заряды среды, \mathbf{j}_s - поверхностные свободные токи среды. При этом предполагается, что на границе раздела сред отсутствуют поверхностные сторонние токи и заряды $\mathbf{j}_{ex}, \rho_{ex}$.

Далее предположим, что влиянием поверхностных свободных токов среды \mathbf{j}_s можно пренебречь и положим $\mathbf{j}_s = 0$ (это приближение часто оказывается уместным, поскольку, как правило, поверхностная проводимость среды много меньше объёмной и почти весь ток течёт по объёму среды). Тогда из (5.4) следует равенство тангенциальных компонентов вектора \mathbf{H} .

Далее возьмём частную производную по времени от выражения (5.2) и получим:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{D}_I}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{D}_{II}}{\partial t}, \mathbf{n}_{II,I} \right) = \frac{\partial \rho_s}{\partial t} \quad (5.5)$$

В выражении (5.5) более подробно рассмотрим $\frac{\partial \rho_s}{\partial t}$. Поскольку считается, что по поверхности ток не течёт, то заряд на поверхность может попадать лишь из объёма среды. Таким образом, с учётом выбора нормали:

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = -(\mathbf{j}_I - \mathbf{j}_{II}, \mathbf{n}_{II,I}) \quad (5.6)$$

Подставляя (5.6) в (5.5) получим:

$$\left(\left(\frac{\partial \mathbf{D}_I}{\partial t} + \mathbf{j}_I \right) - \left(\frac{\partial \mathbf{D}_{II}}{\partial t} + \mathbf{j}_{II} \right), \mathbf{n}_{II,I} \right) = 0 \quad (5.7)$$

Вновь перейдём к комплексным амплитудам электромагнитных векторов. Предположим, что в каждой из сред выполняются материальные соотношения (3.10)-(3.12), с помощью которых из уравнений (5.3), (5.7) исключим величины \mathbf{D}_I , \mathbf{D}_{II} , \mathbf{j}_I , \mathbf{j}_{II} , \mathbf{B}_I , \mathbf{B}_{II} . Тогда в итоге получим:

$$(\hat{\mathbf{E}}_I - \hat{\mathbf{E}}_{II}, \boldsymbol{\tau}) = 0 \quad (5.8)$$

$$\left(\hat{\xi}_I \hat{\mathbf{E}}_I - \hat{\xi}_{II} \hat{\mathbf{E}}_{II}, \mathbf{n}_{II,I} \right) = 0 \quad (5.9)$$

$$(\hat{\mu}_I \hat{\mathbf{H}}_I - \hat{\mu}_{II} \hat{\mathbf{H}}_{II}, \mathbf{n}_{II,I}) = 0 \quad (5.10)$$

$$(\hat{\mathbf{H}}_I - \hat{\mathbf{H}}_{II}, \boldsymbol{\tau}) = 0 \quad (5.11)$$

Уравнения (5.8)-(5.11) являются обобщением классических граничных условий для векторов электромагнитного поля (5.1)-(5.4). Заметим, что условие (5.9) можно вывести и из уравнения (3.25) классическим способом - интегрируя уравнение (3.25) по объёму цилиндра, основания которого находятся по разные стороны от границы раздела сред.

Подведём некоторый итог. Итак, в главах 2-5 было проведено обобщение задачи об излучении для случая нахождения источника излучения в изотопной среде с произвольными электромагнитными характеристиками. Было показано, что новая задача сводится к известной задаче об излучении в диэлектрической среде заменой $\hat{\epsilon} \rightarrow \hat{\xi}$, $\hat{\mathbf{j}} \rightarrow \hat{\mathbf{j}}_{\text{ex}}$, $\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}_{\text{ex}}$. При этом для определения волнового числа вместо классической формулы $k = \omega/c$ необходимо использовать формулы (4.3), (4.10), (4.14)-(4.15). Таким образом, всё последующее обобщение можно построить с помощью вышеуказанных замен.

6. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ И МАГНИТНОЕ ДИПОЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ С УЧЁТОМ БЛИЖНЕГО ПОЛЯ В ПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ

Приведем результаты обобщения формул для электрического и магнитного дипольных излучений для случая проводящих сред.

В [42] показано, что случае излучения в вакууме структуру поля электрического дипольного излучения с учётом ближнего поля можно получить из векторного потенциала \mathbf{A} вида:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 \dot{\mathbf{d}}(\tau)}{4\pi r} \Big|_{\tau=t-r/c} \quad (6.1)$$

по формулам

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = (\mu_0/4\pi) \times \text{rot}(\dot{\mathbf{d}}(\tau)/r) \quad (6.2)$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\phi - \dot{\mathbf{A}} = -(c^2\mu_0/4\pi)\text{grad div}(\mathbf{d}(\tau)/r) - (\mu_0\dot{\mathbf{d}}(\tau)/4\pi r) \quad (6.3)$$

здесь \mathbf{d} - электрический дипольный момент системы, r - расстояние от излучателя до точки наблюдения, $\tau = t - r/c$ - время запаздывания, частная производная по времени обозначается для краткости точкой. В (6.3) было использовано условие калибровки Лоренца $\phi = -c^2 \int \text{div} \mathbf{A} dt' = -c^2 \text{div}(\mathbf{d}/r)$. Постоянную интегрирования не учитываем, поскольку нас интересует только изменяющаяся во времени часть потенциала.

Используя разложение в интегралы Фурье и, переходя к комплексным амплитудам соответствующих величин с учётом обобщения, описанного в главах 2-5, получим:

$$\hat{\mathbf{A}} = -i\omega\hat{\mu}e^{ikr}\hat{\mathbf{d}}/4\pi r \quad (6.4)$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \text{rot } \hat{\mathbf{A}} \quad (6.5)$$

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{i\omega}{k^2} \{ \text{grad div } \hat{\mathbf{A}} + k^2 \hat{\mathbf{A}} \} \quad (6.6)$$

Таким образом, электромагнитные поля могут быть полностью восстановлены из потенциала $\hat{\mathbf{A}}$. При этом, выражение для потенциала $\hat{\mathbf{A}}$ излу-

ния электрического диполя имеет весьма простой вид (6.4.) - по сути это амплитуда точечного источника $\sim e^{ikr}/r$. Поэтому задача дифракции электромагнитных волн будет решаться для потенциала \hat{A} , а электромагнитные поля будут восстановлены по формулам (6.5)-(6.6).

В случае магнитного диполя более удобно пользоваться магнитным потенциалом герца Π , который вводится следующим образом:

$$\mathbf{A} = \text{rot } \Pi \quad (6.7)$$

Формула (6.7) требует некоторых пояснений. Магнитный диполь возбуждает электромагнитные волны лишь вихревыми токами, поверхностная и объёмная плотности зарядов при этом равны нулю. Поэтому в таком случае можно положить $\varphi = 0$. Тогда из условия калибровки Лоренца следует, что $\text{div } \mathbf{A} = 0$. Но если дивергенция вектора равна нулю, это значит, что этот вектор может быть представлен как ротор от некоторого другого вектора, отсюда и следует формула (6.7).

В [42] показано, что структуру поля излучения магнитного диполя с учётом ближнего поля можно восстановить по магнитному потенциалу герца Π вида:

$$\Pi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m}(\tau)}{r} \Big|_{\tau=t-\frac{r}{c}} \quad (6.8)$$

по формулам

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi - \dot{\mathbf{A}} = -\text{rot } \dot{\Pi}(\tau) \quad (6.9)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \text{rot rot } \Pi(\tau) \quad (6.10)$$

В формуле (6.8) \mathbf{m} - магнитный дипольный момент системы.

Аналогично, пользуясь разложением в интегралы Фурье, переходя к комплексным амплитудам соответствующих величин, с учётом обобщения, описанного в главах 2-5, получаем:

$$\hat{\Pi} = \frac{\hat{\mu}}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{m}} \quad (6.11)$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \text{rot rot } \hat{\mathbf{\Pi}} \quad (6.12)$$

$$\hat{\mathbf{E}} = i\omega \text{rot } \hat{\mathbf{\Pi}} \quad (6.13)$$

Аналогично задачу дифракции будем решать для потенциала $\hat{\mathbf{\Pi}}$, затем восстанавливая электромагнитные поля по формулам (6.11)- (6.13).

Отдельно отметим важность того обстоятельства, что потенциалы элементарных дипольных источников (6.4), (6.11) позволяют по формулам (6.5)-(6.6), (6.12)-(6.13) соответственно восстанавливать структуру электромагнитных полей учитывающую ближнее поле. Благодаря этому, в дипольных разложениях (6.4)-(6.6), (6.11)-(6.13) присутствуют лишь два малых параметра:

- $r'/r \ll 1$ (расстояние от точки наблюдения до излучателя должно быть много больше размеров самого излучателя);
- $|k|r' \ll 1$ (длина излучаемой волны, или толщина скин-слоя в случае сильного затухания, много больше размеров источника).

Таким образом, выражения (6.4)-(6.6), (6.11)-(6.13) адекватно описывают поле источника в ближней зоне $r \sim \lambda$. Это является важным, поскольку иначе из нашего рассмотрения следовало бы исключить случаи, когда $h \sim \lambda$ или $h < \lambda$. Стоит отметить, что это обстоятельство не учитывается ни в одной из работ, рассмотренных в обзоре литературы [11-36]. По этой причине в них рассматривается лишь случаи $h \gg \lambda$, а задача дифракции решается лишь для дальнего поля.

В конце главы приведём связь дипольных моментов излучателей со сторонними токами излучающей системы:

$$\hat{\mathbf{d}} = \iiint_{V'} \mathbf{r}' \hat{\rho}_{\text{ex}}(\mathbf{r}') dx' dy' dz' = \frac{i}{\omega} \iiint_{V'} \hat{\mathbf{j}}_{\text{ex}}(\mathbf{r}') dx' dy' dz' \quad (6.14)$$

$$\hat{\mathbf{m}} = \frac{1}{2} \iiint_{V'} [\mathbf{r}' \times \hat{\mathbf{j}}_{\text{ex}}(\mathbf{r}')] dx' dy' dz' \quad (6.15)$$

7. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ

Для электрического диполя будем решать задачу для потенциала \hat{A} . Если потенциал \hat{A} будет найден, то из выражений (6.5)-(6.6) можно легко найти электромагнитные поля.

Рассмотрим пространство, разделённое плоскостью на две части, каждая из которых заполнена средой с заданными электромагнитными характеристиками, такими как проводимости $\hat{\sigma}_I(\omega)$, $\hat{\sigma}_{II}(\omega)$, магнитные проницаемости $\hat{\mu}_I(\omega)$, $\hat{\mu}_{II}(\omega)$, диэлектрические проницаемости $\hat{\epsilon}_I(\omega)$, $\hat{\epsilon}_{II}(\omega)$ (рис. 7.1).

Все величины, относящиеся к верхнему полупространству, будут снабжаться индексом I, а величины, относящиеся к нижнему - индексом II.

Пусть в каждой из сред выполняются материальные соотношения вида (3.10)-(3.12). Пусть в нижнем полупространстве (среде II) на расстоянии h от границы раздела, располагается электрический дипольный излучатель, момент которого перпендикулярен границе раздела. Систему координат выберем так, чтобы её начало находилось на границе раздела сред, а ось Oz проходила через диполь. Необходимо найти распределение электромагнитным полей в окружающем пространстве.

Перейдём из декартовой системы координат (x, y, z) в цилиндрическую систему координат (r, ϕ, z) . Здесь ϕ - угол между проекцией радиус-вектора \mathbf{r} на плоскость xu и осью Ox , $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ - модуль проекции радиус-вектора \mathbf{r} на плоскость xu . С настоящего момента и далее символом « r » будет обозначаться именно координата r в цилиндрической системе координат.

Отметим, что в силу симметрии системы относительно поворота вокруг оси Oz на произвольный угол ϕ , решение задачи не должно зависеть от координаты ϕ , поэтому частная производная $\partial/\partial\phi$ от любой функции, будет равна нулю.

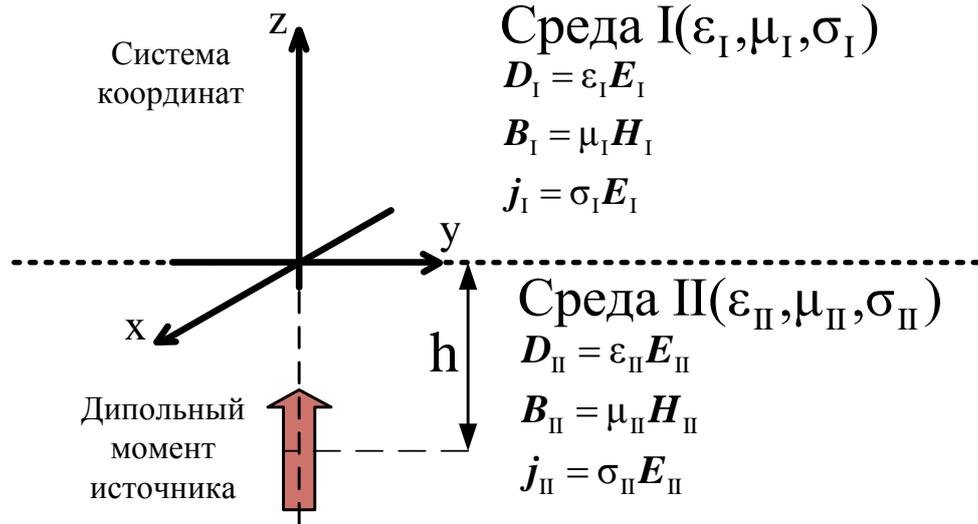


Рисунок 7.1 - К условию задачи

Для каждой из компонент вектора \hat{A} согласно (4.5), можно записать уравнение Гельмгольца. Предварительно заметим: из условия задачи следует, что сторонние токи присутствуют лишь в среде II, и не равна нулю лишь z-ая компонента \hat{j}_z^{ex} , поскольку иначе, согласно (6.14), дипольный момент излучателя не был бы перпендикулярен границе раздела сред:

В среде I:

$$\Delta \hat{A}_r^I + k_I^2 \hat{A}_r^I = 0 \quad (7.1)$$

$$\Delta \hat{A}_\phi^I + k_I^2 \hat{A}_\phi^I = 0 \quad (7.2)$$

$$\Delta \hat{A}_z^I + k_I^2 \hat{A}_z^I = 0 \quad (7.3)$$

В среде II:

$$\Delta \hat{A}_r^{\text{II}} + k_{\text{II}}^2 \hat{A}_r^{\text{II}} = 0 \quad (7.4)$$

$$\Delta \hat{A}_\phi^{\text{II}} + k_{\text{II}}^2 \hat{A}_\phi^{\text{II}} = 0 \quad (7.5)$$

$$\Delta \hat{A}_z^{\text{II}} + k_{\text{II}}^2 \hat{A}_z^{\text{II}} = -\hat{\mu}_{\text{II}} \hat{j}_z^{\text{ex}} \quad (7.6)$$

Из уравнений (7.1)-(7.6) можно заключить следующее: разумно положить не равной нулю только z-ую компоненту полей \hat{A}^I , \hat{A}^{II} . Действительно, так как не равна нулю только z-ая компонента стороннего тока, логично

предположить, что и возбуждаются лишь только z -ые компоненты $\hat{A}_z^I, \hat{A}_z^{II}$. Казалось бы, что остальные компоненты всё же могут возбуждаться при отражении и преломлении на границе раздела сред. Однако из дальнейшего рассмотрения станет видно, что одной только z -ой компоненты векторов \hat{A}_I, \hat{A}_{II} достаточно для того, чтобы удовлетворить граничным условиям. Таким образом, для дальнейшего рассмотрения остаются лишь уравнения (7.3), (7.6).

Решение поставленной выше задачи в области II будем искать в следующем виде:

$$\hat{A}_z^{II} = \hat{A}_z^i + \hat{A}_z^s \quad (7.7)$$

\hat{A}_z^i - функция источника (электрического дипольного излучателя), излучающего в бесконечном пространстве, заполненном средой II. Согласно формуле (6.4), и учитывая переход к цилиндрическим координатам:

$$\hat{A}_z^i(r, z) = -\frac{i\omega\hat{\mu}_{II}}{4\pi} \frac{e^{ik_{II}\sqrt{r^2+(z+h)^2}}}{\sqrt{r^2+(z+h)^2}} \hat{d}_z = A_0 \frac{e^{ik_{II}\sqrt{r^2+(z+h)^2}}}{\sqrt{r^2+(z+h)^2}}; A_0 = -\frac{i\omega\hat{\mu}_{II}\hat{d}_z}{4\pi} \quad (7.8)$$

здесь A_0 - коэффициент, введённый для краткости. Аргумент $z+h$ учитывает, что диполь находится в точке $z=-h$.

\hat{A}_z^s - функция, соответствующая полю в среде II преломлённому границей раздела сред. Она заранее неизвестна и подлежит определению.

Если решение в виде (7.7) подставить в уравнение (7.6), то получится, что функция \hat{A}_z^s удовлетворяют однородному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta\hat{A}_z^s + k_{II}^2\hat{A}_z^s = 0 \quad (7.9)$$

Потребуем на границе раздела сред (на плоскости $z=0$) выполнения граничных условий (5.8)-(5.11).

Воспользуемся формулами (6.5)-(6.6). Расписывая лапласиан в цилиндрической системе координат и пользуясь тем, что $\partial/\partial\phi\dots=0$, получим:

$$\hat{\mathbf{E}}_{I,II} = \mathbf{e}_r \left\{ \frac{i}{\omega \hat{\mu}_{I,II} \hat{\xi}_{I,II}} \frac{\partial^2 \hat{A}_z^{I,II}}{\partial z \partial r} \right\} + \mathbf{e}_z \left\{ i \omega \hat{A}_z^{I,II} + \frac{i}{\omega \hat{\mu}_{I,II} \hat{\xi}_{I,II}} \frac{\partial^2 \hat{A}_z^{I,II}}{\partial z^2} \right\} \quad (7.10)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{I,II} = -\frac{1}{\hat{\mu}_{I,II}} \frac{\partial \hat{A}_z^{I,II}}{\partial r} \mathbf{e}_\phi \quad (7.11)$$

Из формул (7.10)-(7.11) следует, что магнитное поле имеет лишь угловую составляющую, в то время как электрическое поле имеет радиальную и вертикальную составляющие.

Из выражения (7.10) и граничного условия (5.8), следует, что при $z = 0$:

$$\left. \frac{1}{\hat{\mu}_I \hat{\xi}_I} \frac{\partial^2 \hat{A}_z^I}{\partial z \partial r} \right|_{z=0} = \left. \frac{1}{\hat{\mu}_{II} \hat{\xi}_{II}} \frac{\partial^2 \hat{A}_z^{II}}{\partial z \partial r} \right|_{z=0} \quad (7.12)$$

Поскольку выражение (7.12) выполняется при $z = 0$, то оно зависит лишь от координаты r , поэтому вместо частной производной по координате r , можно написать полную производную:

$$\left. \frac{1}{\hat{\mu}_I \hat{\xi}_I} \frac{d}{dr} \frac{\partial \hat{A}_z^I}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{1}{\hat{\mu}_{II} \hat{\xi}_{II}} \frac{d}{dr} \frac{\partial \hat{A}_z^{II}}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (7.13)$$

Проинтегрировав выражение (4.15) по координате r , окончательно получим следующее граничное условие:

$$\left. \frac{1}{\hat{\mu}_I \hat{\xi}_I} \frac{\partial \hat{A}_z^I}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{1}{\hat{\mu}_{II} \hat{\xi}_{II}} \frac{\partial \hat{A}_z^{II}}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (7.14)$$

Из выражения (7.10) и граничного условия (5.9) следует:

$$\left\{ \omega^2 \hat{\xi}_I \hat{A}_z^I + \frac{1}{\hat{\mu}_I} \frac{\partial^2 \hat{A}_z^I}{\partial z^2} \right\} \Big|_{z=0} = \left\{ \omega^2 \hat{\xi}_{II} \hat{A}_z^{II} + \frac{1}{\hat{\mu}_{II}} \frac{\partial^2 \hat{A}_z^{II}}{\partial z^2} \right\} \Big|_{z=0} \quad (7.15)$$

В силу того, что у магнитного поля отсутствует компонента нормальная границе раздела, граничное условие (5.10) обращается в тождество $0 = 0$.

Из выражения (7.11) и граничного условия (5.11) (после интегрирования по переменной r) следует:

$$\hat{A}_z^I / \hat{\mu}_I \Big|_{z=0} = \hat{A}_z^{\text{II}} / \hat{\mu}_{\text{II}} \Big|_{z=0} \quad (7.16)$$

Далее представим функцию излучения источника \hat{A}_z^i (электрического диполя) (7.8) в виде интеграла (т.е. разложения) по собственным функциям задачи (см. приложение 1 или [12,18]):

$$\hat{A}_z^i = A_0 \frac{e^{ik_{\text{II}} \sqrt{r^2 + (z+h)^2}}}{\sqrt{r^2 + (z+h)^2}} = A_0 \int_0^{+\infty} J_0(\zeta r) e^{-\sqrt{\zeta^2 - k_{\text{II}}^2} |z+h|} \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - k_{\text{II}}^2}} d\zeta \quad (7.17)$$

В дальнейшем для краткости введём следующие обозначения:

$$\beta_I = \sqrt{\zeta^2 - k_I^2}, \quad \beta_{\text{II}} = \sqrt{\zeta^2 - k_{\text{II}}^2} \quad (7.18)$$

Будем искать \hat{A}_z^I, \hat{A}_z^s также в виде интегралов по собственным функциям задачи:

$$\hat{A}_z^s = A_0 \int_0^{+\infty} J_0(\zeta r) e^{-\beta_{\text{II}} |z|} G_s(\zeta) d\zeta = \Big|_{\text{т.к. } z < 0} = A_0 \int_0^{+\infty} J_0(\zeta r) e^{\beta_{\text{II}} z} G_s(\zeta) d\zeta \quad (7.19)$$

$$\hat{A}_z^I = A_0 \int_0^{+\infty} J_0(\zeta r) e^{-\beta_I |z|} G_I(\zeta) d\zeta = \Big|_{\text{т.к. } z > 0} = A_0 \int_0^{+\infty} J_0(\zeta r) e^{-\beta_I z} G_I(\zeta) d\zeta \quad (7.20)$$

здесь $G_s(\zeta)$ и $G_I(\zeta)$ подлежащие определению неизвестные амплитудные множители. Для удобства сделаем замену: $G_s(\zeta) = e^{-\beta_{\text{II}} h} F_s(\zeta)$, $G_I(\zeta) = e^{-\beta_I h} F_I(\zeta)$, и будем искать уже функции $F_s(\zeta), F_I(\zeta)$. Итак, окончательно решение ищем в виде:

$$\hat{A}_z^s = A_0 \int_0^{+\infty} J_0(\zeta r) e^{\beta_{\text{II}} z} e^{-\beta_{\text{II}} h} F_s(\zeta) d\zeta \quad (7.21)$$

$$\hat{A}_z^I = A_0 \int_0^{+\infty} J_0(\zeta r) e^{-\beta_I z} e^{-\beta_I h} F_I(\zeta) d\zeta \quad (7.22)$$

При этом, вычисляя $\beta_I, \beta_{\text{II}}$, следует всегда выбирать ту ветвь корня, реальная часть которой больше нуля, поскольку иначе интегралы в (7.17),

(7.21)-(7.22) при $z \rightarrow \infty$ расходятся. Проще всего определить β как функцию от аргумента $z = \zeta^2 - k^2$:

$$\beta(z = \zeta^2 - k^2) = \sqrt{|z|} e^{\frac{i \arg(z)}{2}} \times \begin{cases} (+1), \operatorname{Re}[\exp(i \arg(z)/2)] > 0 \\ (-1), \operatorname{Re}[\exp(i \arg(z)/2)] < 0 \end{cases} \quad (7.24)$$

Для нахождения функций $F_s(\zeta), F_I(\zeta)$ подставим выражения (7.17), (7.21), (7.22) в граничные условия (7.14)-(7.16). После подстановки перенесём все члены в левую часть получившихся равенств, объединив все интегралы под знаком одного интеграла. Тогда из граничного условия (7.14) получим:

$$\int_0^{+\infty} J_0(\zeta r) e^{-\beta_{II} h} \left\{ -\frac{\beta_I F_I}{\hat{\xi}_I \hat{\mu}_I} - \frac{\beta_{II} F_s - \zeta}{\hat{\xi}_{II} \hat{\mu}_{II}} \right\} d\zeta = 0 \quad (7.25)$$

В силу ортогональности функций Бесселя, выражение, стоящее в фигурных скобках, должно быть равно нулю:

$$-\frac{\beta_I F_I}{\hat{\xi}_I \hat{\mu}_I} - \frac{\beta_{II} F_s - \zeta}{\hat{\xi}_{II} \hat{\mu}_{II}} = 0 \quad (7.26)$$

Выражение (7.26) является одним из уравнений для определения функций F_s, F_I . Второе уравнение для определения F_s, F_I мы получим из граничного условия (7.16):

$$\frac{F_I}{\hat{\mu}_I} - \frac{F_s + (\zeta/\beta_{II})}{\hat{\mu}_{II}} = 0 \quad (7.27)$$

Уравнение (7.26) выводится также из граничного условия (7.15), но выкладки при этом получаются более громоздкими (при этом нужно учитывать соотношение $k^2 = \omega^2 \hat{\mu} \hat{\xi}$).

Уравнения (7.26)-(7.27) являются системой линейных алгебраических уравнений относительно функций F_s, F_I . Решая эту систему, получаем:

$$F_I(\zeta) = \zeta \frac{\hat{\mu}_I}{\hat{\mu}_{II}} \frac{2\hat{\xi}_I}{\beta_{II}\hat{\xi}_I + \beta_I\hat{\xi}_{II}} ; \quad F_s(\zeta) = \frac{\zeta}{\beta_{II}} \left(\frac{\beta_{II}\hat{\xi}_I - \beta_I\hat{\xi}_{II}}{\beta_{II}\hat{\xi}_I + \beta_I\hat{\xi}_{II}} \right) \quad (7.28)$$

Формулы, (7.7)-(7.8), (7.21)-(7.22) вместе с формулами (7.28) представляют собою решение задачи. Согласно (7.7), получаем:

$$\hat{A}_z^{\text{II}} = A_0 \left\{ \frac{e^{ik_{\text{II}}\sqrt{r^2+(z+h)^2}}}{\sqrt{r^2+(z+h)^2}} + \int_0^{+\infty} J_0(\zeta r) e^{\beta_{\text{II}}z} e^{-\beta_{\text{II}}h} \left[\frac{\zeta}{\beta_{\text{II}}} \left(\frac{\beta_{\text{II}}\hat{\xi}_{\text{I}} - \beta_{\text{I}}\hat{\xi}_{\text{II}}}{\beta_{\text{II}}\hat{\xi}_{\text{I}} + \beta_{\text{I}}\hat{\xi}_{\text{II}}} \right) \right] d\zeta \right\} \quad (7.29)$$

$$\hat{A}_z^{\text{I}} = A_0 \int_0^{+\infty} J_0(\zeta r) e^{-\beta_{\text{I}}z} e^{-\beta_{\text{II}}h} \left[\zeta \frac{\hat{\mu}_{\text{I}}}{\hat{\mu}_{\text{II}}} \frac{2\hat{\xi}_{\text{I}}}{\beta_{\text{II}}\hat{\xi}_{\text{I}} + \beta_{\text{I}}\hat{\xi}_{\text{II}}} \right] d\zeta \quad (7.30)$$

Используя формулы (7.10)-(7.11) и учитывая, что $\partial J_0(\zeta r)/\partial r = -\zeta J_1(\zeta r)$, $k^2 = \omega^2 \hat{\mu} \hat{\xi}$, найдём выражения для компонентов полей в среде I (при $z > 0$):

$$\hat{E}_r^{\text{I}} = \frac{i\omega A_0}{k_{\text{I}}^2} \int_0^{+\infty} \zeta J_1(\zeta r) \beta_{\text{I}} e^{-\beta_{\text{I}}z} e^{-\beta_{\text{II}}h} \left[\zeta \frac{\hat{\mu}_{\text{I}}}{\hat{\mu}_{\text{II}}} \frac{2\hat{\xi}_{\text{I}}}{\beta_{\text{II}}\hat{\xi}_{\text{I}} + \beta_{\text{I}}\hat{\xi}_{\text{II}}} \right] d\zeta \quad (7.31)$$

$$\hat{E}_z^{\text{I}} = \frac{i\omega A_0}{k_{\text{I}}^2} \int_0^{+\infty} \zeta^2 J_0(\zeta r) e^{-\beta_{\text{I}}z} e^{-\beta_{\text{II}}h} \left[\zeta \frac{\hat{\mu}_{\text{I}}}{\hat{\mu}_{\text{II}}} \frac{2\hat{\xi}_{\text{I}}}{\beta_{\text{II}}\hat{\xi}_{\text{I}} + \beta_{\text{I}}\hat{\xi}_{\text{II}}} \right] d\zeta \quad (7.32)$$

$$\hat{B}_{\phi}^{\text{I}} = A_0 \int_0^{+\infty} \zeta J_1(\zeta r) e^{-\beta_{\text{I}}z} e^{-\beta_{\text{II}}h} \left[\zeta \frac{\hat{\mu}_{\text{I}}}{\hat{\mu}_{\text{II}}} \frac{2\hat{\xi}_{\text{I}}}{\beta_{\text{II}}\hat{\xi}_{\text{I}} + \beta_{\text{I}}\hat{\xi}_{\text{II}}} \right] d\zeta \quad (7.33)$$

Выведем теперь условие существования поверхностной волны. Допустим, что поверхностная волна соответствует вычету подынтегральных выражений (7.31)-(7.33). Вычету в свою очередь соответствует некоторое значение переменной интегрирования $\zeta = \zeta_0$, обращающее знаменатели дробей (7.31)-(7.33) в ноль. Это происходит в случае выполнения равенства:

$$\hat{\xi}_{\text{II}}\beta_{\text{I}}(\zeta_0) = -\hat{\xi}_{\text{I}}\beta_{\text{II}}(\zeta_0) \quad (7.34)$$

Решив возведением в квадрат уравнение (7.34), найдём, что:

$$\zeta_0^2 = (\hat{\xi}_{\text{I}}^2 k_{\text{II}}^2 - \hat{\xi}_{\text{II}}^2 k_{\text{I}}^2) / (\hat{\xi}_{\text{I}}^2 - \hat{\xi}_{\text{II}}^2) \quad (7.35)$$

При возведении в квадрат выражения (7.34) теряется знак минус, поэтому решение (7.35) необходимо проверить. Для проверки подставим ζ_0 из (7.35) обратно в (7.34) и получим:

$$\hat{\xi}_{\text{I}}\beta_{\text{II}} + \hat{\xi}_{\text{II}}\beta_{\text{I}} = \hat{\xi}_{\text{I}}\sqrt{\hat{\xi}_{\text{II}}^2(k_{\text{II}}^2 - k_{\text{I}}^2)/(\hat{\xi}_{\text{I}}^2 - \hat{\xi}_{\text{II}}^2)} + \hat{\xi}_{\text{II}}\sqrt{\hat{\xi}_{\text{I}}^2(k_{\text{II}}^2 - k_{\text{I}}^2)/(\hat{\xi}_{\text{I}}^2 - \hat{\xi}_{\text{II}}^2)} = 0 \quad (7.36)$$

С первого взгляда может показаться, что (7.36) не выполняется никогда: если внести все сомножители под корни, то подкоренные выражения окажутся идентичными, однако следует рассмотреть выражение (7.36) более подробно. Обозначим одинаковые части подкоренных выражений как $D = (k_{II}^2 - k_I^2) / (\hat{\xi}_I^2 - \hat{\xi}_{II}^2) = |D| e^{i \arg(D)}$. Остальные части подкоренных выражений представим в показательной форме: $\hat{\xi}_I^2 = |\hat{\xi}_I^2| e^{i \arg(\hat{\xi}_I^2)}$, $\hat{\xi}_{II}^2 = |\hat{\xi}_{II}^2| e^{i \arg(\hat{\xi}_{II}^2)}$. Тогда, согласно определению функции β (7.24), из (7.36) следует:

$$\begin{aligned} & \hat{\xi}_I \sqrt{|\hat{\xi}_{II}^2 D|} e^{\frac{i}{2} \arg(\hat{\xi}_{II}^2 D)} \times \left\{ \begin{array}{l} (+1), \operatorname{Re} e^{\frac{i}{2} \arg(\hat{\xi}_{II}^2 D)} > 0 \\ (-1), \operatorname{Re} e^{\frac{i}{2} \arg(\hat{\xi}_{II}^2 D)} < 0 \end{array} \right\} + \\ & + \hat{\xi}_{II} \sqrt{|\hat{\xi}_I^2 D|} e^{\frac{i}{2} \arg(\hat{\xi}_I^2 D)} \times \left\{ \begin{array}{l} (+1), \operatorname{Re} e^{\frac{i}{2} \arg(\hat{\xi}_I^2 D)} > 0 \\ (-1), \operatorname{Re} e^{\frac{i}{2} \arg(\hat{\xi}_I^2 D)} < 0 \end{array} \right\} = 0 \quad (7.37) \end{aligned}$$

Учитывая, что для аргументов комплексных чисел справедливы следующие соотношения: $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$, $2 \arg(z) = \arg(z^2)$, легко пока-

зать, что: $\hat{\xi}_I \sqrt{|\hat{\xi}_{II}^2 D|} e^{\frac{i}{2} \arg(\hat{\xi}_{II}^2 D)} = \hat{\xi}_{II} \sqrt{|\hat{\xi}_I^2 D|} e^{\frac{i}{2} \arg(\hat{\xi}_I^2 D)}$.

Таким образом, ζ_0 является решением уравнения (7.34) только в том случае, когда в фигурных скобках выражения (7.37) выбираются разные знаки. Это условие можно переписать следующим образом:

$$\cos \left[\frac{1}{2} \arg \left(\frac{\hat{\xi}_{II}^2 (k_{II}^2 - k_I^2)}{\hat{\xi}_I^2 - \hat{\xi}_{II}^2} \right) \right] \times \cos \left[\frac{1}{2} \arg \left(\frac{\hat{\xi}_I^2 (k_{II}^2 - k_I^2)}{\hat{\xi}_I^2 - \hat{\xi}_{II}^2} \right) \right] < 0 \quad (7.38)$$

Выражение (7.38) представляет собою условие существования полюса ζ_0 . Если полюс существует, то можно вычислить и вычет в нём, который по предположению соответствует поверхностной волне.

Если рассмотреть случай $\hat{\mu}_I = \hat{\mu}_{II} = \mu_0$, $\hat{\sigma}_I = \hat{\sigma}_{II} = 0$ из (7.36) следует условие, хорошо известное из плазмоники [36]:

$$\text{Re}(\hat{\epsilon}_I) \times \text{Re}(\hat{\epsilon}_{II}) < 0 \quad (7.39)$$

Вычисление вычета в полюсе ζ_0 осуществляется способом, описанным Зоммерфельдом в [12,18]. По формуле полуобхода [12,18] выражение (7.30) можно переписать в виде:

$$\hat{A}_z^I = A_0 \int_{w_1 + w_2} H_0^{(1)}(\zeta r) e^{-\beta_I z} e^{-\beta_{II} h} \left[\zeta \frac{\hat{\mu}_I}{\hat{\mu}_{II}} \frac{\hat{\xi}_I}{\beta_{II} \hat{\xi}_I + \beta_I \hat{\xi}_{II}} \right] d\zeta \quad (7.40)$$

здесь $H_0^{(1)}$ - функция Ханкеля первого рода, контур интегрирования $w_1 + w_2$ показан на рисунке 7.2. зелёной линией. Замыкая контур на бесконечности, и обходя точки ветвления $\zeta = k_{I,II}$ (красная линия), получим, что вычет в полюсе ζ_0 , $\text{Im}(\zeta_0) \geq 0$ советующий поверхностной волне, равен:

$$A_z^{I \text{ surf}} = \frac{1}{2} \frac{\omega \hat{d}_z \hat{\xi}_I \hat{\mu}_I e^{-\beta_{II}(\zeta_0)h}}{(\hat{\xi}_I/\beta_{II}(\zeta_0)) + (\hat{\xi}_{II}/\beta_I(\zeta_0))} H_0^{(1)}(\zeta_0 r) e^{-\beta_I(\zeta_0)z} \quad (7.41)$$

Формула (7.41) обобщает формулу (1.4) для поверхностной волны Зоммерфельда в случае изотропных сред с произвольными электромагнитными характеристиками.

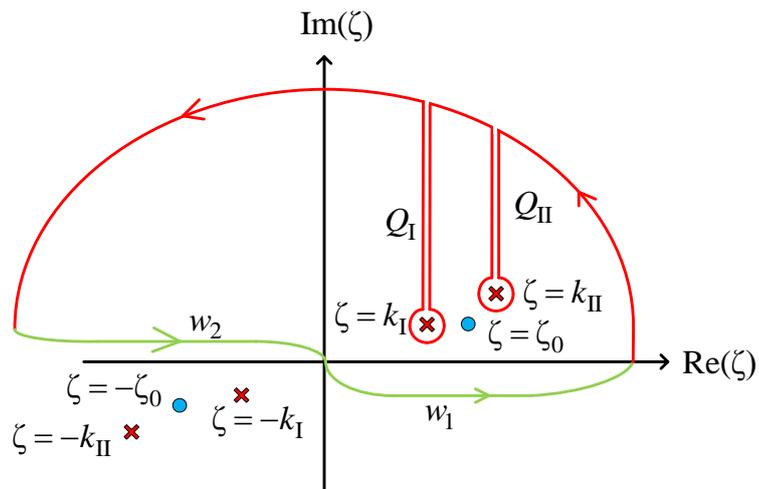


Рисунок 7.2 - Контур интегрирования, используемый при вычислении вычета

Перечислим важные характеристики поверхностной волны, которые можно извлечь из формулы (7.41).

1) Длина волны поверхностной волны (которая в общем случае будет отличаться от объёмной волны): $\lambda_{surf} = 2\pi / \text{Re}(\zeta_0)$.

2) Характерное расстояние по вертикальной оси Oz , проходя которое, амплитуда волны затухает в e раз: $\delta_{surf(r)} = 1 / \text{Im}(\zeta_0)$.

3) Характерное расстояние по радиальной оси Or , проходя которое, амплитуда волны затухает в e раз: $\delta_{surf(z)} = 1 / \text{Re}(\beta_1(\zeta_0))$.

4) Фазовая скорость поверхностной волны: $v_{surf(ph)} = \omega / \text{Re}(\zeta_0)$.

5) Групповая скорость поверхностной волны: $v_{surf(gr)} = (\partial \text{Re}(\zeta_0) / \partial \omega)^{-1}$.

6) Пользуясь формулами (7.10)-(7.11) можно рассчитать амплитуды электромагнитных полей поверхностной волны, которые не будут здесь приведены по причине громоздкости выражений.

Решение задачи о вертикальном магнитном диполе практически дословно повторяет все предыдущие выкладки, поэтому опишем его схематично. Электромагнитные вектора будет удобнее выражать через магнитный потенциал Герца $\hat{\Pi}$ по формулам (6.11)-(6.13). Разумно положить не равной нулю лишь z -ую компоненту этого вектора.

Из граничных условий (5.8)-(5.11) и выражений (6.11)-(6.13) следуют граничные условия для $\hat{\Pi}_z$:

$$\hat{\Pi}_z^I \Big|_{z=0} = \hat{\Pi}_z^{\text{II}} \Big|_{z=0}; \quad \frac{1}{\hat{\mu}_I} \frac{\partial \hat{\Pi}_z^I}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{1}{\hat{\mu}_{\text{II}}} \frac{\partial \hat{\Pi}_z^{\text{II}}}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (7.42)$$

Решение ищется в виде интегралов по собственным функциям типа (7.17), (7.21)-(7.22). Единственное отличие будет заключаться в замене коэффициента A_0 на коэффициент $\Pi_0 = \hat{\mu}_{\text{II}} \hat{m}_z / 4\pi$ согласно (6.8).

Для определения амплитудных множителей F_s, F_I получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$F_s + (\zeta - \beta_{II} F_I) / \beta_{II} = 0; (\beta_{II} F_s - \zeta) \hat{\mu}_I + \beta_I F_I \hat{\mu}_{II} = 0 \quad (7.43)$$

Решая систему, получаем:

$$F_s(\zeta) = -\frac{\zeta}{\beta_{II}} \times \frac{\hat{\mu}_{II} \beta_I - \hat{\mu}_I \beta_{II}}{\hat{\mu}_{II} \beta_I + \hat{\mu}_I \beta_{II}}; F_I(\zeta) = 2\zeta \hat{\mu}_I / (\hat{\mu}_{II} \beta_I + \hat{\mu}_I \beta_{II}) \quad (7.44)$$

Таким образом, решение задачи записывается в виде:

$$\hat{\Pi}_z^{II} = \Pi_0 \left\{ \frac{e^{ik_{II} \sqrt{r^2 + (z+h)^2}}}{\sqrt{r^2 + (z+h)^2}} - \int_0^{+\infty} J_0(\zeta r) e^{\beta_{II} z} e^{-\beta_{II} h} \left[\frac{\zeta}{\beta_{II}} \times \frac{\hat{\mu}_{II} \beta_I - \hat{\mu}_I \beta_{II}}{\hat{\mu}_{II} \beta_I + \hat{\mu}_I \beta_{II}} \right] d\zeta \right\} \quad (7.45)$$

$$\hat{\Pi}_z^I = \Pi_0 \int_0^{+\infty} J_0(\zeta r) e^{-\beta_I z} e^{-\beta_{II} h} \left[\frac{2\zeta \hat{\mu}_I}{\hat{\mu}_{II} \beta_I + \hat{\mu}_I \beta_{II}} \right] d\zeta \quad (7.46)$$

Электромагнитные поля можно найти из выражений (7.45)-(7.46) по формулам (6.11)-(6.13). Условие существования поверхностной волны выглядит также как (7.38), если сделать замены $\hat{\xi}_I \rightarrow \hat{\mu}_I, \hat{\xi}_{II} \rightarrow \hat{\mu}_{II}$.

8. СРАВНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ С ЧИСЛЕННЫМ ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Проведём сравнение аналитических формул для электрического диполя с численным экспериментом. Вертикальный электрический диполь возбуждает только одну (угловую) компоненту магнитного поля, по этой причине на контурных графиках будет удобнее всего изображать именно её.

Дипольный момент рассчитывался для симметричного вибратора Герца длиной 1 метр (каждое плечо 0.5 метра) при протекании тока в 1 ампер.

Отметим, что численное моделирование было реализовано при помощи метода конечных элементов. Рассмотрим несколько примеров с заданными параметрами задачи.

Первый пример - случай расположения диполя в метаматериале (среде II), у которого диэлектрическая проницаемость отрицательна. При таких параметрах волны в среде II вообще не могут распространяться - амплитуда электромагнитной волны в среде II экспоненциально затухает с характерной толщиной скин-слоя δ_{II} . Среда I при этом представляет собой вакуум. Характеристики сред и параметры задачи указаны в таблице 1.

Таблица 1 - Параметры задачи

Характеристики среды I:	$\epsilon_I = \epsilon_0, \mu_I = \mu_0, \sigma_I = 0$
Характеристики среды II:	$\epsilon_{II} = -1.1\epsilon_0, \mu_{II} = \mu_0, \sigma_{II} = 0$
Характеристики волны в среде I:	$\lambda_I = 300 \text{ м}$
Характеристики волны в среде II:	$\delta_{II} = 45 \text{ м}$
Характеристики поверхностной волны:	$\lambda_s = 90 \text{ м}, \delta_z = 15 \text{ м}, \delta_r = \infty$ $v_{ph} = -0.3c_0, v_{gr} = 0.048c_0$
Частота излучения:	$\nu = 1 \text{ МГц}$
Расстояние от источника до границы раздела сред:	$h = 50 \text{ м}$

Данный пример весьма сложно реализуем на практике (ионосфера при определённом подборе параметров может являться плазмopodobной). Основная задача данного примера - проверить теорию на принцип соответствия, а также проверить аналитическое выражение, соответствующее поверхностной волне с численным экспериментом. Согласно расчётам, приведённым в таблице 1, поверхностная волна должна выделяться на контурных графиках от объёмной волны, поскольку длина волны первой составляет 90 м, в то время как длина волны второй равна 300 м.

На рис. 8.1 изображён контурный график угловой компоненты вектора магнитной индукции, построенный на основе результатов численного моделирования.

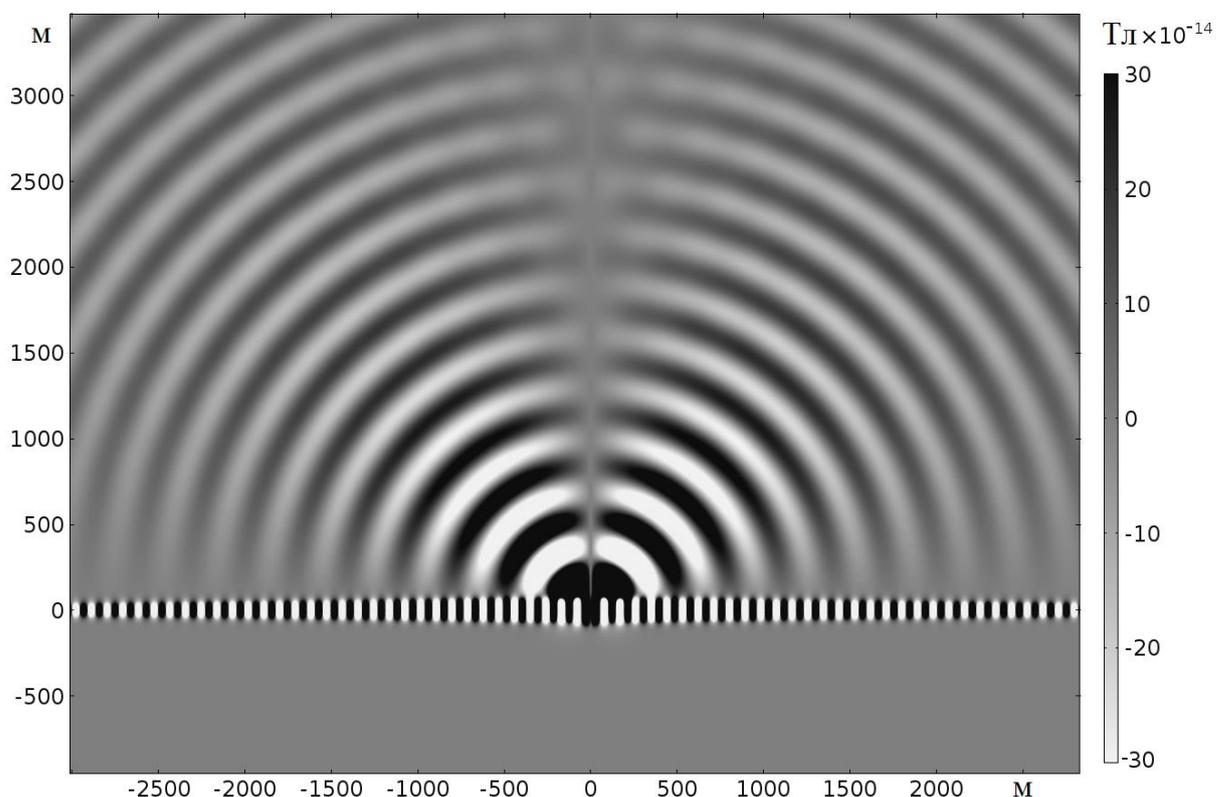


Рисунок 8.1 Контурный график угловой компоненты вектора магнитной индукции

Из графика на рис. 8.1. можно заключить, что расчётные характеристики поверхностной волны соответствуют численному эксперименту: поверхност-

ная волна отчётливо видна на фоне объёмной, а длина волны первой действительно составляет 90 м.

Для более детального сравнения был построен одномерный график зависимости угловой компоненты вектора магнитной индукции вдоль границы раздела по радиальному направлению (рис. 8.2).

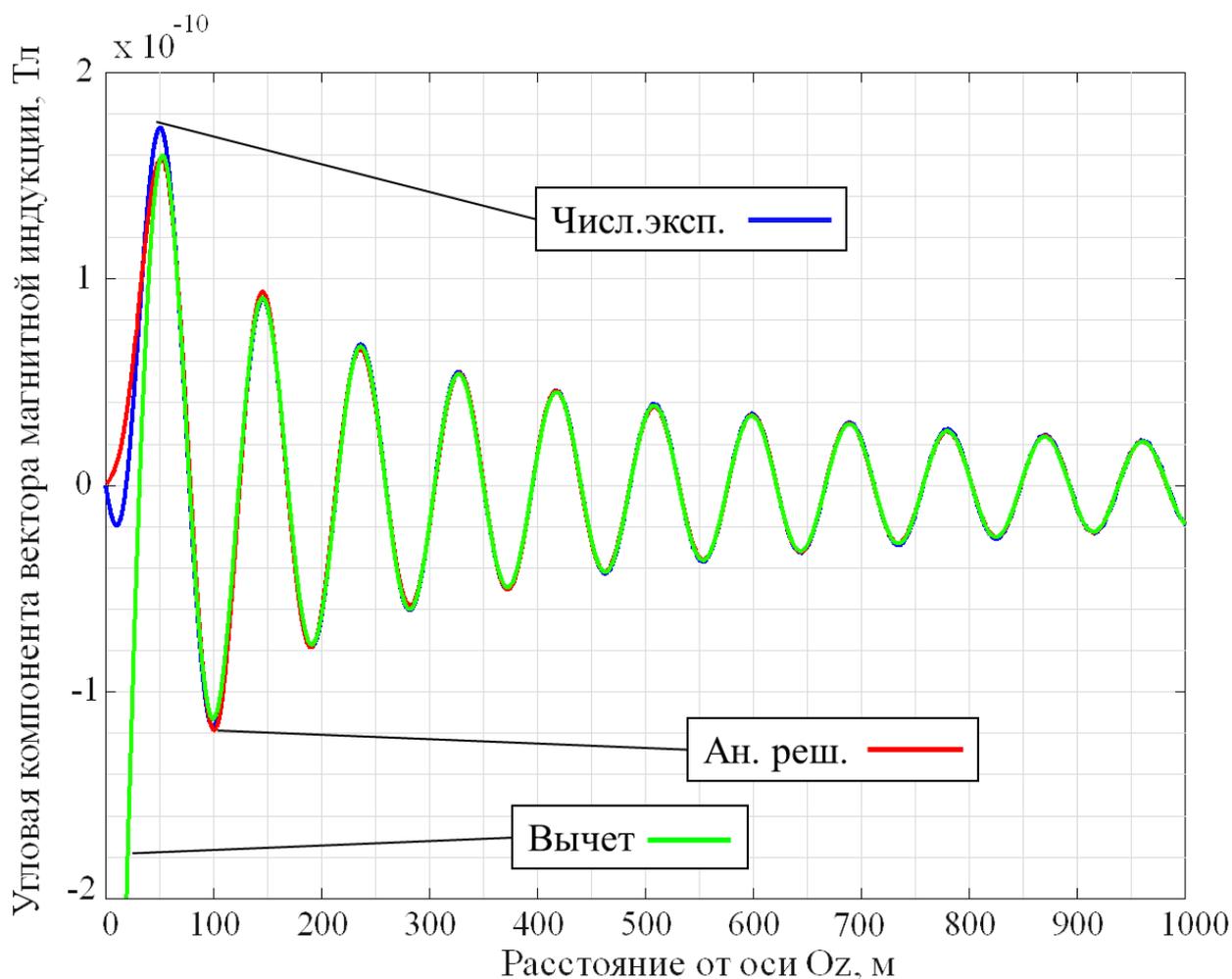


Рисунок 8.2 График зависимости угловой компоненты вектора магнитной индукции на границе раздела сред от расстояния до оси Oz

Из графика видно, что аналитическое решение (7.33) и результаты численного моделирования совпадают. Вычет, соответствующий поверхностной волне (7.41) совпадает с результатами численного моделирования на расстояниях от источника больших, чем 50 метров. Несовпадение вычета и аналитического решения в начале координат объясняется тем, что функция Ханкеля при стремлении её аргумента к нулю стремится к бесконечности, поэтому,

вычет не может адекватно описывать поведение поля вблизи начала координат. Отличие численного решения от аналитического в начале координат объясняется тем, что при достаточно малых расстояниях от точки наблюдения до источника в дипольном разложении начинают играть роль слагаемые пропорциональные r'/r .

На рис. 8.3 приведен контурный график модуля вектора напряженности электрического поля.

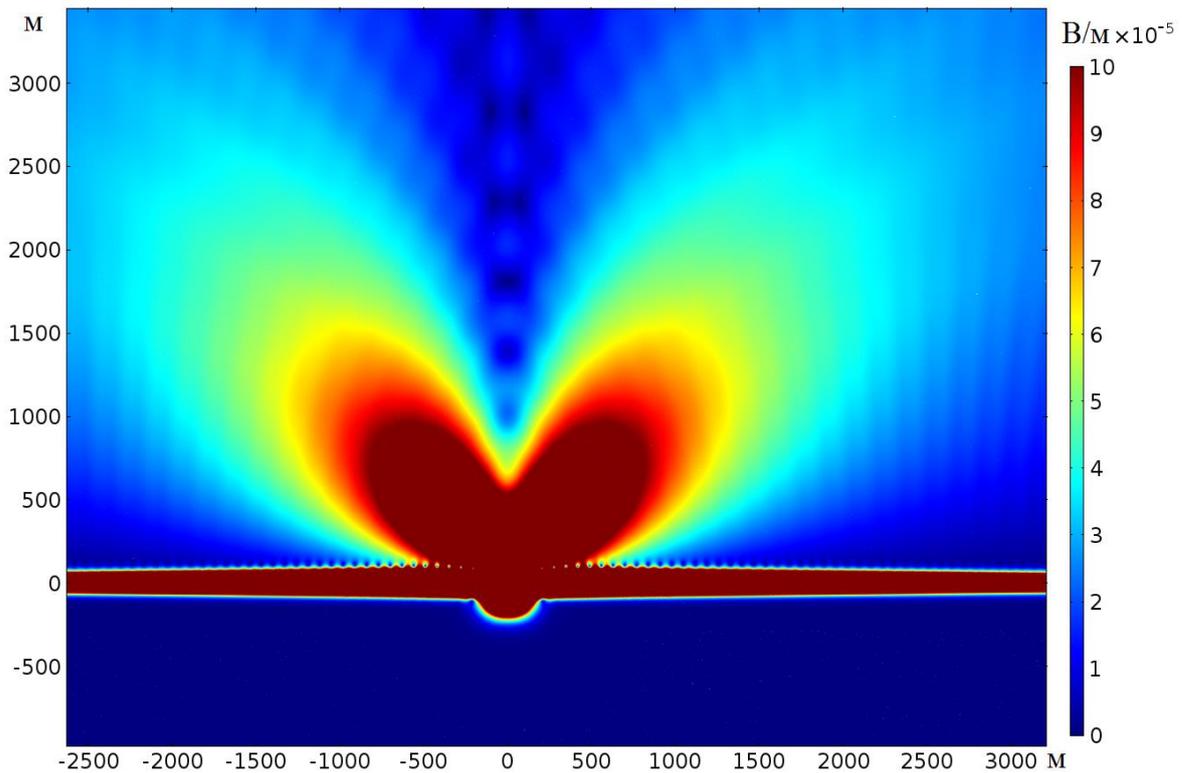


Рисунок 8.3 Контурный график модуля вектора напряжённости электрического поля

Из рис. 8.3 видно, что амплитуда электрического поля возрастает при приближении к границе раздела сред и достаточно резко убывает при удалении от неё, что является характерной особенностью поверхностной волны (7.41).

Из индикатрисы потока энергии видно, что основной поток энергии распространяется преимущественно по границе раздела сред (рис 8.4).

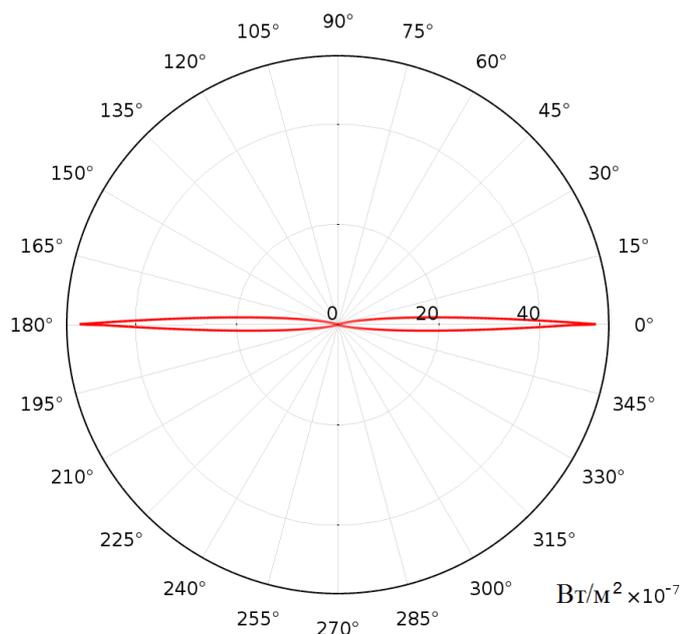


Рисунок 8.4 Индикатриса потока энергии на расстоянии 100 метров от излучателя

Рассмотрим второй случай: электрический диполь находится в среде II, которая обладает конечной проводимостью σ_{II} . Среду I будем считать вакуумом. Характеристики сред I, II, а также рассчитанные параметры объёмных и поверхностной волн приведены в таблице 2. Условие существования поверхностной волны (7.38) при данных параметрах задачи выполняется.

Таблица 2 - Параметры задачи

Характеристики среды I:	$\epsilon_I = \epsilon_0, \mu_I = \mu_0, \sigma_I = 0$
Характеристики среды II:	$\epsilon_{II} = \epsilon_0, \mu_{II} = \mu_0, \sigma_{II} = 10^{-4} \text{ СМ/М}$
Характеристики волны в среде I:	$\lambda_I = 300 \text{ м}$
Характеристики волны в среде II:	$\lambda_{II} = 242 \text{ м}, \delta_{II} = 65 \text{ м}$
Характеристики поверхностной волны:	$\lambda_s = 347 \text{ м}, \delta_z = 218 \text{ м}, \delta_r = 331 \text{ м}$ $v_{ph} = 1.15c_0, v_{gr} = 0.22c_0$
Частота излучения:	$\nu = 1 \text{ МГц}$
Расстояние от источника до границы раздела сред:	$h = 50 \text{ м}$

Для сравнительного анализа построим аналогичные графики. На рис. 8.5 изображён контурный график угловой компоненты вектора магнитной индукции, построенный на основе результатов численного моделирования. Поверхностная волна согласно (7.38) возбуждается, но наблюдать её можно только около начала координат. Причиной этого является достаточно быстрое затухание поверхностной волны (из-за наличия проводимости среды II) с характерной константой затухания вдоль радиального направления $\delta_r = 331$ м.

Идентифицировать поверхностную волну возможно с помощью закона её дисперсии. Расчётная длина волны поверхностной волны должна составлять $\lambda_s = 347$ м, что согласуется с численным экспериментом, представленным на рис. 8.5.

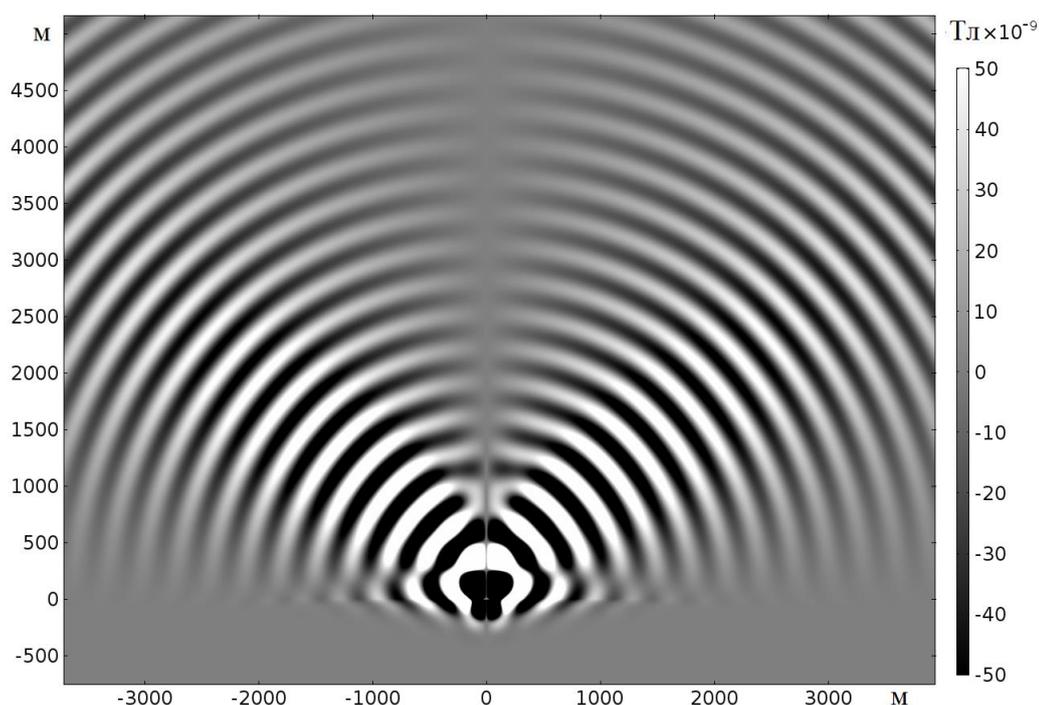


Рисунок 8.5 Контурный график угловой компоненты вектора магнитной индукции

Для более детального сравнения аналитического решения (7.33), вычета (7.41) и результатов численного эксперимента построим одномерный график

угловой компоненты вектора магнитной индукции вдоль радиального направления на границе раздела сред (рис. 8.6).

Из рис. 8.6. следует, что в данном примере вычет (7.41), аналитическое (7.33) и численное решения совпадают. Однако из-за затухания поверхностной нельзя сравнить графики при больших расстояниях от источника. Поэтому удобнее построить данный график в логарифмическом масштабе, взяв модуль угловой компоненты вектора магнитной индукции (рис. 8.7). Из рис. 8.7 видно, что численное и аналитическое решения совпадают и при больших расстояниях от источника, а вычет корректно описывает структуру магнитного поля только до некоторого расстояния.

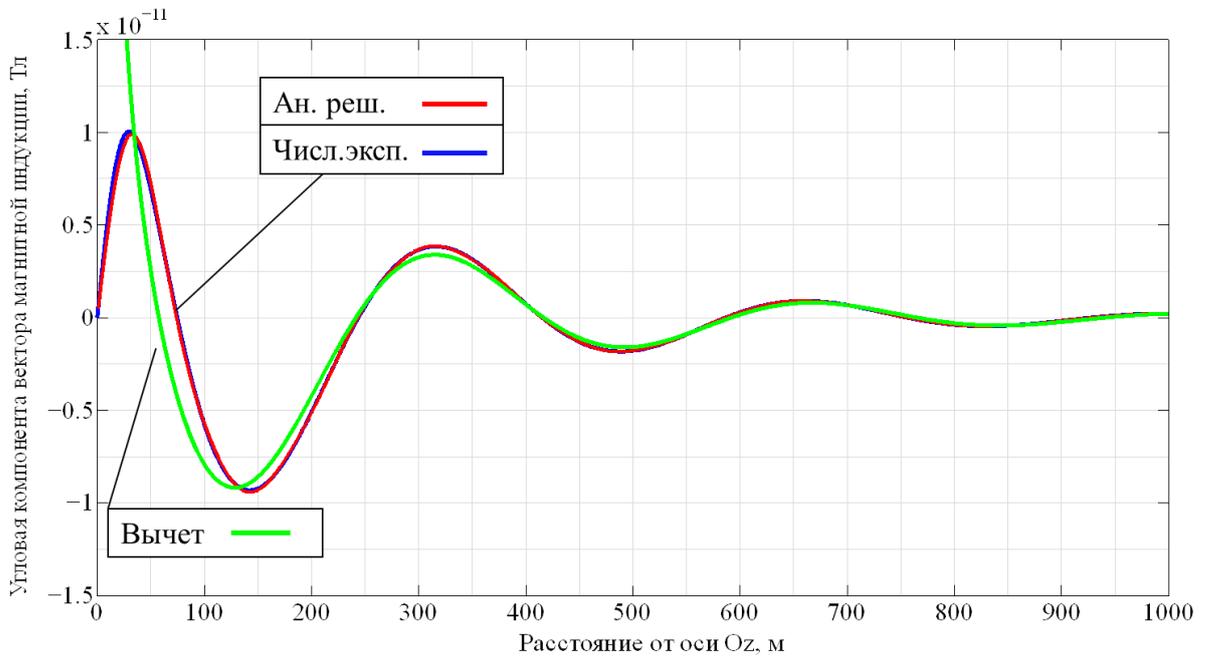


Рисунок 8.6 График зависимости угловой компоненты вектора магнитной индукции на границе раздела сред от расстояния до оси Oz

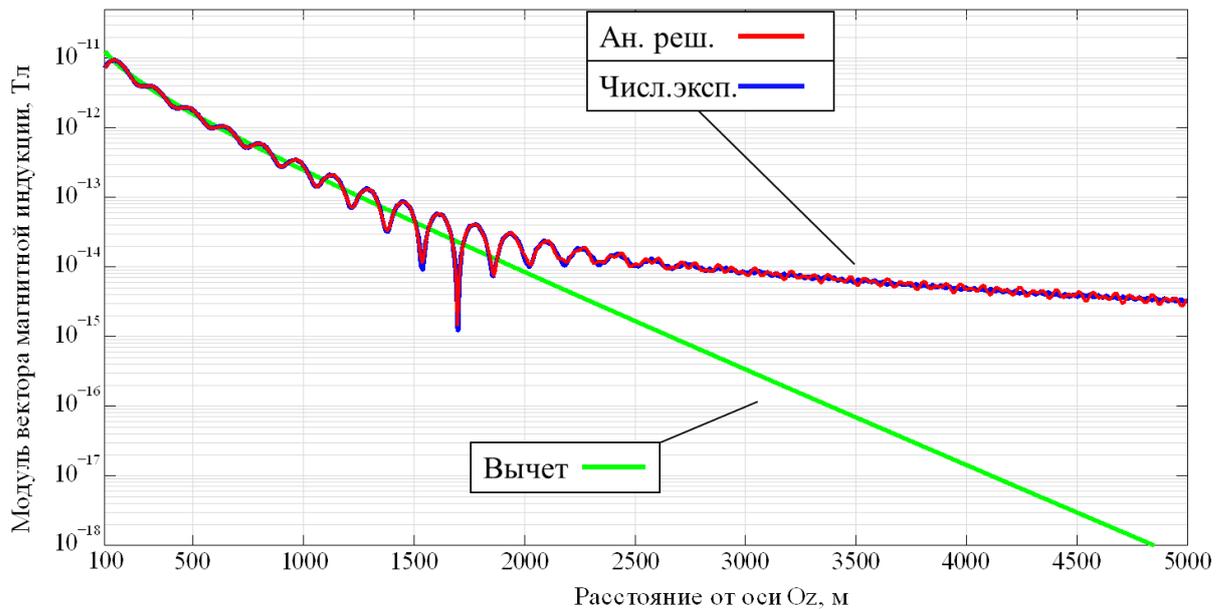


Рисунок 8.7 График зависимости модуля угловой компоненты вектора магнитной индукции на границе раздела сред от расстояния до оси Oz

Учитывая затухание поверхности волны, можно сделать вывод о том, что при достаточно малых расстояниях от источника возбуждения поверхностная волна превалирует над объёмной волной. Далее с увеличением расстояния от излучателя амплитуды поверхностной и объёмной волн становятся одного порядка. На достаточно больших расстояниях поверхностная волна затухает и её вкладом по сравнению с объёмной волной можно пренебречь. Об этом свидетельствуют контурный график модуля напряжённости электрического поля (рис. 8.8), а также индикатрисы рассеяния на расстоянии 400 (рис. 8.9) и 800 (рис. 8.10) метров от источника.

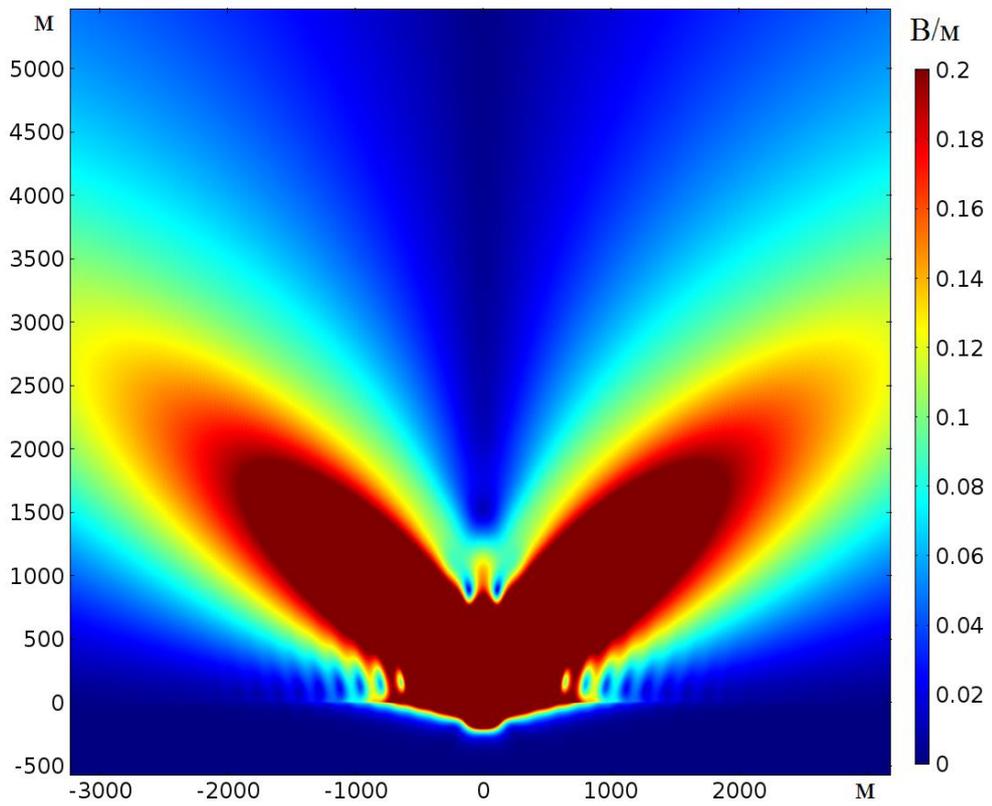


Рисунок 8.8 Контурный график модуля вектора напряжённости электрического поля

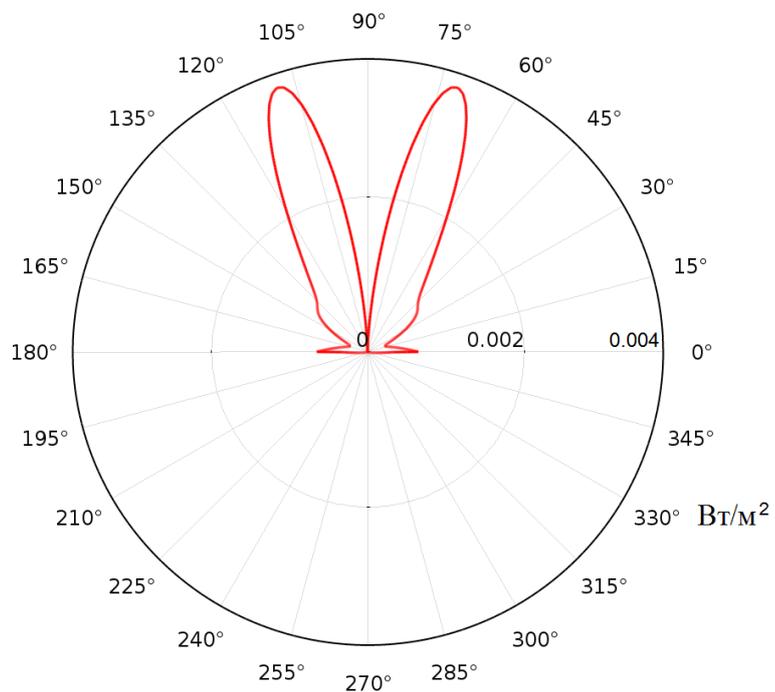


Рисунок 8.9 Индикатриса потока энергии на расстоянии 400 метров от излучателя

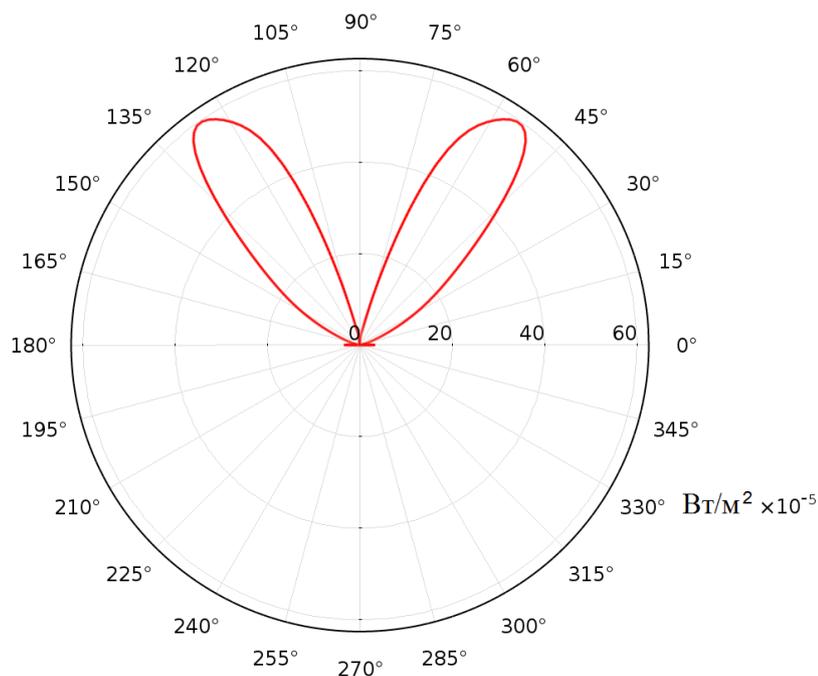


Рисунок 8.10 Индикатриса потока энергии на расстоянии 400 метров от излучателя

Отношение амплитуд поверхностной и объёмной волн сильно зависит от характеристик сред, а также от того, в какой из сред находится излучатель. В том случае, когда излучатель находится в вакууме над средой с конечной проводимостью, объёмная волна при излучении не затухает и её амплитуда, как правило, становится на порядки больше амплитуды поверхностной волны. Этим объясняется противоречивость экспериментальных данных: для проведения измерений характеристик поверхностной волны необходимо тщательно подбирать условия эксперимента, таким образом, чтобы поверхностная волна превалировала над объёмной и выделялась почти в чистом виде.

ВЫВОДЫ

1) Основным результатом работы является решение проблемы о возбуждении поверхностной волны на границе раздела сред с произвольными электромагнитными характеристиками. Показано, что поверхностная волна возбуждается электрическим вертикальным диполем в случае, когда характеристики двух сред удовлетворяют следующему условию ((7.38), стр. 40):

$$\cos \left[\frac{1}{2} \arg \left(\frac{\hat{\xi}_{\text{II}}^2 (k_{\text{II}}^2 - k_{\text{I}}^2)}{\hat{\xi}_{\text{I}}^2 - \hat{\xi}_{\text{II}}^2} \right) \right] \times \cos \left[\frac{1}{2} \arg \left(\frac{\hat{\xi}_{\text{I}}^2 (k_{\text{II}}^2 - k_{\text{I}}^2)}{\hat{\xi}_{\text{I}}^2 - \hat{\xi}_{\text{II}}^2} \right) \right] < 0$$

где, $\hat{\xi}_{\text{I}}, \hat{\xi}_{\text{II}}$ - обобщенные диэлектрические проницаемости сред, $k_{\text{I}}, k_{\text{II}}$ - комплексные волновые числа в каждой из сред.

2) Найдено аналитическое выражение для поля поверхностной волны на границе раздела сред. Полученное обобщение решения задачи Зоммерфельда корректно описывает электромагнитные поля, как в дальней, так и в ближней зонах. Показано, что аналитическое выражение полностью совпадает с численным экспериментом.

3) Для проверки на принцип соответствия рассмотрен конкретный пример возбуждения поверхностной волны на границе раздела сред диэлектрик-метаматериал. Показано, что в этом случае поверхностная волна ярко выражена (отчётливо видна на графиках). Из выведенного общего условия существования поверхностной волны (7.38) следует хорошо известное из физики метаматериалов условие отрицательности произведения реальных частей диэлектрических проницаемостей двух сред.

4) Показано, что в случае, когда одна из сред обладает проводимостью 10^{-4} См/м, что характерно для грунта, а вторая является вакуумом, общее условие существования поверхностной волны (7.38) выполняется и поверхностная волна возбуждается. Результат подтверждается с помощью численного моделирования.

5) Показано, что отношение амплитуд поверхностной и объёмной волны сильно зависит от того, в какой из двух сред находится излучатель. В частности, если излучатель находится в диэлектрической среде над проводником, амплитуда поверхностной волны оказывается много меньше амплитуды объёмной из-за отражений от поверхности проводника.

6) Показано, что если хотя бы одна из сред обладает проводимостью, амплитуда поверхностной волны экспоненциально уменьшается в радиальном направлении (вдоль границы раздела). В таком случае поверхностная волна никак не проявляет себя на больших расстояниях от излучателя. По этой причине необходимо тщательно выбирать условия проведения эксперимента при измерении характеристик поверхностной волны, поскольку в зависимости от расстояния до излучателя может превалировать как поверхностная, так и объёмная волна.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании результатов, полученных в настоящей диссертации, можно сделать следующее заключение: нерешённый вопрос задачи Зоммерфельда - вопрос о возбуждении поверхностной волны - полностью разрешён. Проведено обобщение задачи для случая изотропных материальных сред с произвольными электромагнитными характеристиками. Таким образом, теоретическая часть задачи полностью завершена. Для полной проверки теории необходимо провести серию экспериментов по обнаружению поверхностных волн и измерению их характеристик.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гуляев, Ю.В. и др. // Радиотехника и электроника. -2015. - Т. 60. - №10.- С. 1051-1063.
2. Чантурия, В.А. и др. // Физико-технические проблемы обогащения полезных ископаемых. – 2001. - №4.- С. 95-106.
3. Чантурия, В.А. //Горный журнал. – 2005. - №12. -С. 56-64.
4. Isao Yoshimi et al. // Int. J. Mater. Eng. Resour. -2002. - Т.10. - №1, - С. 66–70.
5. Гуляев, Ю.В. и др. // Радиотехника и электроника. -2015. -Т. 60. -№10. -С. 1051-1063.
6. Вендик, И.Б. Вендик, О.Г. //Журнал технической физики. -2013, -Т.83. -№1. –С.3-28
7. Ключник, А.В. и др. // Физика твердого тела. -2003. –Т.45. -№. 9. –С. 1709-1712.
8. Майер, С.А. Плазмоника: теория и приложения. – М.- Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. – 296 с.
9. А. Н. Абрамов и др. // Журнал радиоэлектроники. 2015, №10
10. Галин, М. А. Ближнепольное СВЧ зондирование плоскостойких сред и трёхмерных объектов. Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук. Нижний Новгород, 2015. – 128 с.
11. Sommerfeld // A. Ann. der Phys. Leipzig. -1909. –Т.4.-№28 –С. 665-736
12. Зоммерфельд. А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. – М.: Издательство иностранной литературы, 1950. -457 с.
13. P.S.Epstein // Nation Academie of Sciences - 1947. –Т2. №7 – С.254
14. Н.Оtt, //Ann. der Phys., -1942, -Т.41. -С.443,
15. Weyl Н. //Ann. Physik. -1919. -Т. 60. -С. 481.
16. Фейнберг, Е. Л. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. М.: Наука. Физматлит, 1999. — 496 с.

17. V.d. Pol B. // *Jahr. drahtl. Telegr. u. Teleph.* -1931. -Т. 37. -С. 152-156.
18. Франк, Ф. Мизес, Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Ч. 2.—Л.-М.: ОНТИ, 1937. – 996 с.
19. R.K. Moore, W.E. Blair // *Journal of research of the National Bureau of Standards-D. Radio Propagation.* -1961. -Т. 65, -№.6.
20. Шевченко В.В. // *Радиотехника и электроника.* -1969, -Т.14. –С. 1768.
21. Barlow H. M., Cullen A. L. // *Proc. IEEE.* -1953. -Т.100. -С.329.
22. Шевченко В. В. Плавные переходы в открытых волноводах: введение в теорию. М.: Наука, 1969. -191с.
23. Кистович, Ю.В. Поверхностные электромагнитные волны Ценнека СВЧ диапазона на солёной воде. Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук. М: ВНИИ-ФТРИ, 1987. -120 с.
24. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988. -219 с.
25. Oliner A. // *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* -1984. –Т.32.-С 1022.
26. Марков, Г. Т. Чаплин, А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн 2-е изд. М.: Радио и связь, 1983 -106 с.
27. Байбаков В. И., и др. // *УФН.* -1989. –Т.157.-С 722.
28. Zhizhin G. N. // *et al. Solid State Commun.* -1984.-Т.51.-С 613.
29. Kukushkin A. V. // *Phys. Usp.-* 1993.-Т. 36. –С. 81.
30. Егоров В. А. Особенности распространения радиоволн вдоль залеженных трасс. Региональная X конф. по распространению радиоволн, СПб., 2004. -с. 95.
31. Дацко В. Н., Копылов А. А., «Зеркальная антенна поверхностных волн», Патент РФ № 46612, 2005.
32. Дацко В. Н., Копылов А. А., «Радиолокационная станция на поверхностных волнах», Патент РФ № 48075, 2005.
33. Дацко В. Н., Копылов А. А., «Система связи на поверхностной волне», Патент РФ № 75375, 2006.

34. Дацко В. Н., Копылов А. А., «Линия передачи поверхностных волн», Патент РФ № 62294, 2006.
35. Кукушкин А. В. // УФН. -2009.-Т179.-№ 7.- С. 801.
36. Дацко В. Н. // УФН. -2008. –Т.178. -№1. -С. 109.
37. Вайнштейн Л.А. Теория дифракции. Электроника СВЧ. М.: Радио и связь, 1995. -600 с.
38. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. - М.: Радио и связь, 1983. -296 с.
39. Кинг Р., Смит Г. Антенны в материальных средах: В 2-х книгах. Кн. 1. Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. -824 .
40. Фейнберг Е.Л. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. – 2-е изд. – М.: Наука. Физматлит, 1999. -496 с.
41. Матвеев, А.Н. Оптика М.: Высш. шк., 1985.-351 с.
42. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. Пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. II. Теория поля. - 9-е изд., стереотип. - М.: Физматлит, 2016. - 508 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Уравнение Гельмгольца в декартовой системе координат выглядит следующим образом:

$$\Delta u + k^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0 \quad (\text{П1.1})$$

Перейдём в цилиндрическую систему координат. Тогда, расписывая лапласиан в цилиндрических координатах, получим:

$$\Delta u + k^2 u = \Delta u + k^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial u}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + k^2 u = 0 \quad (\text{П1.2})$$

Пусть функция u не зависит от координаты ϕ , что равносильно её аксиальной симметрии относительно оси Oz . Таким образом, $u = u(r, z)$, $\frac{\partial u}{\partial \phi} = 0$ и уравнение (П1.2) упрощается:

$$\Delta u + k^2 u = \Delta u + k^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial u}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0 \quad (\text{П1.3})$$

Далее воспользуемся методом разделения переменных. Предположим, что функция $u(r, z)$ представима в виде произведения: $u(r, z) = R(r)Z(z)$ и, подставив её в таком виде в уравнение (П1.3), получим:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial RZ}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 RZ}{\partial z^2} + k^2 RZ = 0 \quad (\text{П1.4})$$

Разделив уравнение (П1.4) на RZ и перенеся константу k^2 и слагаемое, зависящее лишь от координаты z в правую часть, получим:

$$\frac{1}{Rr} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial R}{\partial r} \right] = - \frac{\partial^2 Z}{Z \partial z^2} - k^2 \quad (\text{П1.5})$$

Правая часть уравнения (П1.5) зависит только от переменной z , левая часть – лишь от координаты r . С другой стороны уравнение (П1.5) должно выполняться при любых значениях переменных r, z . Отсюда следует, что:

$$\frac{1}{Rr} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial R}{\partial r} \right] = -\frac{\partial^2 Z}{Z \partial z^2} - k^2 = -\zeta^2 \quad (\text{П1.6})$$

Здесь ζ - некоторая константа (собственное число), не зависящая ни от r , ни от z . Таким образом, уравнение (П1.6) разбивается на два - для определения функций $R(r), Z(z)$:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - (\lambda^2 - k^2)Z = 0 \quad (\text{П1.7})$$

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + \lambda^2 r^2 R = 0 \quad (\text{П1.8})$$

Уравнение (П1.7) представляет собой уравнение типа гармонического осциллятора, решением его является функция:

$$Z(z) = \text{Const} \cdot e^{\pm \sqrt{\lambda^2 - k^2} z} \quad (\text{П1.9})$$

Уравнение (3.12) сводится заменой $X = \zeta r$ к уравнению Бесселя нулевого порядка, поэтому:

$$R(r) = \text{Const}_1 B_0^{(1)}(\zeta r) + \text{Const}_2 B_0^{(2)}(\zeta r) \quad (\text{П1.10})$$

Здесь $B_0^{(1)}, B_0^{(2)}$ - любая пара линейно независимых функций, являющихся решением уравнения Бесселя нулевого порядка. Выберем в качестве $B_0^{(1)}$ функцию Бесселя нулевого порядка, а в качестве $B_0^{(2)}$ - функцию Неймана нулевого порядка. Поскольку функция Неймана при стремлении её аргумента к нулю неограниченно возрастает, то константу Const_2 в решении (3.14) необходимо положить равной нулю (иначе электромагнитные потенциалы при $r \rightarrow 0$ будут стремиться к бесконечности, что нефизично).

Итак, собственные функции уравнения Гельмгольца (П1.3) имеют вид:

$$u(r, z, \zeta) = J_0(\zeta r) e^{\pm \sqrt{\zeta^2 - k^2} z} \quad (\text{П1.11})$$

Поскольку собственное значение ζ изменяется непрерывно (т.е. имеет непрерывный спектр, т.к. $z \in (-\infty, 0)$ или $z \in (0, \infty)$), то общее решение уравнения Гельмгольца (П1.3) может быть представлено в виде интеграла (суперпозиции) по собственным функциям:

$$u(r, z) = \int_0^{+\infty} G(\zeta) J_0(\zeta r) e^{\pm \sqrt{\zeta^2 - k^2} z} d\zeta \quad (\text{П1.12})$$

В выражении (П1.12) функция $G(\zeta)$ играет роль амплитудного множителя собственной функции с собственным числом ζ . Функция $G(\zeta)$ не зависит от r и z , но может зависеть от некоторых параметров задачи (например, от обобщённых диэлектрических или магнитных проницаемостей $\hat{\epsilon}$, $\hat{\mu}$). Интегрирование выражения (П1.12) можно производить не с «0», а с « $-\infty$ », но это не даёт новых результатов, поскольку собственная функция $J_0(\zeta r) e^{\pm \sqrt{\zeta^2 - k^2} z}$ чётная по переменной ζ . Также можно производить интегрирование на комплексной плоскости по контуру, но, как окажется далее, для построения решения задачи дифракции, удобнее искать его в виде интеграла (П1.12), так как это позволяет пользоваться ортогональностью функций Бесселя.

Знак « \pm » в выражении (П1.12) вносит некоторую избыточность, поскольку величина, стоящая под корнем в общем случае комплексная, а корень квадратный от комплексного аргумента является двузначной функцией, поэтому выражение (П1.12) можно переписать в виде:

$$u(r, z) = \int_0^{+\infty} G(\zeta) J_0(\zeta r) e^{-\sqrt{\zeta^2 - k^2} z} d\zeta \quad (\text{П1.13})$$

Однако в выражении (П1.13) также присутствует неоднозначность, так как квадратный корень из комплексного аргумента является двузначной

функцией. Следовательно, необходимо выбрать одну ветвь этой двузначной функции. Выбор определяется сходимостью интеграла (П1.13) и осуществляется следующим образом. При $z > 0$ выбирается ветвь, реальная часть корня которой $\operatorname{Re}(\sqrt{\zeta^2 - k^2})$ положительна, при $z < 0$ – та, ветвь реальная часть корня которой отрицательна. (Иначе при $\zeta \rightarrow +\infty$ подынтегральное выражение неограниченно возрастает). Эти два случая можно обобщить, записав:

$$u(r, z) = \int_0^{+\infty} G(\zeta) J_0(\zeta r) e^{-\sqrt{\zeta^2 - k^2} |z|} d\zeta, \quad (\text{П1.14})$$

при этом необходимо всегда брать ту ветвь корня квадратного, у которой $\operatorname{Re}(\sqrt{\zeta^2 - k^2}) > 0$. В дальнейшем будем использовать выражение (П1.14).

Решим ещё одну очень важную задачу. Разложим функцию

$$g(r, z) = \frac{e^{ik\sqrt{r^2 + z^2}}}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (\text{П1.15})$$

в интеграл по собственным функциям задачи:

$$g(r, z) = \frac{e^{ik\sqrt{r^2 + z^2}}}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \int_0^{+\infty} G(\zeta) J_0(\zeta r) e^{-\sqrt{\zeta^2 - k^2} |z|} d\zeta \quad (\text{П1.16})$$

Задача состоит в определении функции $G(\zeta)$. Для этого воспользуемся свойством ортогональности функции Бесселя:

$$\int_0^{+\infty} J_0(\zeta_1 r) J_0(\zeta_2 r) r dr = \frac{\delta(\zeta_1 - \zeta_2)}{\sqrt{\zeta_1 \zeta_2}} \quad (\text{П1.17})$$

Умножим равенство (П1.16) на $J_0(\zeta' r) r$ и проинтегрируем по dr от «0» до « $+\infty$ »:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{ik\sqrt{r^2 + z^2}}}{\sqrt{r^2 + z^2}} J_0(\zeta' r) r dr = \int_0^{+\infty} J_0(\zeta' r) r \left\{ \int_0^{+\infty} G(\zeta) J_0(\zeta r) e^{-\sqrt{\zeta^2 - k^2} |z|} d\zeta \right\} dr \quad (\text{П1.18})$$

В правой части выражения (П1.18) изменим порядок интегрирования и воспользуемся свойством ортогональности функций Бесселя (П1.17).

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{ik\sqrt{r^2+z^2}}}{\sqrt{r^2+z^2}} J_0(\lambda'r) r dr = \int_0^{+\infty} G(\zeta) e^{-\sqrt{\zeta^2-k^2}|z|} \left\{ \int_0^{+\infty} J_0(\zeta r) J_0(\zeta' r) r dr \right\} d\zeta = G(\zeta) e^{-\sqrt{\zeta^2-k^2}|z|} / \zeta' \Rightarrow$$

$$G(\zeta) = \zeta e^{\sqrt{\zeta^2-k^2}|z|} \times \int_0^{+\infty} \frac{e^{ik\sqrt{r^2+z^2}}}{\sqrt{r^2+z^2}} J_0(\zeta r) r dr \quad (\text{П1.19})$$

Заметим, что в левой части (П1.19) функция $G = G(\zeta)$ не зависит от z , поэтому выражение, находящееся в правой части равенства (П1.19) также не зависит от z . Следовательно, в выражении (П1.19) z можно положить любым числом, наиболее удобным из которых для вычисления интеграла в (П1.19), является ноль. В результате получим:

$$G(\zeta) = \zeta \times \int_0^{+\infty} e^{ikr} J_0(\zeta r) dr = \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - k^2}}$$

(П1.20)

Интеграл в (П1.20) является табличным.

В итоге получаем:

$$g(r, z) = \frac{e^{ik\sqrt{r^2+z^2}}}{\sqrt{r^2+z^2}} = \int_0^{+\infty} J_0(\zeta r) e^{-\sqrt{\zeta^2-k^2}|z|} \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - k^2}} d\zeta \quad (\text{П1.21})$$