

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени
М.В.ЛОМОНОСОВА»
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

**«ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИСТОЧНИКА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ПО
ИЗВЕСТНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ ПОТЕНЦИАЛА В ЗАДАННЫХ ТОЧКАХ
ПРОСТРАНСТВА»**

Выполнил студент
405 группы
Стока Георгий Павлович

подпись студента

Научный руководитель
к.ф.-м.н. Русакова Н.Е.

подпись научного руководителя

Консультант
д.ф.-м.н. проф. Поляков П.А.

подпись консультанта

Допущена к защите

Зав. кафедрой д.ф.-м.н. проф. Салецкий А.М.

подпись зав. кафедрой

Москва

2016 год

Оглавление

Введение.....	3
Глава 1. Решение задачи электрической локации.....	7
1.1. Решение задачи электрической локации в двумерном случае	7
1.2. Решение задачи электрической локации в трехмерном случае.....	13
1.3. Экспериментальная реализация задачи электрической локации	21
Глава 2. Задача электростатики заряженного проводящего тела	24
2.1. Нахождение безразмерного радиус-вектора	27
2.2. Нахождение безразмерной поверхностной плотности заряда	33
Заключение	36
Приложение 1. Решение кубических уравнений с помощью формулы Кардано.....	37
Список используемых источников.....	38

Введение

Определение положения и характеристик источников электрического поля по известным значениям электрического поля в некоторых точках или ограниченной области пространства называется обратной задачей электродинамики [1-5]. Такие задачи играют важную роль во многих областях естествознания, таких как физика, астрономия, медицина, компьютерная томография и др., так как они охватывают очень широкий круг явлений [6-9].

Обратные задачи электродинамики делятся на два класса. Задачи первого класса называются задачами пассивной локации, в которых характеристики объекта определяются по его электромагнитному излучению. Задачи второго класса – это задачи активной локации, в которых характеристики объекта определяются по отраженному излучению. В простейшем случае, под локацией подразумевают задачу определения местоположения источника поля и величины его заряда. Такие задачи были поставлены и успешно решены в работах [10-11], где определялись траектории движения летательных аппаратов на основе регистрации создаваемого ими электрического поля. Другим примером обратных задач могут послужить проблемы геофизики при разведке полезных ископаемых. Так, в работе [12] исследуются электрические поля, создаваемые полезными ископаемыми, по которым определяются форма и глубина их залегания. Земная кора сложена из различных горных пород, которые состоят из минералов. Под действием внешней среды кристаллическая решетка минерала искажается и деформируется, в результате чего возникает электрическое поле [13]. Также бесконтактная регистрация электрических полей может использоваться для определения местоположения очагов самовозгорания угля [14]. Очаги самонагревания угля могут образовываться по причинам низкотемпературного окисления из-за движения воздуха через

трещины, действия тионовых бактерий, сочетания геомеханических и аэрологических факторов и др. [15-17]. Наличие электрического заряда внутри породы играет большую роль в образовании области самовозгорания угля, а значит, область самовозгорания можно определить, измеряя потенциал электрического поля на поверхности [18].

Обратные задачи электродинамики актуальны в области твердотельной микроэлектроники, электротехники, геофизики и др. К примеру, одной из важных задач твердотельной микроэлектроники является нахождение распределения заряда по поверхности проводника. Существует множество устройств, где эта задача может найти широкое применение. Одним из типов таких устройств являются элементы памяти на основе полевых транзисторов с плавающим затвором (флэш-память). Основными элементами транзистора являются плавающий затвор, сток и исток.

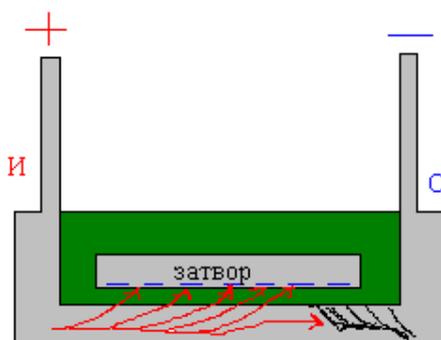


Рисунок 1. Схема транзистора. И — исток. С — сток

Между стоком и истоком подается достаточно высокое напряжение, и по каналу исток-сток протекает электрический ток. Слой диэлектрика, отделяющий затвор от канала настолько тонкий, что между каналом и затвором может возникнуть туннельный ток, вследствие чего заряды осаждаются на затворе. Эти заряды влияют на проводимость канала, создавая собственное электрическое поле. Таким образом, зная распределение заряда на затворах транзисторов можно воссоздать информацию, записанную на флэш-памяти. Основная проблема заключается в том, что зафиксировать

поля микроустройств практически невозможно из-за чрезвычайно малых размеров устройств и возможности легко разрядить систему транзисторов, вследствие чего память нарушится. Данная задача требует создания метода для определения положения заряда и его величины.

В более сложном случае задача локации состоит в определении формы источника и нахождении его свойств, например исследовании поверхностной плотности заряда проводящего тела [19-20]. Большой интерес представляет решение обратной задачи для электрического поля, созданного точечным зарядом. В работах [21-22] по известным выражениям для полей было найдено решение обратной задачи для поля точечного заряда, а также для дипольного электрического и магнитного моментов. Однако в последнее время возникают задачи, в которых необходимо определить положение заряда, заведомо не зная распределения в пространстве создаваемого им электрического поля.

В широком ряде задач можно учесть, что расстояние от наблюдателя до заряженного объекта значительно больше размеров самого объекта. В таком случае заряженное тело можно считать точечным. Однако вблизи заряженных объектов этим условием пользоваться нельзя. Поэтому во второй части данной работы рассматривается форма проводящей фигуры и распределение электрического заряда по ее поверхности. Данная задача имеет ряд известных аналитических решений, которыми являются проводящий эллипсоид и его частные случаи [23-26]. В работе [27] представлено решение этой задачи для двух пересекающихся сферических поверхностей. Также существуют значимые решения для равномерно заряженного кольца эллиптической формы [28], двух проводящих сфер [29], равномерно заряженных квадратной и прямоугольной площадок [30-31]. В работе [32] был представлен новый класс проводящих поверхностей вращения, для которых возможно точное решение задачи электростатики для

нахождения распределения заряда по поверхности проводника по заданному значению потенциала.

С учетом выше изложенного, в рамках данной бакалаврской работы решались две основные задачи:

- Создание способа для определения положения заряда и его величины по известным значениям его потенциала в нескольких точках пространства в двумерном и трехмерном случаях (решение задачи электрической локации для точечного источника электрического поля).
- Получение нового аналитического решения задачи Дирихле для поверхностного распределения заряда и формы проводящего тела при известном значении электростатического потенциала на его поверхности.

Глава 1. Решение задачи электрической локации

В самом общем случае, для того, чтобы точно определить значение заряда и координат тела, необходимо знать распределение потенциала электрического поля во всех точках пространства. Тогда в соответствии с уравнениями Максвелла можно точно определить положение и величину заряда источников электрического поля. Однако на практике это невозможно, поэтому мы приняли решение ограничиться конечным числом точек, в которых известен потенциал электрического поля, создаваемого заряженным телом. С помощью этого ограничения можно вычислить приближенные значения заряда и координат источника электрического поля. В рамках данной задачи мы будем считать источник точечным с зарядом q , что вполне оправдано, если расстояние от источника до точек с известным потенциалом много больше расстояния между этими точками.

1.1. Решение задачи электрической локации в двумерном случае

Поскольку при решении задачи в двумерном случае существуют три неизвестные величины — заряд и две координаты, — рассмотрим самый простой случай, когда известны значения потенциала электрического поля в трех точках. Пусть эти точки расположены на взаимно перпендикулярных прямых, как показано на рисунке 2.

Целью решения данной задачи является определение заряда и местоположения точечного заряженного тела при известных значениях потенциала электрического поля, создаваемого этим телом, в трех различных точках (при проведении экспериментальных измерений можно расположить в этих точках датчики электрического поля).

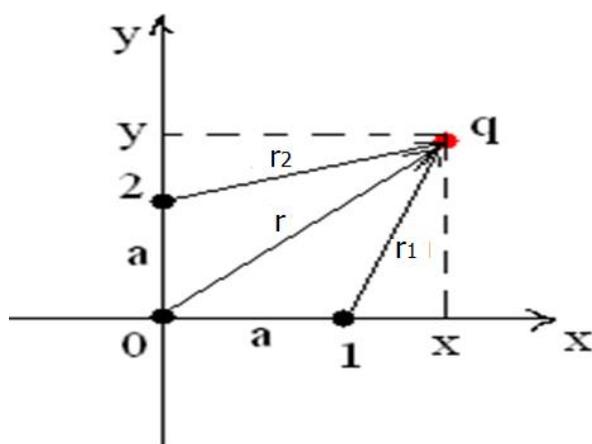


Рисунок 2. Схема расположения заряда и точек с известным потенциалом в двумерном случае

Пусть для определенности мы имеем положительный заряд q . Тогда и значения потенциалов электрического поля в известных точках будут положительными. Запишем известные нам потенциалы электрического поля в точках 0, 1 и 2:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = k \frac{q}{r} = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \varphi_1 = k \frac{q}{r_1} = \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} \\ \varphi_2 = k \frac{q}{r_2} = \frac{q}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2}} \end{array} \right. \quad (1)$$

где φ_0 , φ_1 , φ_2 — значения потенциала электрического поля в точках 0, 1 и 2 соответственно, q — заряд источника электрического поля, a — расстояние между точками с известными потенциалами, x , y и z — координаты источника электрического поля.

Из системы уравнений (1) можно получить следующие выражения для координат источника:

$$\begin{cases} x = \frac{a^2 - k^2 q^2 \left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)}{2a} \\ y = \frac{a^2 - k^2 q^2 \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)}{2a} \end{cases} \quad (2)$$

Из системы уравнений (1) можно получить следующее уравнение для заряда источника электрического поля:

$$k^4 \left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right] q^4 - 2k^2 a^2 \left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} \right] q^2 + 2a^4 = 0 \quad (3)$$

Данное уравнение является биквадратным относительно q . Вычислим дискриминант этого уравнения:

$$\frac{D}{4} = k^4 a^4 \left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} \right]^2 - 2k^4 a^4 \left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right] \quad (4)$$

Подставив в (4) уравнения системы (1), получим следующий вид дискриминанта:

$$\frac{D}{4} = \frac{4a^4}{q^4} [x^2 + y^2 - a(x + y)]^2 \quad (5)$$

Видно, что дискриминант уравнения (3) всегда неотрицателен. Следовательно, уравнение всегда имеет минимум одно решение. Уравнение (5) можно привести к следующему виду:

$$\sqrt{\frac{D}{4}} = \frac{2a^2}{q^2} |x^2 + y^2 - a(x + y)| \quad (6)$$

Тогда решения уравнения (3) будут представлять собой следующий вид:

$$q^2 = \frac{a^2 \left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} \right] \pm \sqrt{\left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} \right]^2 - 2 \left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]}{\left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]} \quad (7)$$

Оба этих решения положительны. Однако решение данной задачи должно быть единственным. Для того, чтобы найти единственное решение данной задачи, подставим уравнения системы (1) и уравнение (6) в решение (7) и получим следующее тождество:

$$q^2 = q^2 \frac{x^2 + y^2 - a(x + y) + a^2 \pm |x^2 + y^2 - a(x + y)|}{a^2 + 2x^2 + 2y^2 - 2a(x + y)} \quad (8)$$

Проверим, при каком знаке перед модулем тождество будет выполняться. Для этого раскроем модуль в уравнении (8).

Пусть $x^2 + y^2 - a(x + y) \geq 0$, тогда

$$\left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{a}{2} \right)^2 \geq \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 \quad (9)$$

Выражение (9) показывает, что источник электрического поля находится снаружи круга с центром в точке $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right)$ и радиусом $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Тогда уравнение (8) преобразуется как:

$$q_+^2 = q^2 \quad (10)$$

$$q_-^2 = q^2 \frac{a^2}{a^2 + 2x^2 + 2y^2 - 2a(x + y)} \neq q^2 \quad (11)$$

Значит, в этой области нужно выбрать знак «+» перед корнем в формуле (7).

Пусть теперь $x^2 + y^2 - a(x + y) < 0$, тогда

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 < \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad (12)$$

Выражение (12) показывает, что источник электрического поля находится внутри круга с центром в точке $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ и радиусом $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Тогда уравнение (8) преобразуется как:

$$q_+^2 = q^2 \frac{a^2}{a^2 + 2x^2 + 2y^2 - 2a(x+y)} \neq q^2 \quad (13)$$

$$q_-^2 = q^2 \quad (14)$$

Значит, в этой области нужно выбрать знак «-» перед корнем в формуле (7).

В итоге полученное решение запишется следующим образом:

Если $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$, то есть источник попадает в область вне изображенного на рисунке 3 круга, то формулы для определения его заряда и координат будут следующими:

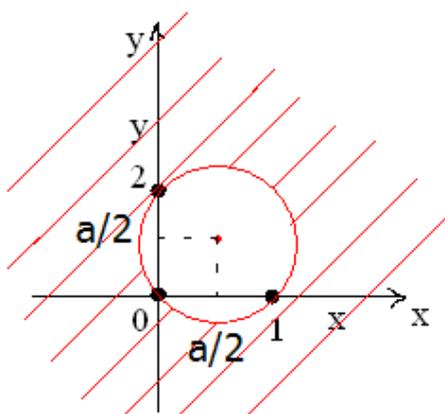


Рисунок 3. Область применения данного решения с условием (9)

$$q^2 = \frac{a^2 \left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} \right] + \sqrt{\left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} \right]^2 - 2 \left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]}}{k^2 \left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]} \quad (15)$$

$$x = \frac{a}{2} \left(1 - \left[\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right] \frac{\left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} \right] + \sqrt{\left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} \right]^2 - 2 \left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]}}{\left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]} \right) \quad (16)$$

$$y = \frac{a}{2} \left(1 - \left[\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right] \frac{\left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} \right] + \sqrt{\left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} \right]^2 - 2 \left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]}}{\left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]} \right) \quad (17)$$

Если $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 < \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$, то есть источник попадает в область внутри изображенного на рисунке 4 круга, то формулы для определения его заряда и координат будут следующими:

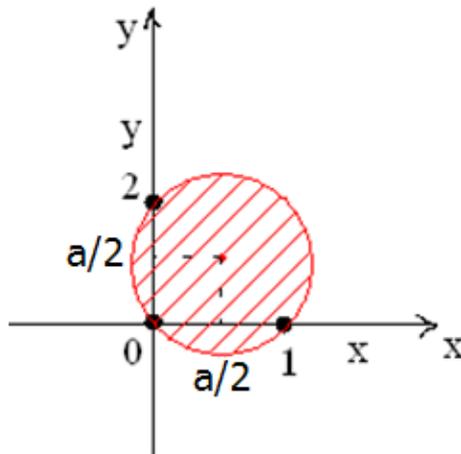


Рисунок 4. Область применения данного решения с условием (12)

$$q^2 = \frac{a^2 \left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} \right] - \sqrt{\left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} \right]^2 - 2 \left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]}}{k^2 \left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]} \quad (18)$$

$$x = \frac{a}{2} \left(1 - \left[\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right] \frac{\left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} \right] - \sqrt{\left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} \right]^2 - 2 \left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]}}{\left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]} \right) \quad (19)$$

$$y = \frac{a}{2} \left(1 - \left[\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right] \frac{\left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} \right] - \sqrt{\left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} \right]^2 - 2 \left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]}}{\left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]} \right) \quad (20)$$

Поскольку координаты точечного заряда x и y заведомо неизвестны и требуют определения, то возникает вопрос, какими формулами пользоваться (для условия (9) или (12)). Однако можно заметить, что окружность на рисунках 3 и 4 не заходит в третью четверть, в которой решение подчиняется условию (9). Таким образом, в частном случае, когда система точек, в которых известны значения потенциала электрического поля, и связанная с ней система координат ориентированы таким образом, что заряд находится в третьей координатной четверти, его координаты и величина однозначно определяются формулами (15)-(17). На практике часто известно приблизительное направление, в котором находится источник электрического поля, следовательно, возможно сориентировать систему датчиков как указано выше.

1.2. Решение задачи электрической локации в трехмерном случае

В трехмерном случае существуют четыре неизвестные величины — заряд и три координаты, — рассмотрим самый простой случай, когда известны значения потенциала электрического поля в четырех точках. Пусть

эти точки расположены на взаимно перпендикулярных прямых, как показано на рисунке 5.

Целью данной задачи является определение заряда и местоположения заряженного тела при известных значениях потенциала электрического поля, в четырех различных точках.

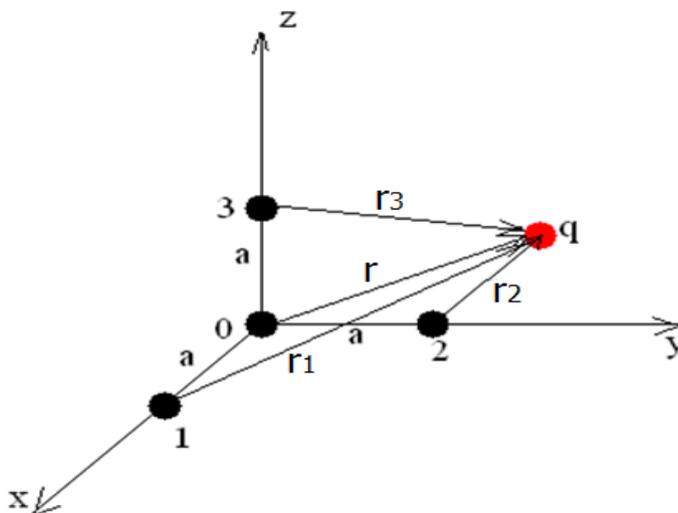


Рисунок 5. Схема расположения заряда и точек с известным потенциалом в трехмерном случае

Пусть для определенности мы имеем положительный заряд q . Тогда и значения потенциалов электрического поля в известных точках будут положительными. Запишем известные нам потенциалы электрического поля в точках 0, 1, 2 и 3:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = k \frac{q}{r} = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \varphi_1 = k \frac{q}{r_1} = \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} \\ \varphi_2 = k \frac{q}{r_2} = \frac{q}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2 + z^2}} \\ \varphi_3 = k \frac{q}{r_3} = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} \end{array} \right. \quad (21)$$

Из системы уравнений (21) можно получить следующие выражения для координат источника:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a^2 - k^2 q^2 \left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)}{2a} \\ y = \frac{a^2 - k^2 q^2 \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)}{2a} \\ z = \frac{a^2 - k^2 q^2 \left(\frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)}{2a} \end{array} \right. \quad (22)$$

При помощи некоторых преобразований, проделанных с системой уравнений (21), и используя уравнения системы (22), можно получить следующее уравнение для заряда источника электрического поля:

$$\begin{aligned} k^4 \left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right] q^4 - \\ - 2k^2 a^2 \left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} + \frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right] q^2 + 3a^4 = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Данное уравнение является биквадратным относительно q . Вычислим дискриминант этого уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} = k^4 a^4 \left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} + \frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right]^2 - \\ - 3a^4 \left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (24)$$

Проверим: всегда ли данный дискриминант неотрицателен. Для этого подставим в него уравнения системы (21) и получим:

$$\frac{D}{4} = \frac{4a^4}{q^4} [x^2 + y^2 + z^2 - a(x + y + z)]^2 \quad (25)$$

Таким образом, видно, что дискриминант уравнения (23) всегда неотрицателен. Уравнение (25) сводится к виду:

$$\sqrt{\frac{D}{4}} = \frac{2a^2}{q^2} |x^2 + y^2 - a(x + y + z)| \quad (26)$$

Тогда решения уравнения (23) будут представлять собой следующий вид:

$$\begin{aligned} q^2 = \frac{a^2}{k^2} \frac{\left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} + \frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right]}{\left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]^{\pm}} \pm \\ \pm \frac{a^2}{k^2} \sqrt{\frac{\left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} + \frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right] - 3 \left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]}{\left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]} \end{aligned} \quad (27)$$

Оба этих решения положительны. Однако, должно существовать единственное решение. Для того, чтобы найти единственное решение данной задачи, подставим уравнения системы (21) и уравнение (26) в решение (27) и получим следующее тождество:

$$q^2 = q^2 \frac{2(x^2 + y^2 + z^2) - 2a(x + y + z) + 3a^2 \pm 2|x^2 + y^2 - a(x + y)|}{3a^2 + 4(x^2 + y^2 + z^2) - 4a(x + y + z)} \quad (28)$$

Проверим, при каком знаке перед модулем тождество будет выполняться. Тогда раскроем модуль:

Пусть $x^2 + y^2 + z^2 - a(x + y + z) \geq 0$, тогда

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 \quad (29)$$

Выражение (29) показывает, что источник электрического поля находится снаружи сферической области с центром в точке $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ и радиусом $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Тогда уравнение (28) преобразуется как:

$$q_+^2 = q^2 \quad (30)$$

$$q_-^2 = q^2 \frac{3a^2}{3a^2 + 4(x^2 + y^2 + z^2) - 4a(x + y + z)} \neq q^2 \quad (31)$$

Значит, в этой области нужно выбрать знак «+» перед корнем в формуле (27).

Пусть теперь $x^2 + y^2 + z^2 - a(x + y + z) < 0$, тогда

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2 < \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 \quad (32)$$

Выражение (32) показывает, что источник электрического поля находится внутри сферической области с центром в точке $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ и радиусом $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Тогда уравнение (28) преобразуется как:

$$q_+^2 = q^2 \frac{3a^2}{3a^2 + 4(x^2 + y^2 + z^2) - 4a(x + y + z)} \neq q^2 \quad (33)$$

$$q_-^2 = q^2 \quad (34)$$

Значит, в этой области нужно выбрать знак «-» перед корнем в формуле (27).

В итоге полученное решение запишется следующим образом:

Если $(x - \frac{a}{2})^2 + (y - \frac{a}{2})^2 + (z - \frac{a}{2})^2 \geq (\frac{\sqrt{3}a}{2})^2$, то есть источник попадает в область вне изображенной на рисунке 6 сферы, то формулы для определения его заряда и координат будут следующими:

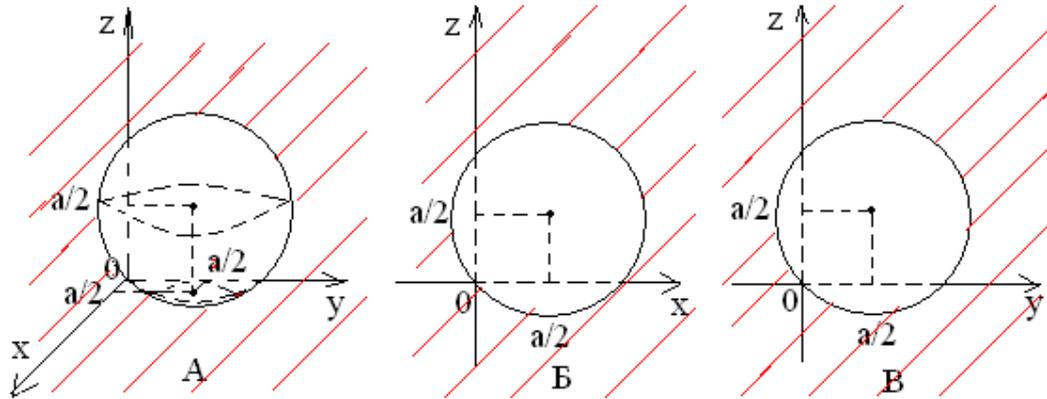


Рисунок 6. Область применения данного решения с условием (29): А - в 3d, Б - в разрезе OXZ, В - в разрезе OYZ

$$q^2 = \frac{a^2}{k^2} \frac{\left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} + \frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right]}{\left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]} + \frac{a^2}{k^2} \frac{\sqrt{\left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} + \frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right] - 3 \left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]}}{\left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]} \quad (35)$$

$$x = \frac{a}{2} \left(1 - \left[\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right] \left(\frac{\left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} + \frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right]}{\left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]} + \frac{\sqrt{\left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} + \frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right] - 3 \left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]}}{\left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]} \right) \right) \quad (36)$$

$$y = \frac{a}{2} \left(1 - \left[\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right] \left(\frac{\left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} + \frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right]}{\left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]} + \frac{\sqrt{\left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} + \frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right] - 3 \left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]}}{\left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]} \right) \right) \quad (37)$$

$$z = \frac{a}{2} \left(1 - \left[\frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right] \left(\frac{\left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} + \frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right]}{\left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]} + \frac{\sqrt{\left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} + \frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right] - 3 \left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]}}{\left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]} \right) \right) \quad (38)$$

Если $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2 < \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2$, то есть источник попадает в область внутри изображенной на рисунке 7 сферы, то формулы для определения его заряда и координат будут следующими:

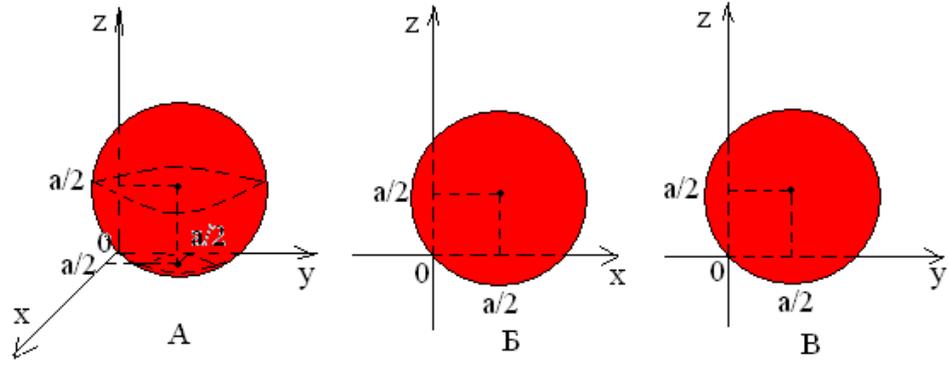


Рисунок 7. Область применения данного решения с условием (32): А - в 3d, Б - в разрезе OXZ, В - в разрезе OYZ

$$q^2 = \frac{a^2 \left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} + \frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right]}{k^2 \left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]} - \frac{a^2 \sqrt{\left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} + \frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right] - 3 \left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]}}{k^2 \left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]} \quad (39)$$

$$x = \frac{a}{2} \left(1 - \left[\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right] \left(\frac{\left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} + \frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right]}{\left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]} - \sqrt{\frac{\left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} + \frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right] - 3 \left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]}}{\left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]} \right) \right) \quad (40)$$

$$y = \frac{a}{2} \left(1 - \left[\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right] \left(\frac{\left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} + \frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right]}{\left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]} - \sqrt{\frac{\left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} + \frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right] - 3 \left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]}}{\left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]} \right) \right) \quad (41)$$

$$z = \frac{a}{2} \left(1 - \left[\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right] \left(\frac{\left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} + \frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right]}{\left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\sqrt{\left[\frac{1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\varphi_2^2} + \frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right] - 3 \left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]}}{\left[\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} \right)^2 \right]} \right) \right) \quad (42)$$

Аналогично двумерному случаю возникает неопределенность в выборе формул для определения заряда и координат источника. Однако можно заметить, что сфера на рисунках 6 и 7 не заходит в область, где x , y и z одновременно меньше нуля, в которой решение подчиняется условию (29). На практике часто известно приблизительное направление, в котором находится источник электрического поля, поэтому можно ориентировать оси координат так, чтобы точечный заряд находился в области, где x , y и $z < 0$, тогда его координаты и заряд однозначно определяются формулами (35)-(38).

1.3. Экспериментальная реализация задачи электрической локации

Для двумерного случая при расстоянии между точками с известным потенциалом $a=10$ см в нашей лаборатории был поставлен реальный эксперимент. Электрическое поле создавалось металлической сферой, на которую подавалось определенное напряжение. Потенциал электрического поля измерялся с помощью датчиков электрического поля. Погрешность измерения этих датчиков составляет порядка $\delta\varphi = 1\%$. Эксперимент проводился с тем условием, что источник электрического поля попадал в область, где выполняется условие (12). Таким образом, координаты источника рассчитывались по формулам (16)-(17). В результате полученные из расчетов значения координат отличались от реальных, заранее известных,

в среднем на 10 %. Теоретически рассчитанные погрешности при расчете координат источника определяются по следующим формулам:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi_0} \varphi_0\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi_1} \varphi_1\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi_2} \varphi_2\right)^2}}{x} \delta \varphi \quad (43)$$

$$\delta y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi_0} \varphi_0\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi_1} \varphi_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi_2} \varphi_2\right)^2}}{y} \delta \varphi \quad (44)$$

Здесь x и y определяются формулами (16)-(17). При $a=10$ см, $x = 60$ см, $y = 80$ см относительные погрешности определения координат, посчитанные по формулам (43)-(44), составляют $\delta x \approx \delta y \approx 7 \%$

В постановке многих задач электрической локации расстояние от источника электрического поля до точек с известными потенциалами много больше расстояния между этими точками. В этом случае, если бы можно было теоретически измерять потенциал электрического поля со сколь угодно малой точностью, то измерений в трех и четырех точках соответственно для двумерной и трехмерной задачи было бы достаточно. Но на практике точность измерения потенциала электрического поля — конечная величина, и ситуация намного усложняется и приводит к тому, что результаты вычислений координат будут очень чувствительны к точности измерений. Допустим, что мы измеряем потенциал с точностью $\delta \varphi$, тогда относительная погрешность определения координат источника приближенно будет выражаться следующей формулой

$$\delta r \sim \delta \varphi \frac{r}{a} \quad (45)$$

Оценим погрешность определения координат заряда. Пусть погрешность определения потенциала электрического поля составляет 1 %,

расстояние между точками с известным потенциалом $a=1$ см и расстояние от источника до центра системы координат $r=1$ м. Тогда согласно формуле (45) погрешность определения координат будет приблизительно равна 100 %.

Глава 2. Задача электростатики заряженного проводящего тела

При измерении потенциала электрического поля заряженного тела его можно считать эквивалентным точечному заряду только на больших по сравнению с размерами данного тела расстояниях. Вблизи реальных проводящих тел электрическое поле определяется формой тела и распределением заряда по его поверхности. Расчет формы и распределения заряда является чрезвычайно сложной задачей, которая сводится к решению аналитического уравнения с соответствующим граничным условием. Пусть мы имеем некоторое заряженное проводящее тело. Рассмотрим уравнение Пуассона [33]:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (46)$$

В области пространства вокруг тела, где нет плотности свободного заряда, имеем:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (47)$$

Уравнение (47) называется уравнением Лапласа.

Пусть данное заряженное проводящее тело ограничено поверхностью Σ , и мы знаем потенциал на этой поверхности

$$\varphi_{\Sigma} = \varphi \quad (48)$$

Тогда существует единственное решение уравнения (47), которое представимо в виде следующей линейной комбинации функций [34]:

$$\varphi = k \sum_{i=0}^N a_i \frac{P_i(\cos\theta)}{r^{i+1}}, \quad (49)$$

где a_i — некоторые коэффициенты, $P_i(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра порядка i , $r = r(\theta)$ — радиус-вектор, проведенный из начала координат к

точкам поверхности. Разложение потенциала по сферическим функциям (49) также имело место в работе [35].

Рассмотрим теперь поверхность проводника. Согласно теореме Гаусса

$$\Phi_E = \frac{q_{\text{п}}}{\varepsilon_0} \quad (50)$$

$$\Phi_E = \oint_S E dS \quad (51)$$

Тогда получим следующее выражение для напряженности электрического поля:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad (52)$$

где $q_{\text{п}}$ — заряд на поверхности проводника площадью S , \vec{E} — напряженность электрического поля на поверхности проводника, Φ_E — поток вектора напряженности через замкнутую поверхность площадью S , ε_0 — диэлектрическая постоянная.

Как известно:

$$\vec{E} = -grad\varphi = -\nabla\varphi \Rightarrow E = |-\nabla\varphi| \quad (53)$$

В сферических координатах оператор ∇ выглядит следующим образом:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \vec{e}_\varphi \quad (54)$$

Из соотношений (52) и (53) можно получить, что

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = |-\nabla\varphi| \quad (55)$$

Для удобства введем безразмерные величины.

Рассмотрим проводящую сферу радиусом r_0 с поверхностным зарядом q_0 . Тогда потенциал на ее поверхности и поверхностная плотность заряда будут выражаться следующими формулами:

$$\varphi_0 = k \frac{q_0}{r_0} \quad (56)$$

$$\sigma_0 = \frac{q_0}{4\pi r_0^2} \quad (57)$$

Введем следующие безразмерные величины:

$$\text{безразмерный радиус-вектор} \quad \xi = \frac{r}{r_0} > 0 \quad (58)$$

$$\text{безразмерный потенциал на границе проводника} \quad \psi = \frac{\varphi}{\varphi_0} > 0 \quad (59)$$

$$\text{безразмерная поверхностная плотность заряда} \quad \tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_0} > 0 \quad (60)$$

Как видно из формулы (49) потенциал на поверхности проводника φ_0 зависит только от полярного угла θ . Значит, и безразмерные величины ξ и $\tilde{\sigma}$ зависят лишь от полярного угла θ . Следовательно, поверхности, описываемые функциями $\xi = \xi(\theta), \sigma = \sigma(\theta)$ — являются фигурами вращения с осью вращения, совпадающей с осью z . Такой же случай был рассмотрен в работе [32].

Рассмотрим случай, когда первые три коэффициента a_0, a_1, a_2 не равны нулю. В этом случае уравнение (49) запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} \varphi = k \left(a_0 \frac{P_0(\cos \theta)}{r} \pm a_1 \frac{P_1(\cos \theta)}{r^2} \pm a_2 \frac{P_2(\cos \theta)}{r^3} \right) \\ P_0(\cos \theta) = 1 \\ P_1(\cos \theta) = \cos \theta \\ P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) \end{cases} \quad (61)$$

Первое уравнение данной системы является кубическим. Будем решать его методом Кардано [30] (см. Приложение).

2.1. Нахождение безразмерного радиус-вектора

Найдем безразмерный радиус вектор $\xi = \xi(\theta)$:

$$\varphi = k \left(a_0 \frac{1}{r} \pm a_1 \frac{\cos \theta}{r^2} \pm a_2 \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2r^3} \right) \quad (62)$$

Перейдем к безразмерному потенциалу, подставив формулы (58)-(60) в уравнение (62)

$$\psi = \frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{a_0 r_0}{q_0 r} \pm \frac{a_1 \cos \theta r_0^2}{q_0 r_0 r^2} \pm \frac{a_2 (3 \cos^2 \theta - 1) r_0^3}{q_0 r_0^3 2r^3} \quad (63)$$

Пусть

$$a_0 = q_0 \quad (64)$$

$$\frac{a_1}{q_0 r_0} = k_1 \quad (65)$$

$$\frac{a_2}{q_0 r_0^3} = k_2 \quad (66)$$

Тогда выражение для безразмерного потенциала примет следующий вид:

$$\psi = \frac{1}{\xi} \pm k_1 \frac{\cos\theta}{\xi^2} \pm k_2 \frac{3\cos^2\theta - 1}{2\xi^3} \quad (67)$$

После некоторых преобразований из данного уравнения можно получить следующее:

$$\xi^3 - \frac{1}{\psi}\xi^2 \mp \frac{k_1}{\psi}\cos\theta\xi \mp \frac{k_2}{\psi}\frac{(3\cos^2\theta - 1)}{2} = 0 \quad (68)$$

Выберем в этом уравнении знак «+» перед коэффициентами k_1 и k_2 . И пусть $k_1, k_2 > 0$. Тогда

$$\xi^3 - \frac{1}{\psi}\xi^2 + \frac{k_1}{\psi}\cos\theta\xi + \frac{k_2}{\psi}\frac{(3\cos^2\theta - 1)}{2} = 0 \quad (69)$$

Решим это уравнение по формуле Кардано:

$$A_2 = -\frac{1}{\psi}; A_1 = \frac{k_1}{\psi}\cos\theta; A_0 = \frac{k_2}{\psi}\frac{(3\cos^2\theta - 1)}{2} \quad (70)$$

$$q = \frac{1}{3}A_1 - \frac{1}{9}A_2^2 = \frac{1}{(3\psi)^2}(3k_1\psi\cos\theta - 1) \quad (71)$$

$$r = \frac{1}{6}(A_1A_2 - 3A_0) - \frac{1}{27}A_2^3 = \frac{1}{(3\psi)^2}\left(1 - \frac{9k_1\psi}{2}\cos\theta - \frac{27k_2\psi^2}{2}\frac{(3\cos^2\theta - 1)}{2}\right) \quad (72)$$

Для более просто вида введем следующие обозначения:

$$N_1(\theta) = 1 - 3k_1\psi\cos\theta \quad (73)$$

$$N_3(\theta) = 1 - \frac{9k_1\psi}{2}\cos\theta - \frac{27k_2\psi^2}{2}\frac{(3\cos^2\theta - 1)}{2} \quad (74)$$

Тогда

$$s_1 = \left(r + \sqrt{q^3 + r^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(N_3(\theta) + \sqrt{N_3^2(\theta) - N_1^3(\theta)}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (75)$$

$$s_2 = \left(r - \sqrt{q^3 + r^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(N_3(\theta) - \sqrt{N_3^2(\theta) - N_1^3(\theta)}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (76)$$

Воспользовавшись формулой Кардано для корней уравнения третьей степени, мы получим:

$$\xi = \frac{1}{3\psi} \left\{ 1 + \left(N_3(\theta) + \sqrt{N_3^2(\theta) - N_1^3(\theta)} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(N_3(\theta) - \sqrt{N_3^2(\theta) - N_1^3(\theta)} \right)^{\frac{1}{3}} \right\} \quad (77)$$

Функция, описываемая формулой (77), должна быть непрерывной и неотрицательной при любом значении θ , потому что она ограничивает некоторую поверхность.

Рассмотрим три случая подкоренного выражения:

1) $N_3^2(\theta) - N_1^3(\theta) > 0$ и существует один корень

$$\xi = \frac{1}{3\psi} \left\{ 1 + \left(N_3(\theta) + \sqrt{N_3^2(\theta) - N_1^3(\theta)} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(N_3(\theta) - \sqrt{N_3^2(\theta) - N_1^3(\theta)} \right)^{\frac{1}{3}} \right\} \quad (78)$$

В зависимости от θ это решение будет принимать как положительные, так и отрицательные значения. Нам же нужно, чтобы при любом значении θ решение было неотрицательным. Значит, этот случай нас не удовлетворяет.

2) $N_3^2(\theta) - N_1^3(\theta) = 0$, тогда

Случай а)

$$N_3(\theta) = N_1^{\frac{2}{3}}(\theta) = (1 - 3k_1\psi\cos\theta)^{\frac{2}{3}} \quad (79)$$

Тогда

$$\xi = \frac{1}{3\psi} \{ 1 + 2\sqrt{1 - 3k_1\psi\cos\theta} \} \quad (80)$$

Запишем условие, при котором $\xi > 0$ при любом значении θ :

$$k_1\psi \leq \frac{1}{3} \quad (81)$$

Случай б)

$$N_3(\theta) = -N_1^{\frac{2}{3}}(\theta) = -(1 - 3k_1\psi\cos\theta)^{\frac{2}{3}} \quad (82)$$

Тогда

$$\xi = \frac{1}{3\psi} \{1 - 2\sqrt{1 - 3k_1\psi\cos\theta}\} \quad (83)$$

В этом случае существует $\theta = \pi/2$, при котором $\xi < 0 \Rightarrow$ этот случай нас не удовлетворяет.

Таким образом, при $N_3^2(\theta) - N_1^3(\theta) = 0$ нас удовлетворяет случай а).

3) $N_3^2(\theta) - N_1^3(\theta) < 0$ и существует три корня

$$\xi = \frac{1}{3\psi} \left\{ 1 + \left(N_3(\theta) + i\sqrt{N_1^3(\theta) - N_3^2(\theta)} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(N_3(\theta) - i\sqrt{N_1^3(\theta) - N_3^2(\theta)} \right)^{\frac{1}{3}} \right\} \quad (84)$$

Рассмотрим выражения:

$$\left(N_3(\theta) + i\sqrt{N_1^3(\theta) - N_3^2(\theta)} \right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt{N_1(\theta)} e^{i\left(\frac{\Phi+2\pi n}{3}\right)} \quad (85)$$

$$\left(N_3(\theta) - i\sqrt{N_1^3(\theta) - N_3^2(\theta)} \right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt{N_1(\theta)} e^{-i\left(\frac{\Phi+2\pi n}{3}\right)} \quad (86)$$

В этих формулах Φ определяется следующим выражением:

$$tg\Phi = \frac{\sqrt{N_1^3(\theta) - N_3^2(\theta)}}{N_3(\theta)} ; 0 \leq \Phi < \frac{\pi}{2} \quad (87)$$

Тогда с учетом уравнений (87) и (88) решение (86) примет следующий вид:

$$\xi = \frac{1}{3\psi} \left\{ 1 + 2\sqrt{N_1(\theta)} \cos\left(\frac{\Phi + 2\pi n}{3}\right) \right\} \quad (88)$$

При $n=0, n=1, n=2$ мы получим разные решения, далее при увеличении n решения будут повторяться. Надо выбрать только одно из трех различных решений, поскольку решение единственно. Рассмотрим эти решения:

1) n=0

$$\xi = \frac{1}{3\psi} \left\{ 1 + 2\sqrt{N_1(\theta)} \cos\left(\frac{\Phi}{3}\right) \right\} \quad (89)$$

В этом случае $\xi > 0$ при любых θ и $\varphi(\theta)$, но при условии (83)

2) n=1

$$\xi = \frac{1}{3\psi} \left\{ 1 + 2\sqrt{N_1(\theta)} \cos\left(\frac{\Phi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \right\} = \frac{1}{3\psi} \left\{ 1 - 2\sqrt{N_1(\theta)} \sin\left(\frac{\Phi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) \right\} \quad (90)$$

Данное решение может принимать отрицательные значения при некоторых θ , поэтому оно нас не удовлетворяет.

3) n=2

$$\xi = \frac{1}{3\psi} \left\{ 1 + 2\sqrt{N_1(\theta)} \cos\left(\frac{\Phi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) \right\} = \frac{1}{3\psi} \left\{ 1 - 2\sqrt{N_1(\theta)} \sin\left(\frac{\Phi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \right\} \quad (91)$$

Данное решение может принимать отрицательные значения при некоторых θ , поэтому оно нас не удовлетворяет.

В итоге решение запишется в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{1}{3\psi} \left(1 + 2\sqrt{N_1(\theta)} \cos(\Phi/3) \right) \\ \operatorname{tg}\Phi = \frac{\sqrt{N_1^3(\theta) - N_3^2(\theta)}}{N_3(\theta)} \\ N_1(\theta) = 1 - 3k_1\psi \cos\theta \\ N_3(\theta) = 1 - \frac{9k_1\psi}{2} \cos\theta - \frac{27k_2\psi^2}{2} \frac{(3\cos^2\theta - 1)}{2} \end{array} \right. \quad (92)$$

$$N_1^3(\theta) - N_3^2(\theta) \geq 0 \text{ для } \forall\theta, \quad k_1\psi \in \left(0; \frac{1}{3} \right] \quad (93)$$

Найти точное аналитическое ограничение на параметр $k_2\psi^2$ не удалось. Однако получилось подобрать два набора коэффициентов, при которых система (92) описывает замкнутую фигуру вращения.

Первая фигура, ограниченная поверхностью (92), представлена на рисунках ниже при следующих коэффициентах

$$\psi = 0.6, k_1 = 0.3, k_2 = 0.15 \quad (94)$$

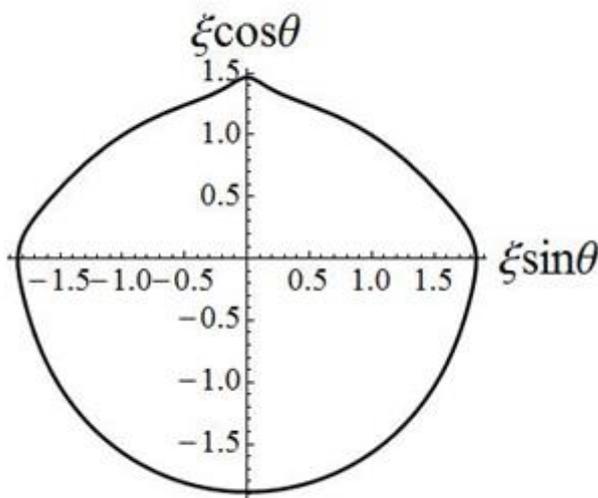


Рисунок 8. Первая фигура в разрезе

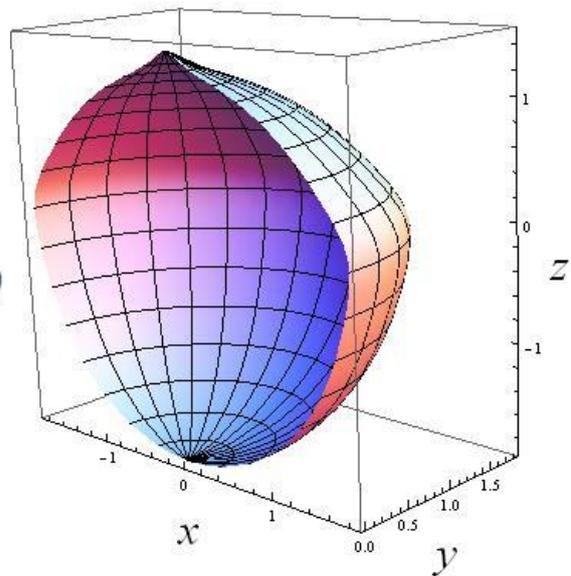


Рисунок 9. Первая фигура в 3d

Вторая фигура, ограниченная поверхностью (92), представлена на рисунках ниже при следующих коэффициентах:

$$\psi = 0.5, k_1 = 0.3, k_2 = 0.25 \quad (95)$$

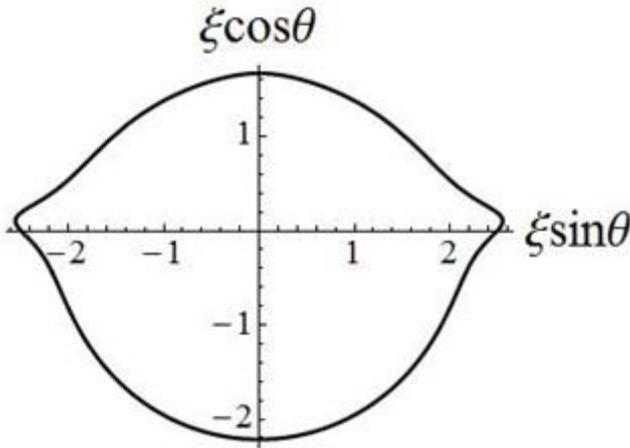


Рисунок 10. Вторая фигура в разрезе

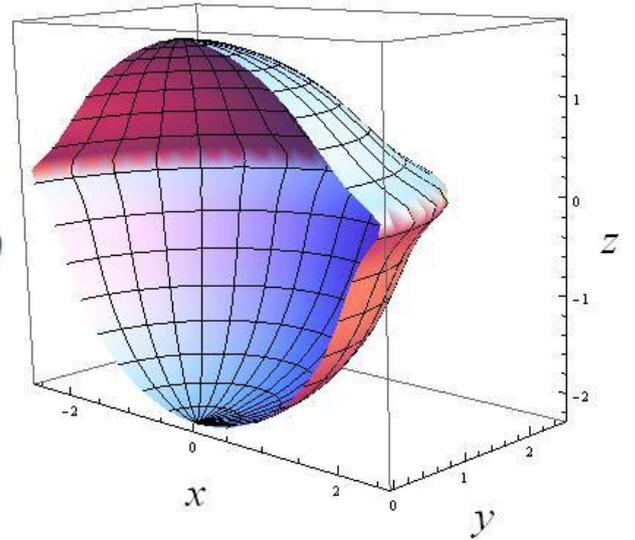


Рисунок 11. Вторая фигура в 3d

2.2. Нахождение безразмерной поверхностной плотности заряда

Найдем безразмерную поверхностную плотность заряда $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(\theta)$:

В этом случае

$$\begin{aligned} \nabla(\varphi) = k \left[-\frac{a_0}{r^2} - \frac{2a_1 \cos\theta}{r^3} - \frac{3a_2}{r^4} \left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2} \right) \right] \vec{e}_r + \\ + k \left[-\frac{a_1 \sin\theta}{r^3} - \frac{a_2}{2r^4} 6\cos\theta \sin\theta \right] \vec{e}_\theta \end{aligned} \quad (96)$$

Подставляя полученное выражение для $\nabla\varphi$ в формулу (55), получаем:

$$\begin{aligned} \sigma = \left| k \left[-\frac{a_0}{r^2} - \frac{2a_1 \cos\theta}{r^3} - \frac{3a_2}{r^4} \left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2} \right) \right] \vec{e}_r \right. \\ \left. + k \left[-\frac{a_1 \sin\theta}{r^3} - \frac{a_2}{2r^4} 6\cos\theta \sin\theta \right] \vec{e}_\theta \right| \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (97)$$

С учетом того, что $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ получаем:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\left| \left[\frac{a_0}{r^2} + \frac{2a_1 \cos\theta}{r^3} + \frac{3a_2}{r^4} \left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2} \right) \right] \vec{e}_r + \left[\frac{a_1 \sin\theta}{r^3} + \frac{3a_2}{r^4} \cos\theta \sin\theta \right] \vec{e}_\theta \right| 4\pi r_0^2 \varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0 q_0} \quad (98)$$

После сокращения некоторых величин получим:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} = & \left| \left[\frac{a_0 r_0^2}{q_0 r^2} + 2 \frac{a_1 \cos\theta r_0^3}{q_0 r_0 r^3} + 3 \frac{a_2}{q_0 r_0^2} \left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2} \right) \frac{r_0^4}{r^4} \right] \vec{e}_r \right. \\ & \left. + \left[\frac{a_1 \sin\theta r_0^3}{q_0 r_0 r^3} + 3 \frac{a_2}{q_0 r_0^2} \cos\theta \sin\theta \frac{r_0^4}{r^4} \right] \vec{e}_\theta \right| \end{aligned} \quad (99)$$

Воспользовавшись условиями для коэффициентов (64)-(66), получим

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\left[\frac{1}{\xi^2} + 2 \frac{k_1 \cos\theta}{\xi^3} + 3 \frac{k_2}{\xi^4} \left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2} \right) \right]^2 + \left[\frac{k_1 \sin\theta}{\xi^3} + 3 \frac{k_2}{\xi^4} \cos\theta \sin\theta \right]^2} \quad (100)$$

Окончательный ответ для поверхностной плотности заряда:

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{\xi^4} \sqrt{\left[\xi^2 + 2\xi k_1 \cos\theta + 3k_2 \left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2} \right) \right]^2 + [\xi k_1 \sin\theta + 3k_2 \cos\theta \sin\theta]^2} \quad (101)$$

Где ξ определяется выражением (92).

Поверхностная плотность заряда первой фигуры, ограниченная поверхностью (101), представлена на рисунках ниже при следующих коэффициентах:

$$\psi = 0.6, k_1 = 0.3, k_2 = 0.15 \quad (102)$$

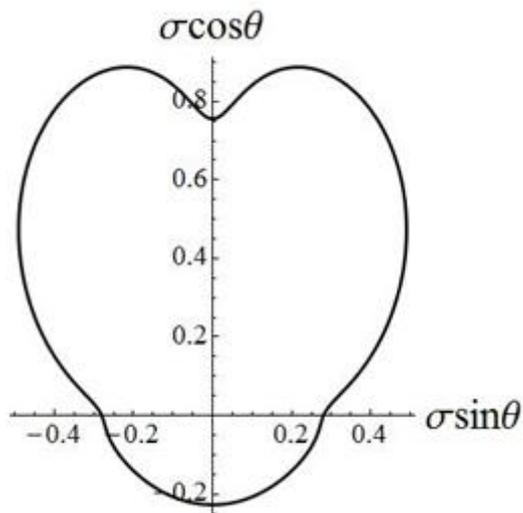


Рисунок 13. Поверхностная плотность первой фигуры в разрезе

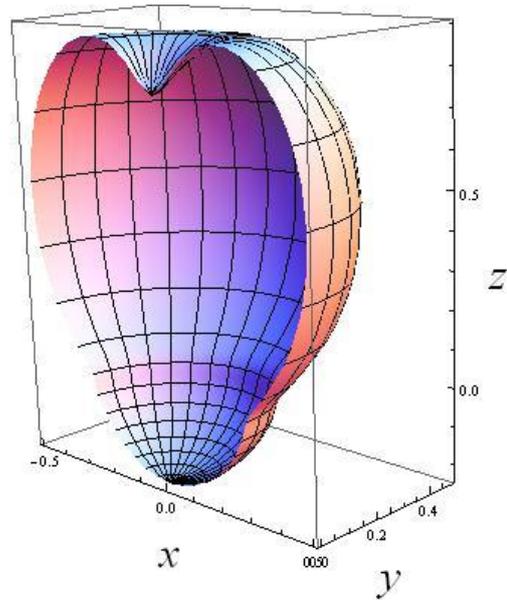


Рисунок 12. Поверхностная плотность первой фигуры в 3d

Поверхностная плотность второй фигуры, ограниченная поверхностью (101), представлена на рисунках ниже при коэффициентах:

$$\psi = 0.5, k_1 = 0.3, k_2 = 0.25 \quad (103)$$

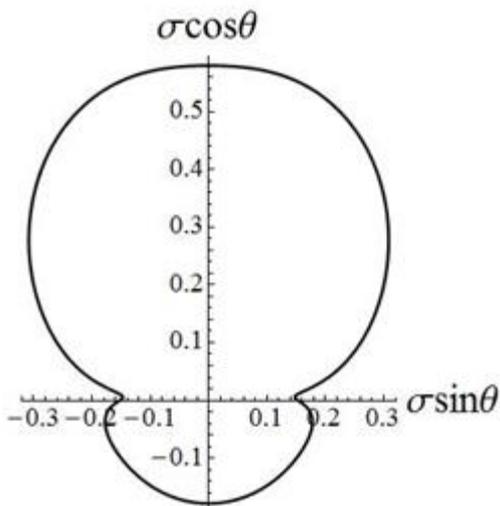


Рисунок 14. Поверхностная плотность второй фигуры в разрезе

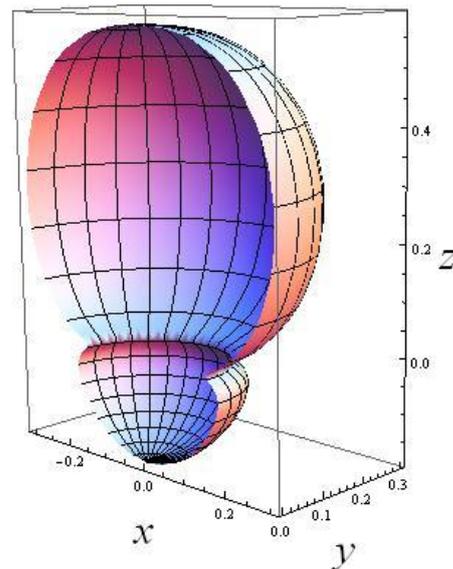


Рисунок 15. Поверхностная плотность второй фигуры в 3D

Заключение

В первой части работы был разработан способ определения положения и заряда точечного источника в двумерном и трехмерном случаях по известным значениям потенциала электрического поля, созданного этим источником, в нескольких точках (электрическая локация). Возможность его применения в практических целях была подтверждена экспериментально.

Во второй части работы было найдено новое точное аналитическое решение задачи Дирихле для поверхностного распределения заряда и формы проводящего тела при известном значении электростатического потенциала на его поверхности. По данным аналитическим зависимостям были получены наглядные 3D графики.

Приложение 1. Решение кубических уравнений с помощью формулы Кардано.

Пусть дано уравнение

$$x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 = 0 \quad (104)$$

Пусть

$$q = \frac{1}{3}A_1 - \frac{1}{9}A_2^2; \quad (105)$$

$$r = \frac{1}{6}(A_1A_2 - 3A_0) - \frac{1}{27}A_2^3. \quad (106)$$

Если $q^3 + r^2 > 0$, то имеется один действительный корень и два комплексно сопряженных. Если $q^3 + r^2 = 0$, то все корни действительны, и, по крайней мере, два из них равны. Если $q^3 + r^2 < 0$, то все три корня действительны.

Введем следующие величины

$$\begin{cases} s_1 = (r + \sqrt{q^3 + r^2})^{1/3} \\ s_2 = (r - \sqrt{q^3 + r^2})^{1/3} \end{cases} \quad (107)$$

Тогда

$$x = s_1 + s_2 - \frac{A_2}{3} \quad (108)$$

Список используемых источников

1. Вайтулян, А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / А. О. Вайтулян. - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2007. - 224 с.
2. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. - изд. 2-е. - Москва: Наука, 1979. - 284 с.
3. Кабанихин, С. И. Обратные и некорректные задачи: учеб. / С. И. Кабанихин. - Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009. - 457 с.
4. Теребиж, В. Ю. Введение в статистическую теорию обратных задач / В. Ю. Теребиж. - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 376 с.
5. Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач: учеб. пособие / А. М. Денисов. - Москва: Изд - во МГУ, 1994. - 208 с.
6. Ola, P. Inverse problems for time harmonic electrodynamics, Inverse Problems / P. Ola , E. Somersalo // MSRI Publications. - 47 (2003). - P. 169 - 191.
7. Somersalo E. The Inverse Problem of Magnetoencephalography: Source Localization and the Shape of a Ball [Electronic resource] // SIAM. Society for Industrial and Applied Mathematics. - 2007. - Vol. 40, №2. - The electronic version of the printing publication. - URL: <http://www.siam.org/pdf/news/1097.pdf> (access date: 15.10.2013).
8. Mosher, J. C. EEG and MEG: forward solutions for inverse methods / J.C. Mosher, R. M. Leahy, P. S. Lewis // IEEE Transactions on biomedical engineering. - 1999. - A. 46. - P. 245 - 259.
9. Наймарк, Б. М. Обратная задача гравитационной неустойчивости / Б. М. Наймарк // Доклад РАН. - 1999. - №4. - С. 364.
10. Ластовецкий А. Е., Клепка С. П., Рябоконт М. С. Дистанционное измерение электрических зарядов воздушных объектов // Вестник Концерна ПВО Алмаз-Антей. – 2015. – №. 3 (15).

11. Нефёдов Д. С., Мелец А. Ф. Имитационная модель электростатической многопозиционной системы пассивной локации маловысотных летательных аппаратов. – 2014.
12. Сирота Д. Ю. Восстановление формы источника электрического поля как решение обратной задачи геоэлектрики // Вестник Кузбасского государственного технического университета. – 2015. – №. 6 (112).
13. Сирота Д. Ю. СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ГЕОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МЕТОДА ПРОГНОЗА ЗОН КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ И РАЗРУШЕНИЯ УГОЛЬНЫХ ПЛАСТОВ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ПОЛЯ НА ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ. Диссертация на соискание научной степени кандидата наук – 2010.
14. Трушников Н. В. Обратная задача локации очага самовозгорания угля по измерениям потенциала термоэлектрического поля на поверхности угольного разреза // Вестник Кузбасского государственного технического университета. – 2010. – №. 3.
15. C.D. Hendricks, J.M. Schneider, Stability of conducting droplet under the influence of surface tension and electrostatic forces, Am. J. Phys. 1 (6) (1963) 450-453
16. Завьялова Е. Л. Роль горно-геологических факторов в формировании очагов самонагрева измельченного угля // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). – 2006. – №. S4.
17. Портола В. А., Гришагин В. М. СПОСОБ ОБНАРУЖЕНИЯ ОЧАГОВ САМОВОЗГОРАНИЯ // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). – 2008. – №. S12.
18. МАЛАХОВА Д. Д., КАЧУРИН Н. М., ЗАХАРОВ Е. И. МЕХАНИЗМ ПРОЦЕССА САМОНАГРЕВАНИЯ УГЛЯ И ПЕРЕХОДА ЕГО В САМОВОЗГОРАНИЕ // Известия Тульского государственного университета. Науки о земле. – 2013. – №. 2.

19. Sacha G. M., Rodriguez F. B., Varona P. An inverse problem solution for undetermined electrostatic force microscopy setups using neural networks // *Nanotechnology*. – 2009. – T. 20. – №. 8. – C. 085702.
20. Sezginer A. The inverse source problems of magnetostatics and electrostatics // *Inverse Problems*. – 1987. – T. 3. – №. 4. – C. L87.
21. Epp, V. Ya. Inverse problem for the retarded field of an arbitrary moving charge / V. Ya. Epp, T. G. Mitrofanova // *Phys. Lett.* - 2004. - V. 330. - P. 7 - 9.
22. Epp, V. Ya. Solution of inverse problem for a charge combined with a point-like dipole / V. Ya. Epp, T. G. Mitrofanova // *Proceedings of Inter. Conf. of Math. Methods in Electromagnetic Theory <<MMET - 98>> / Kharkov, Ukraine.* - 1998. - P. 167 – 168.
23. E. Madelung, *Mathematical Apparatus of Physics*, 1968. Moscow.
24. Philip M. Morse, Herman Feshbach, *Methods of Theoretical Physics, Part II*, McGraw-Hill, 1953.
25. Wolfgang K.H. Panofsky, Melba Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, second ed., Addison-Wesley, 1962.
26. Julius A. Stratton, *Electromagnetic Theory. A Classical Reissue*, John Wiley&Sons, 2007.
27. John Lekner, Analytical expression for the electric field enhancement between two closely-spaced conducting spheres, *J. Electrostat.* 68 (2010) 299-304.
28. Ping Zhu, Yi Jie Zhu, Distributions of potential and field on central axis line generated by elliptic ring uniformly charged, *J. Electrostat.* 70 (2012) 25-30.
29. K. Kolikov, D. Ivanov, Y. Epitropov, S. Bozhkov, Electrostatic interaction between two conducting spheres, *J. Electrostat.* 70 (2012) 91-96.
30. Orion Ciftja, Calculation of the Coulomb electrostatic potential created by a uniformly charged square on its plane: exact mathematical formulas, *J. Electrostat.* 71 (2013) 102-108.

- 31.D.V. Vagin, T.N. Gerasimenko, P.A. Polyakov, Exact analytical expression for magnetic field induction of rectangular shape sample, Mosc. Univ. Phys. Bull. 63 (6) (2008) 422-424.
- 32.Polyakov P. A., Rusakova N. E., Samukhina Y. V. New solutions for charge distribution on conductor surface //Journal of Electrostatics. – 2015. – T. 77. – C. 147-152.
- 33.John D. Jackson, Classical Electrodynamics, third ed., John Wiley & Sons, 1999.
- 34.M. Abramovitz, I.A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, Dover Publications, New York, 1964.
- 35.Lord Rayleigh, On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity, Philos. Mag. Ser. 5 14 (1882) 184-186.