

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ

**НОВЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ЭЛЕКТРОСТАТИКИ ПРОВОДНИКОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К
ПРОБЛЕМЕ ЗАРЯДОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ**

Дипломная работа студентки 605 группы Самухиной Ю.В.

Кафедра общей физики

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор П.А. Поляков

Заведующий кафедрой:
д. ф.-м. н., профессор А.М. Салецкий

МОСКВА
2012

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА 1. ЗАРЯДОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КАПЛИ НЕСЖИМАЕМОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ	3
1.1 Введение	3
1.2 Неустойчивость шарообразной заряженной капли проводящей несжимаемой жидкости....	5
1.3 Электростатическая неустойчивость проводящей заряженной капли по отношению к изменению формы от шарообразной к эллипсоидальной.	8
1.4 Устойчивость эллиптической формы заряженной капли проводящей жидкости	12
ГЛАВА 2. МЕТАСТАБИЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ РАВНОВЕСИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ КАПЛИ.....	17
2.1 Введение	17
2.2 Постановка задачи.....	20
2.3 Решение задачи.....	20
ГЛАВА 3. НОВЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ ПРОВОДНИКОВ	29
3.1 Расчет поверхностной плотности распределения заряда для фигуры несимметричной сфероидной формы.....	29
3.2 Расчет поверхностной плотности распределения заряда для фигуры симметричной сфероидной формы.....	36
ГЛАВА 4. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ДИСКРЕТНЫХ ЗАРЯДОВ НА ОБОЛОЧКЕ ЖЕСТКОГО ПРОВОДЯЩЕГО ШАРА.	46
Приложение.....	52
Литература.....	59

ГЛАВА 1. ЗАРЯДОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КАПЛИ НЕСЖИМАЕМОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

1.1 Введение.

Электростатическая неустойчивость заряженной капли, известная еще в XIX веке, до настоящего времени привлекает внимание исследователей. Основы теории этого явления были разработаны английским ученым Дж. Рэлеем и до настоящего времени уточняются и развиваются [1]. Явлению неустойчивости заряженной поверхности жидкости посвящено большое количество публикаций в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями, например, обзоры [2-4], в которых проанализировано состояние исследований в различных сферах использования обсуждаемого явления. Электростатическая неустойчивость возникает, если поверхностная плотность кулоновских сил отталкивания электрических зарядов проводящей жидкости превышает давление со стороны поверхностных слоев капли на нижележащие (поверхностное натяжение). Сначала проведем анализ неустойчивости шарообразной заряженной капли несжимаемой проводящей жидкости. Для тел иной формы такой анализ представляет сложную проблему. Если тело заряжено и является проводником, то необходимо сначала решить задачу электростатики на распределение зарядов по его поверхности. В случае проводящей жидкости форма капли может меняться в зависимости от распределения зарядов по ее поверхности, также как и давление сил поверхностного натяжения, поэтому форма капли, распределение зарядов по ее поверхности и величина сил поверхностного натяжения взаимно зависимы.

Обычно задачу о зарядовой неустойчивости капли решают методом возмущений, рассматривая равновесную конфигурацию заряженной капли простой формы (как правило, шар). Далее рассматривают малое отклонение шарообразной формы, анализируя развитие этого возмущения. При определенных параметрах среды возможно развитие неустойчивости. Однако такой способ позволяет обнаружить лишь линейную стадию неустойчивости и не дает возможности предсказать приведет ли это к новому равновесному состоянию формы капли или к разрушению капли (рождение дочерних капель).

Другой подход к анализу зарядовой неустойчивости основан на анализе свободной энергии заряженной капли в начальном состоянии и в конечном состоянии, обусловленном развитием неустойчивости. Например, для данного заряда шарообразной капли вычисляется суммарная энергия капли в начальном состоянии и в состоянии после распада на дочерние

капли. Если энергия системы капель после распада оказалась меньше исходной, то такое состояние является энергетически более выгодным. Однако установление данного факта еще не гарантирует, что капля обязательно перейдет в новое состояние. Для этого необходимо установить, что при переходе в энергетически более выгодное состояние не требуется преодолеть потенциальный барьер, препятствующий распаду заряженной капли или изменению ее формы. Для ответа на этот вопрос в общем случае требуется полное решение нелинейных уравнений гидродинамики заряженной жидкости [5].

1.2 Неустойчивость шарообразной заряженной капли проводящей несжимаемой жидкости.

А. Силовое рассмотрение.

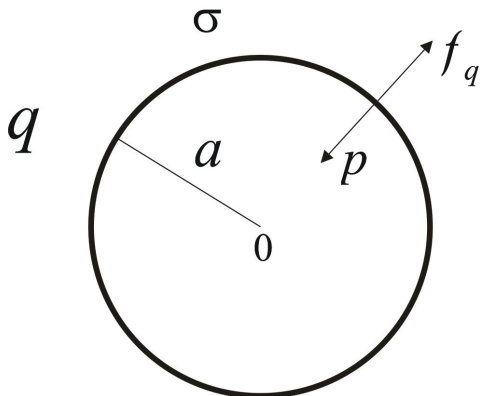


Рисунок. 1. Проводящая капля шарообразной формы

Пусть имеется проводящий жидкий шар (капля) радиуса a , заряженный зарядом q (см. Рисунок. 1). Заряд q равномерно распределен по поверхности шара с плотностью σ . Тогда на единицу поверхностного заряда будет действовать сила кулоновского отталкивания f_q равная [6, 7]

$$f_q = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \quad (1)$$

и направленная от центра капли.

С другой стороны, на поверхностный слой жидкости будет действовать сила поверхностного натяжения поверхностная плотность которой (давление) p направлена к центру капли и, согласно формуле Лапласа для капиллярного давления [8], равна

$$p = \alpha \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (2)$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения, R_1 и R_2 - радиусы главных кривизн поверхности. Если в некоторой точке поверхности $f_q > p$, то равновесие будет неустойчивым. Тело будет стремиться изменить свою форму, и это может привести к распаду ее на более мелкие дочерние капли [9]. В случае рассматриваемой шарообразной капли это критическое условие, согласно (1) и (2), можно представить в виде

$$\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} > \frac{2\alpha}{a} \quad (3)$$

Выражая плотность заряда σ через заряд капли q и радиус a , из (3) получим

$$\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a} > \alpha \cdot 4\pi a^2 \cdot 2 \quad (4)$$

Следуя работам [5, 10], введем безразмерный параметр (параметр Рэлея) — критерий неустойчивости заряженной капли

$$T = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 \alpha a^3}, \quad (5)$$

равный отношению удвоенной энергии кулоновского взаимодействия к энергии поверхностного натяжения.

Тогда условие (4) примет вид

$$T > 4. \quad (6)$$

В. Энергетический подход.

Рассмотрим возможный вариант распада шарообразной капли несжимаемой проводящей жидкости. Пусть рассмотренная в п. А капля радиуса a распалась на две дочерние капли разной величины с радиусами b и c . Для определенности положим $b \gg c$.

Условие распада капли примет вид

$$W > W_b + W_c, \quad (7)$$

где W — энергия исходной капли до распада, а W_b и W_c — значения энергии соответствующих дочерних капель после распада.

Полная энергия каждой капли равна сумме ее кулоновской электростатической энергии

$$W_q = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (8)$$

и энергии поверхностного натяжения.

$$W_\alpha = \alpha S = \alpha \cdot 4\pi R^2, \quad (9)$$

где R — радиус данной капли.

Если кулоновское взаимодействие между дочерними каплями очень слабое, то есть капли разлетелись на достаточно большое расстояние, то поверхностная плотность заряда обратно пропорциональна радиусу поверхности капли

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_c} = \frac{1/b}{1/c} = \frac{c}{b}. \quad (10)$$

Соответственно соотношение между полными зарядами капель будет пропорционально отношению их радиусов ($q_b/q_c = b/c$). Заряды из дочерних капель связаны с зарядом исходной капли q (согласно закону сохранения заряда) следующими соотношениями

$$q_b = q \cdot \frac{b}{b+c}, \quad q_c = q \cdot \frac{c}{b+c}. \quad (11)$$

Обозначим отношение радиусов дочерних капель новой величиной

$$\xi = \frac{c}{b}, \quad \xi \ll 1 \quad (12)$$

Из условия сохранения объема капли следует, что радиусы дочерних капель связаны с радиусом исходной капли соотношением

$$a^3 = b^3 + c^3 \quad (13)$$

и, следовательно, с учетом (12)

$$b = \frac{a}{(1 + \xi^3)^{1/3}}, \quad c = \frac{a \cdot \xi}{(1 + \xi^3)^{1/3}} \quad (14)$$

$$q_b = q \cdot \frac{1}{1 + \xi}, \quad q_c = q \cdot \frac{\xi}{1 + \xi} \quad (15)$$

Тогда условие (7) примет вид

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 4\pi a^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a} > \alpha \cdot 4\pi \cdot \frac{a^2}{(1 + \xi^3)^{2/3}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(q \cdot \frac{1}{1 + \xi}\right)^2}{\frac{a}{(1 + \xi^3)^{1/3}}} + \\ + \alpha \cdot 4\pi \cdot \frac{a^2 \xi^2}{(1 + \xi^3)^{2/3}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(q \cdot \frac{\xi}{1 + \xi}\right)^2}{\frac{a \cdot \xi}{(1 + \xi^3)^{1/3}}} \end{aligned} \quad (16)$$

Это выражение легко приводится к следующему виду:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a} > \alpha \cdot 4\pi a^2 \cdot \frac{\frac{1 + \xi^2}{(1 + \xi^3)^{2/3}} - 1}{1 - \frac{1 + \xi}{1 + \xi^3}}. \quad (17)$$

Учитывая, что $\xi \ll 1$, мы можем преобразовать правую часть выражения (см. [11]).

Получим

$$\frac{\frac{1 + \xi^2}{(1 + \xi^3)^{2/3}} - 1}{1 - \frac{1 + \xi}{1 + \xi^3}} = \frac{1 + \xi^2 - \frac{2}{3}\xi^3 - 1}{1 - \left(1 + \frac{1}{3}\xi^3 - \xi\right)} = \frac{\xi^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\xi\right)}{\xi \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\xi^2\right)} = \xi \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\xi\right), \quad (18)$$

и условие (7) распада шарообразной капли проводящей несжимаемой жидкости на две капли разных размеров примет вид

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a} > \alpha \cdot 4\pi a^2 \cdot \xi \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\xi\right). \quad (19)$$

Подставляя ξ согласно формуле (12) и записывая условие для параметра Рэлея (5), окончательно получим:

$$T \geq \frac{c}{b} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \xi\right) \quad (20)$$

Из неравенства (20) вытекает, что исходной капле энергетически выгодно распасться на капли сильно различающихся размеров. Формально, чем меньше радиус одной из капель, тем энергетически выгоднее это состояние. Крупная дочерняя капля может, в свою очередь, тоже распасться на крупную и мелкую капли, и т.д. Таким образом, в результате каскада распадов исходная капля может расплыться на мелкие заряженные капельки [10]. Отметим, однако, что при энергетическом подходе мы можем говорить только о энергетической выгоде конечного состояния. При этом неизвестно, может ли исходная капля перейти в это состояние из-за наличия, например, промежуточного потенциального барьера. Полный ответ на этот вопрос можно получить только в результате решения полной нелинейной системы уравнений гидродинамики для жидкой заряженной капли [5].

1.3 Электростатическая неустойчивость проводящей заряженной капли по отношению к изменению формы от шарообразной к эллипсоидальной.

Рассмотрим вопрос о возможности в результате электростатической неустойчивости изменения формы заряженной проводящей капли от шарообразной к эллипсоидальной. Реальный процесс развития электростатической неустойчивости определяется уравнениями гидродинамики с учетом действия электростатических сил и может проходить по иному

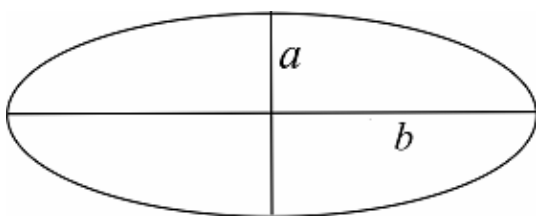


Рисунок 2. Эллипсоид вращения.

сценарию (см., например, [5,9,10]). К сожалению, эта сложная задача в общем случае не решена, поэтому приходится рассматривать исходя из физически разумных предположений какие-то конкретные сценарии развития неустойчивости Рэлея. Предлагаемый в этой работе сценарий

обладает еще важным преимуществом, что может быть проанализирован аналитически [12].

Мы рассмотрим вытянутый эллипсоид вращения с полуосями $a < b$ (см. Рисунок 2).

Площадь поверхности эллипсоида вращения определяется формулой (см. [12])

$$S = 2\pi a^2 + 2\pi \frac{ab}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon, \quad (21)$$

где

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} \quad (22)$$

Если на эллипсоидальную каплю проводящей жидкости поместить заряд q , то потенциал сфероида будет определяться формулой [6]:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{b^2 - a^2}} \cdot \ln \frac{a}{b - \sqrt{b^2 - a^2}} \quad (23)$$

Тогда электростатическая энергия эллипсоидальной капли будет равна

$$W_q = \frac{q\varphi}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{b\varepsilon} \cdot \ln \frac{a/b}{1 - \varepsilon} \quad (24)$$

Для несжимаемой жидкости объем капли не меняется, следовательно, объем первоначальной шарообразной капли будет равен объему эллипсоидальной капли, то есть

$$\frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi b a^2, \quad (25)$$

где r — радиус первоначальной шарообразной капли. Из этой формулы получаем, что отношение полуосей эллипсоида равно:

$$\beta = \frac{a}{b} = \frac{a^3}{r^3} \quad (26)$$

Тогда для эксцентриситета эллипса (22) получим

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \beta^2} \quad (27)$$

Тогда результирующая энергия эллипсоида, равная сумме электростатической энергии и молекулярной энергии поверхностного натяжения [8], будет иметь вид

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2 \beta}{a\varepsilon} \cdot \ln \frac{\beta}{1 - \varepsilon} + \alpha S, \quad (28)$$

где S определяется выражением (23).

Воспользовавшись формулой (26), выразим полуоси эллипса через радиус r начальной шарообразной капли

$$a = \beta^{1/3} \cdot r, \quad b = \frac{r}{\beta^{2/3}} \quad (29)$$

Подставляя (23) в (24), получим следующее выражение для суммарной энергии эллипсоидальной капли:

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{\beta^{1/3} r} \cdot \frac{\beta}{\varepsilon} \cdot \ln \frac{\beta}{1 - \varepsilon} + \alpha \cdot \left(2\pi\beta^{2/3} r^2 + 2\pi \cdot \frac{\beta^{2/3} r^2}{\beta\varepsilon} \cdot \arcsin \varepsilon \right) \quad (30)$$

Согласно энергетическому подходу, необходимым условием изменения формы капли от шарообразной к эллипсоидальной является неравенство

$$W < \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{q^2}{r} + \alpha \cdot 4\pi r^2, \quad (31)$$

где выражение, стоящее в правой части неравенства, является полной энергией капли шарообразной формы (см. пункт 2В).

Неравенство (31) несложно преобразовать к следующему виду:

$$T > 2\eta, \quad (32)$$

где

$$\eta = \frac{1 - \frac{1}{2} \cdot \left[\beta^{\frac{2}{3}} + \frac{\beta^{\frac{2}{3}}}{\beta\epsilon} \arcsin \epsilon \right]}{1 - \frac{\beta^{\frac{2}{3}}}{\epsilon} \ln \frac{\beta}{1-\epsilon}} \quad (33)$$

Таким образом, заряженной капле проводящей жидкости энергетически выгодно перейти к эллипсоидальной форме при значениях параметра Рэлея, превышающих 2η . На Рисунок 3 представлен график зависимости параметра η от отношения полуосей эллипсоида β .

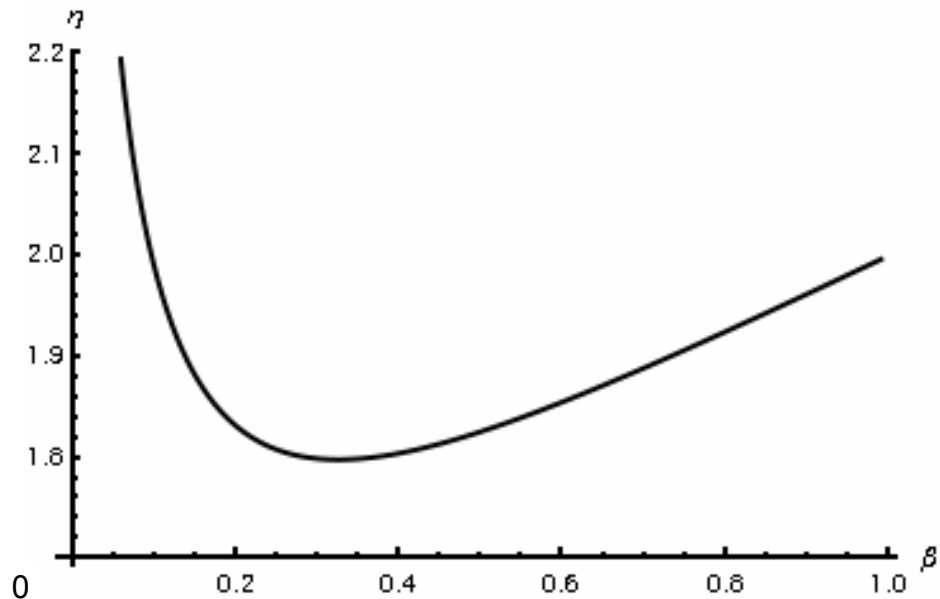


Рисунок 3. Зависимость параметра η от отношения полуосей эллипсоида β .

Видно, что зависимость имеет минимум при $\beta = 0,3$, следовательно, переход к эллиптической форме возможен при значении параметра Рэлея $T = 3,6$.

Нормируем полную энергию на поверхностную энергию начальной шарообразной капли

$$\widetilde{W} = \frac{W}{\alpha \cdot 4\pi r^2}. \quad (34)$$

Тогда выражение для нормированной энергии будет иметь вид:

$$\tilde{W} = \frac{T}{2} \cdot \frac{\beta^{2/3}}{\varepsilon} \cdot \ln \frac{\beta}{1-\varepsilon} + \frac{\alpha}{2} \cdot \left(\beta^{2/3} + \frac{\beta^{2/3} \varepsilon}{\beta} \arcsin \varepsilon \right) \quad (35)$$

Рассмотрим поведение полной энергии в зависимости от параметра эллипсоидальности β . Графики зависимости нормированной энергии от параметра β при двух значениях параметра Рэля $T = 3,6$ и $T = 3,7$ представлены на Рисунке 4 и Рисунок 5.

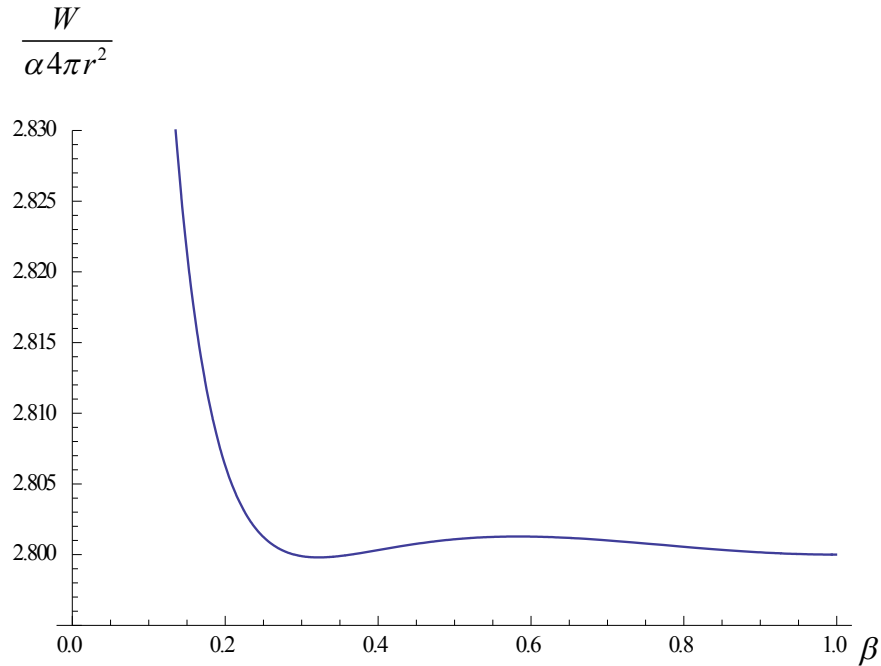


Рисунок 4. Зависимость нормированной энергии от параметра β для параметра Рэля

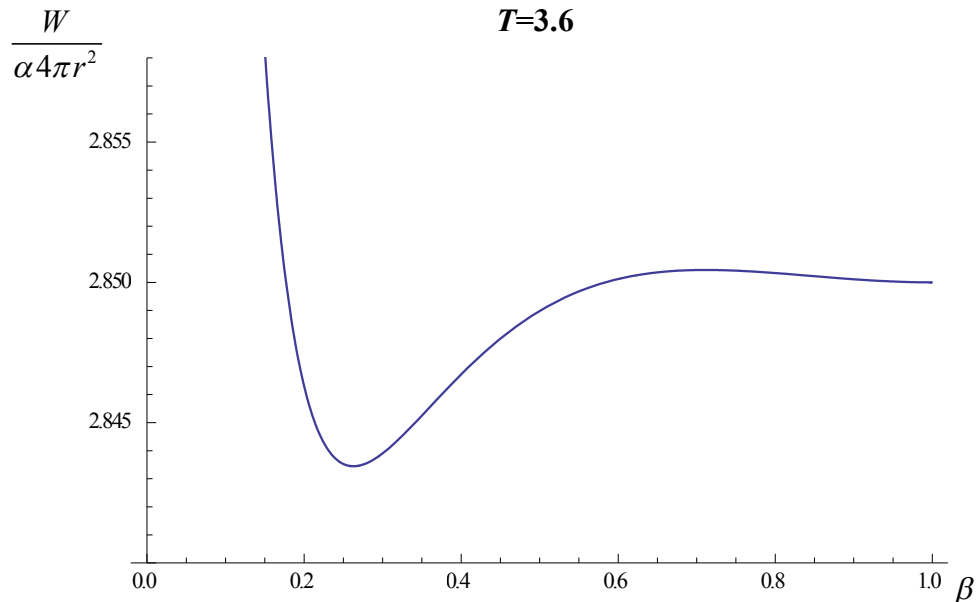


Рисунок 5. Зависимость нормированной энергии от параметра β для параметра Рэля $T=3.7$

Из рисунка 4 видно, что при значении параметра $T = 3.6$, зависимость полной энергии от параметра β имеет два сравнимых по величине минимума, это означает, что капля может находиться в двух стабильных состояниях практически с одинаковой энергией (шарообразном и эллиптическом), то есть в состояниях с $\beta = 1$ и $\beta = 0,3$ соответственно.

При увеличении значения параметра Рэлея до $T = 3.7$ (Рисунок 5) энергия состояния с эллиптической формой капли становится заметно меньше, чем с шарообразной. Отметим, что в этом состоянии значения энергии в минимуме будет больше, чем в первом случае.

1.4 Устойчивость эллиптической формы заряженной капли проводящей жидкости

В п. 3 данной статьи мы предполагали, что возможно свободное существование капли эллиптической формы, считая, что такая форма может быть искусственно создана каким-то образом. В этом пункте мы исследуем вопрос об устойчивости эллиптической формы заряженной капли.

Для этого воспользуемся силовым подходом аналогично тому, который рассматривался в п. 2А для жидкой заряженной капли, т.е. для каждой точки поверхности эллипсоида мы рассчитаем баланс силы поверхностного натяжения и кулоновских сил отталкивания.

Рассмотрим поверхность эллипсоида вращения с полуосями $a < b$.

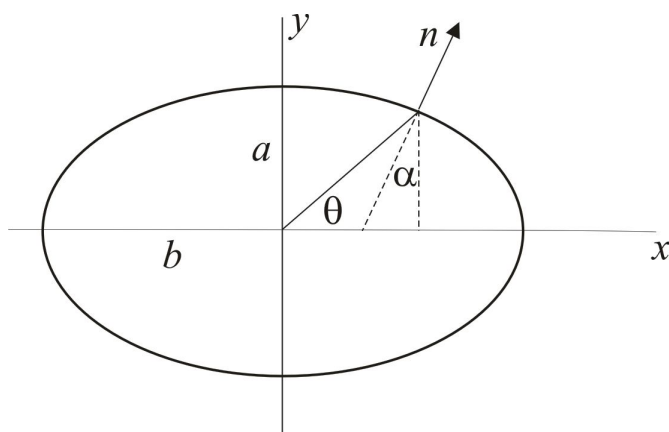


Рисунок 6. Эллипсоид вращения

Согласно формуле Лапласа плотность силы поверхностного натяжения в точке поверхности эллипсоида, определяемой нормалью n , равна

$$p = \alpha \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (36)$$

где R_1 и R_2 — радиусы главных кривизн в данной точке поверхности эллипсоида.

Несложно показать, что наибольший радиус кривизны R_1 определяется сечением эллипсоида плоскостью xOy и равен

$$R_1 = \frac{(b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}{ab} \quad (37)$$

Наименьший радиус кривизны R_2 , как следует из рисунка равен

$$R_2 = \frac{y}{\cos \alpha} = \frac{a}{b} \cdot (b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \quad (38)$$

Распределение плотности заряда по поверхности проводящего эллипсоида вращения (см. [2]) определяется формулой

$$\sigma = \frac{q}{4\pi a^2 b} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right) + \frac{x^2}{b^4} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (39)$$

Учитывая, что $x = b \cos \theta$, для поверхностной плотности заряда получим следующую зависимость от полярного угла θ

$$\sigma = \frac{q}{4\pi a^2 b} \frac{1}{\left(\frac{1}{a^2} (1 - \cos^2 \theta) + \frac{1}{b^2} \cos^2 \theta \right)}. \quad (40)$$

Принимая во внимание обозначение (26) для отношения полуосей эллипсоида и выражение для эксцентриситета эллипса, формулу (40) можно записать в виде

$$\sigma = \frac{q}{4\pi ab} \frac{1}{(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}}}. \quad (41)$$

Поверхностная плотность сил f_q , действующая на поверхностный заряд проводящей капли, определяется хорошо известной формулой (1). Результирующая плотность f кулоновских электростатических сил и сил поверхностного натяжения будет равна

$$f = f_q - p = \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{q^2}{(4\pi ab)^2} \frac{1}{(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \theta)} - \frac{\alpha}{a} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta + \beta^2 \cos^2 \theta}} \cdot \left(1 + \frac{\beta^2}{\sin^2 \theta + \beta^2 \cos^2 \theta} \right) \quad (42)$$

Вынесем в формуле (42) выражение α/a за скобки. Тогда получим

$$f = \frac{\alpha}{a} \left(T \frac{\beta}{2} \frac{1}{(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \theta)} - \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta + \beta^2 \cos^2 \theta}} \cdot \left(1 + \frac{\beta^2}{\sin^2 \theta + \beta^2 \cos^2 \theta} \right) \right), \quad (43)$$

где T — безразмерный параметр Рэлея (5).

Исследуем вопрос об устойчивости эллипсоидальной формы заряженной капли. Очевидно, что эллипсоидальная форма будет устойчива, если в каждой локальной точке

поверхности будет выполняться баланс всех сил. Если же в какой-то точке поверхности баланс сил нарушается, то под действием этих сил поверхность будет деформироваться, то есть элемент поверхности жидкости будет перемещаться под действием равнодействующей силы до тех пор, пока не будет достигнут баланс сил.

Следует отметить, что при переходе из неустойчивого состояния в устойчивое движение жидкости может носить колебательный характер. Исследованию таких колебаний (в основном малых линейных колебаний) посвящено много работ (см. например [10]).

На Рисунок 7–Рисунок 9 представлена зависимость суммарной поверхностной плотности сил, нормированной на α/a (половинное давление поверхностного слоя капли на нижележащие слои), от полярного угла θ при значении параметра эллиптичности $\beta = 0.5$ для трех характерных значений параметра Рэлея $T = 3.6$, $T = 4.5$ и $T = 3.7$ соответственно.

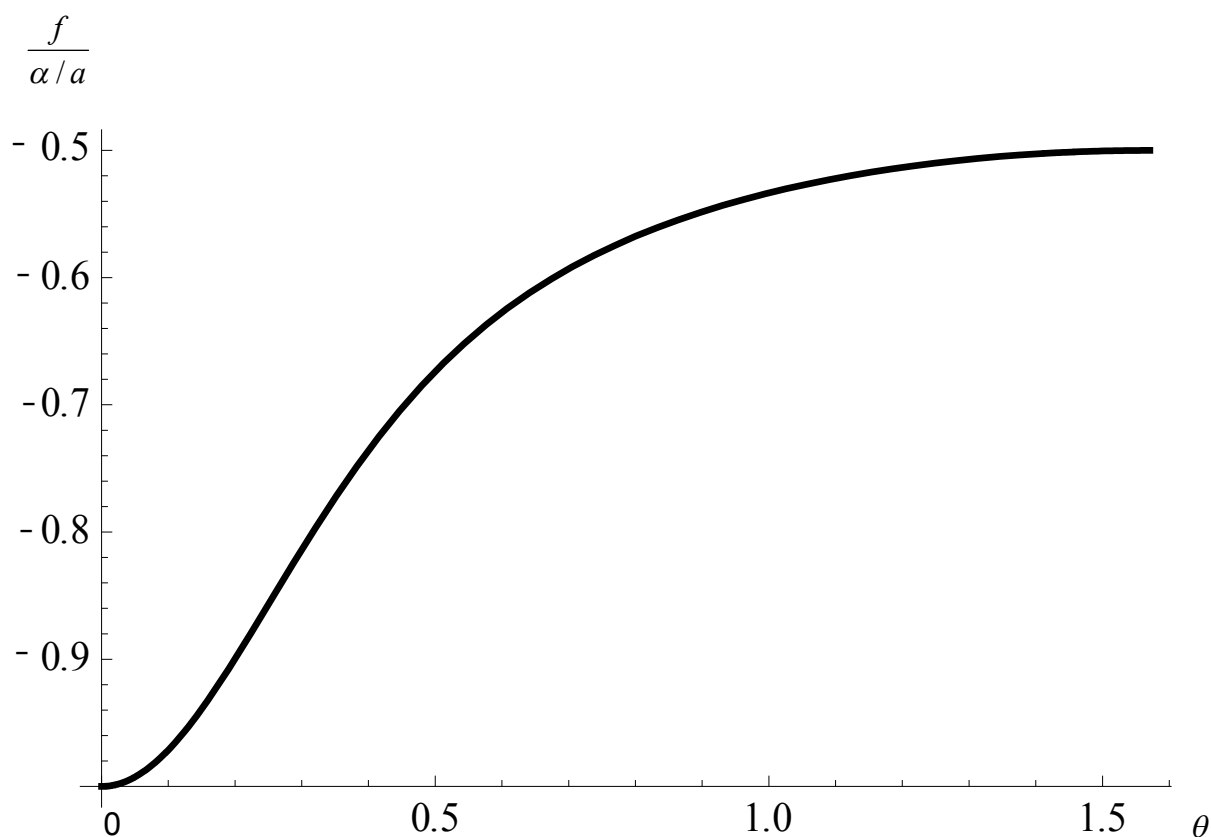


Рисунок 7. Зависимость нормированной плотности сил при значении параметра Рэлея $T = 3.6$.

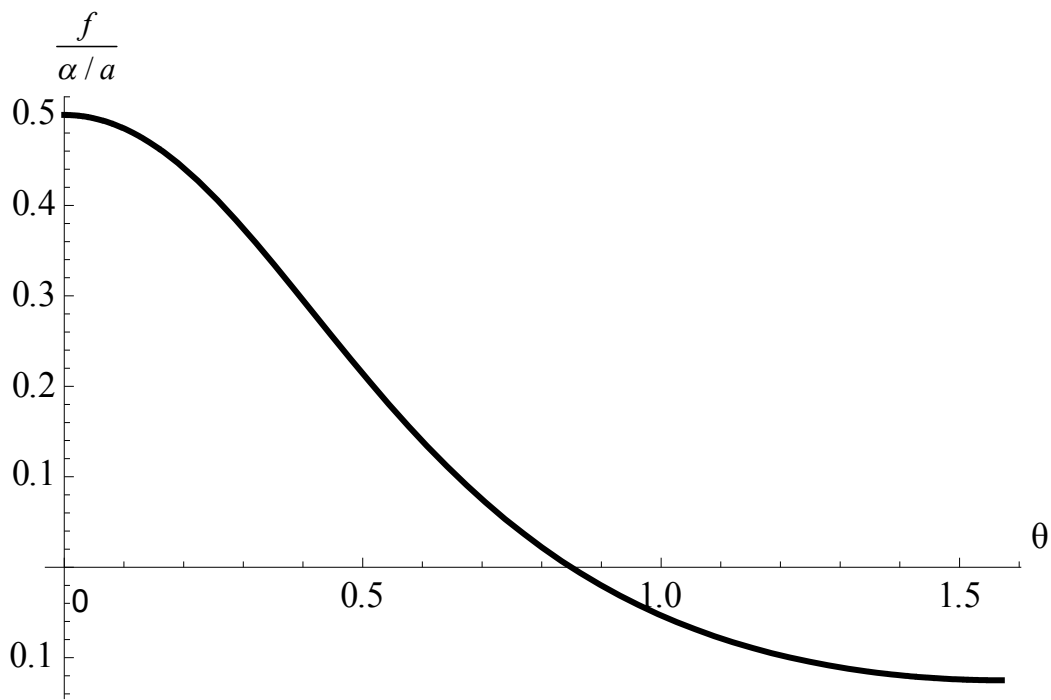


Рисунок 8. Зависимость нормированной плотности сил при значении параметра Рэлея

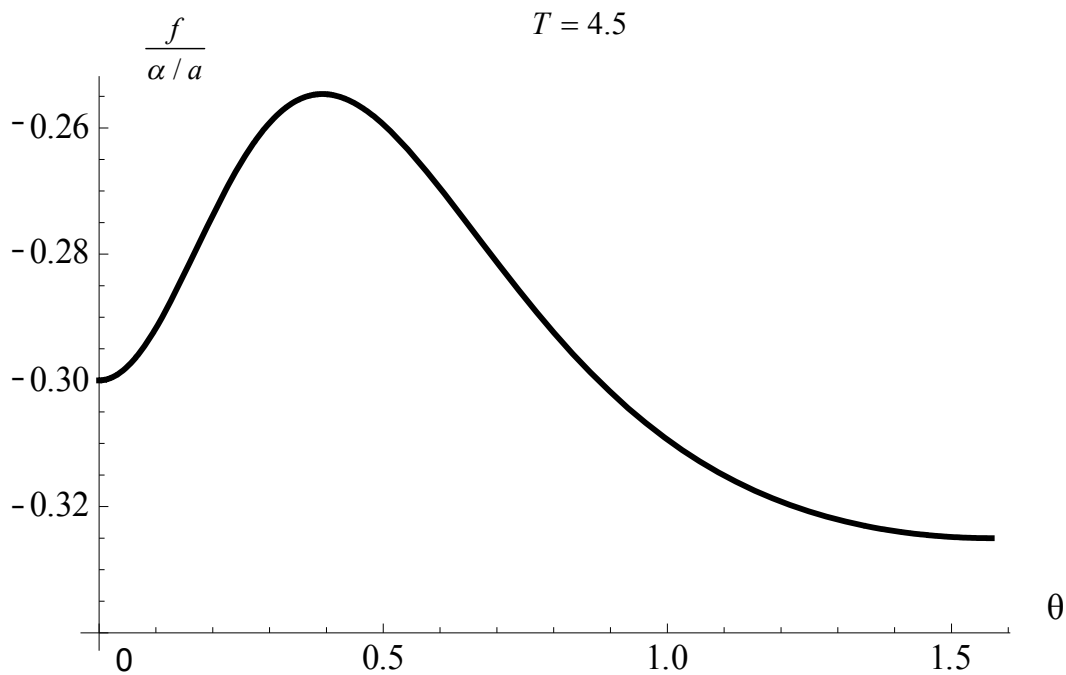


Рисунок 9. Зависимость нормированной плотности сил при значении параметра Рэлея

$$T = 3.7$$

При $T = 3.6$ (Рисунок 7) зависимость от полярного угла носит монотонный характер при этом максимум достигается при $\theta = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, эллипсоидальная заряженная капля не будет находиться в равновесии, а будет проявлять тенденцию к восстановлению сферической формы.

При $T = 4.5$ (Рисунок 8) зависимость плотности сил от полярного угла будет обратной, т.е. сила будет монотонно убывать и при $\theta = \pi/2$ достигает минимального значения. Следовательно, капля будет сохранять тенденцию к уменьшению параметра эллиптичности β .

Однако, для определенного диапазона значений параметра Рэлея, приблизительно равном $3.5 < T < 3.9$ не существует монотонной зависимости. Зависимость силы от полярного угла имеет максимум при промежуточном значении угла $0 < \theta < \pi/2$. Характерная зависимость при $T = 3.7$ представлена на Рисунок 9, из которого видно, что максимум значения плотности силы f для этого значения параметра Рэлея достигается при $\theta \approx \pi/6$. Следовательно, в этой области эллипсоида поверхность будет подвержена наибольшему движению и будет наиболее неустойчивой.

Результат развития этой неустойчивости невозможно предсказать в рамках статического анализа. Как уже отмечалось выше, необходимо решать полную систему нелинейных уравнений гидродинамики. Но наличие такой начальной тенденции указывает, что это может привести к зарождению дочерней капли тороидальной формы, которая может вследствие вторичной неустойчивости отделиться от материнской в виде отдельной капли или распасться на несколько вторичных дочерних капель. Хотя, конечно, вопрос остается открытым, может, в результате этой неустойчивости произойдет только изменение формы поверхности, а отрыва дочерней капли не будет.

Результаты данной работы вошли в сборники трудов научных конференций [13],[14].

ГЛАВА 2. МЕТАСТАБИЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ РАВНОВЕСИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ КАПЛИ

2.1 Введение

Согласно экспериментальным данным, капля электропроводной жидкости в неэлектропроводной среде в однородном внешнем электростатическом поле E вытягивается вдоль E в фигуру, близкую к сфероиду. По мере усиления поля E удлинение капли увеличивается, при достижении им некоторого критического значения на вершинах капли формируются заострённые выступы, с вершин которых начинается сброс избыточного заряда (индуцированного полем E) в виде струек высокодисперсных сильно заряженных капелек [15]. Картина развития неустойчивости капли при увеличении её заряда наблюдалась в экспериментальных исследованиях взаимодействия с электрическими полями самых различных физических объектов: мениска проводящей жидкости на торце капилляра, по которому жидкость подаётся в разрядную систему [16]; мыльных пузырей, помещённых на одну из обкладок плоского конденсатора [17]; капель проводящих жидкостей, свободно падающих в электростатическом поле между пластинами конденсатора [18]; капель проводящей жидкости, помещённых на одну из обкладок плоского конденсатора [19]; воздушных пузырей в диэлектрической жидкости между обкладками конденсатора [20]; капель проводящих жидкостей, взвешенных в диэлектрической жидкости равной плотности: в однородном поле между обкладками плоского конденсатора [21] и неоднородном электростатическом поле [22]; капель жидкостей, висящих в невесомости между обкладками конденсатора [23]; заряженных капель, взвешенных в потоке воздуха в поле сил тяжести и электростатическом поле плоского конденсатора [24]; везикул – микрокапель, покрытых эластичной оболочкой, в однородном электростатическом поле [25].

Исследование неустойчивости заряженной поверхности жидкости представляет значительный интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями данного феномена. В частности данное явление находит применение: в распылении жидкого топлива и лакокрасочных материалов, в технологии струйной печати.

В реальных земных условиях с неустойчивостью заряженной проводящей капли чаще всего приходится сталкиваться при анализе грозовых явлений, таких, как разряд обычной

молнии, свечение воронок смерчей, импульсное беззвучное свечение верхней кромки грозовых облаков, известное под названием плоской молнии [26], огней святого Эльма .

В конце XIX века с началом исследований электрических разрядов в атмосфере на основе чисто визуального сходства было принято считать огни святого Эльма (ОСЭ) мощной формой коронного разряда, реализующегося в предгрозовую и грозовую погоду в окрестности высоких заостренных предметов: крестов церквей, корабельных мачт и т.п. Подобные утверждения вошли без какого-либо обоснования в учебники физики и энциклопедические словари. И только исследования Б.В. Войцеховского [27], экспериментировавшего с облаками сильно заряженных капель воды и обнаружившего свечение типа ОСЭ на произвольных предметах, вносимых в такое облако, указали на неточность трактовки и важную роль в возникновении ОСЭ заряженных водяных капель.

Свечение типа ОСЭ возникает:

1) во время влажных снежных метелей и зимних гроз на произвольных предметах при эмиссии заснеженной или покрытой инеем поверхностью сильно заряженных микрокристаллов снега (рис. 10).

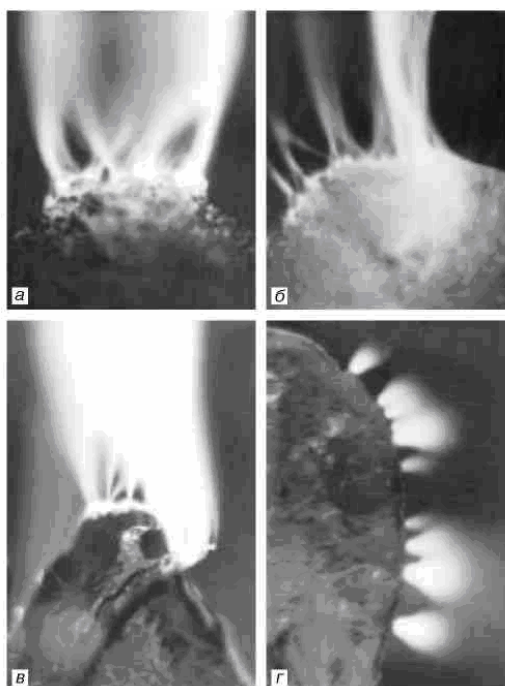


Рисунок 10 а – фотография диффузного свечения в окрестности таящего снежка при подаче на него положительного потенциала-10кВ, полученная в темноте с выдержкой 10 с. Характерный радиус кривизны снежка-1 см; б – на фоне диффузного свечения в правой верхней части фотографии видны траектории движения отдельных тающих кристаллов снега, светящихся в темноте за счёт коронного разряда в их окрестности; в – фотография диффузного свечения с тающего ледяного электрода характерного радиуса кривизны-1 см при подаче на него положительного потенциала-10 кВ, полученная в темноте с выдержкой-10 с; г – фотография диффузного свечения с тающего ледяного электрода характерного радиуса кривизны-1 см при подаче на него отрицательного потенциала-10 кВ, полученная в темноте с выдержкой-10 с.

2) в грозовую погоду на произвольных предметах при повышенной влажности (когда поверхность предмета покрыта каплями или пленкой воды), связано с неустойчивостью поверхности воды в электрическом поле.

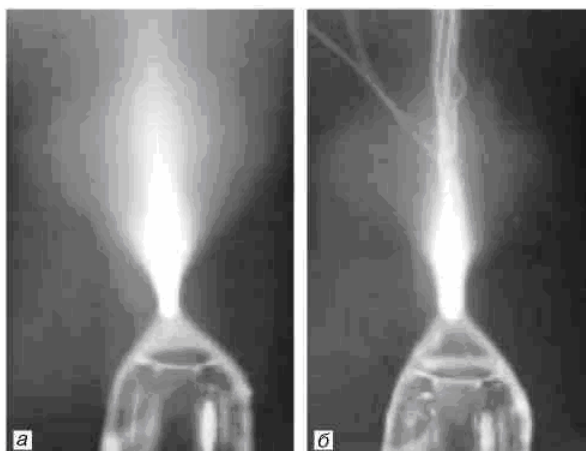


Рисунок 11 а – фотография диффузного свечения, возникающего в окрестности вершины водяного мениска на торце капилляра с радиусом-1,5 мм, при подаче на него положительного потенциала-10кВ, полученная в темноте с выдержкой-10 с.; б – на фоне диффузного свечения в верхней части фотографии видны траектории движения отдельных крупных капель воды, светящихся в темноте за счёт коронного разряда в их окрестности.

В сильном электрическом поле грозовых облаков водяная пленка или капли воды, появляющиеся на различных предметах, могут стать неустойчивыми по отношению к индуцированному заряду и с их поверхности начнется эмиссия высокодисперсных капелек, несущих запредельные в смысле критерия Рэля заряды. Напряженность электрического поля собственного заряда в окрестности эмитированных капелек будет превышать необходимое для зажигания коронного разряда. Коронный разряд во влажной атмосфере в окрестности большого количества мелких капелек, образовавшихся при реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости, будет восприниматься как появление голубого свечения у поверхности покрытого пленкой воды предмета, то есть как ОСЭ.

Отдельный интерес представляет расчёт равновесных форм капель в левитаторах (бесконтактных подвесах) различного типа: акустического [28], аэродинамического, электромагнитного, электростатического [29] и их всевозможных комбинаций [30]. Широкое использование левитаторов связано с современными технологиями получения высокочистых веществ, а также с неоднократными попытками проверки [31] справедливости критерия Рэля устойчивости капли по отношению к собственному заряду. В последние годы этот критерий неоднократно экспериментально проверялся в различного вида левитаторах.

Выяснилось, что в экспериментальных исследованиях по проверке критерия Рэля, использовавших различные варианты электростатических подвесов, форма капли заметно

отличалась от сферической, что неизбежно должно проявиться в отклонении измеряемых значений критических параметров от предсказываемых строгой теорией [32].

2.2 Постановка задачи

Рассмотрим каплю проводящей жидкости сферической формы радиуса r_0 . Устойчивость капли зависит от баланса кулоновской силы отталкивания и лапласовского давления, обусловленного поверхностным натяжением. Соответственно, полная энергия капли равна сумме кулоновской энергии и свободной энергии поверхностного натяжения

$$W = W_q + W_s, \quad W_q = \frac{\varphi_0 \cdot q}{2}, \quad W_s = \alpha \cdot 4\pi r_0^2, \quad (44)$$

где $\varphi_0 = q/(4\pi\epsilon_0 r_0)$ - потенциал заряженной капли.

Предположим, что капля изменила свою форму.

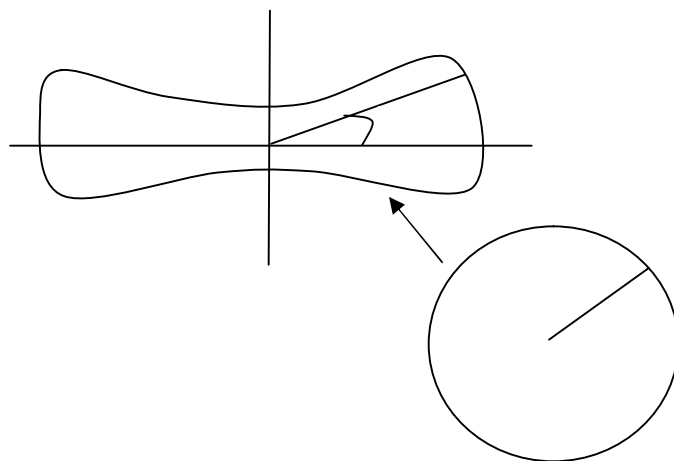


Рисунок 12

Иследуем, как меняется энергия аксиально-симметричной проводящей капли несферической формы в зависимости от заряда, сообщенного капле, и формы капли.

2.3 Решение задачи

Выберем некоторый конкретный вид проводящей поверхности указанного вида. Т.к. потенциал проводящей поверхности является эквипотенциальной поверхностью, то в качестве такой поверхности можно выбрать поверхность, потенциал которой равен:

$$\frac{a_0}{r} \pm \frac{a_2}{r^3} P_2(v) = \varphi, \quad (45)$$

где φ — потенциал нашей заряженной (капли), $P_2(\cos \theta)$ — полиномы Лежандра

второго порядка. θ — угол между осью z и радиус-вектором. В дальнейшем будем использовать обозначение $\cos \theta = \nu$. Т.к. это выражение представляет собой сумму двух сферических функций, которые тождественно удовлетворяют уравнению Лапласа [33].

Нормируем наш потенциал на потенциал φ_0 исходной сферической капли радиуса r_0 .

Уравнение приобретет вид:

$$\frac{1}{x} \pm \frac{kP_2(\nu)}{x^3} = \Psi, \quad (46)$$

где $x = r/r_0$, $k = \varepsilon/r_0^2$, $\varepsilon = a_2/a_0$, $\Psi = \frac{\varphi}{q/(4\pi\varepsilon_0 r_0)}$ — нормированный потенциал.

Тогда поверхность капли сфероидной формы запишется в виде

$$\Psi x^3 - x^2 \pm kP_2(\nu) = 0. \quad (47)$$

Рассмотрим случай со знаком “+”:

$$\Psi x^3 - x^2 + kP_2(\nu) = 0. \quad (48)$$

Данное уравнение имеет три корня, два из которых мнимые:

$$x_1 = \frac{1}{3\Psi} + \frac{2^{1/3}}{3\Psi(2-27\Psi^2 kP_2 + \sqrt{-4+(2-27\Psi^2 kP_2)^2})^{1/3}} + \frac{(2-27\Psi^2 kP_2 + \sqrt{-4+(2-27\Psi^2 kP_2)^2})^{1/3}}{3 \cdot 2^{1/3} \Psi}$$

$$x_2 = \frac{1}{3\Psi} - \frac{1+i\sqrt{3}}{3 \cdot 2^{2/3} \Psi(2-27\Psi^2 kP_2 + \sqrt{-4+(2-27\Psi^2 kP_2)^2})^{1/3}} - \frac{(1-i\sqrt{3})(2-27\Psi^2 kP_2 + \sqrt{-4+(2-27\Psi^2 kP_2)^2})^{1/3}}{6 \cdot 2^{1/3} \Psi}$$

$$x_3 = \frac{1}{3\Psi} - \frac{1-i\sqrt{3}}{3 \cdot 2^{2/3} \Psi(2-27\Psi^2 kP_2 + \sqrt{-4+(2-27\Psi^2 kP_2)^2})^{1/3}} - \frac{(1+i\sqrt{3})(2-27\Psi^2 kP_2 + \sqrt{-4+(2-27\Psi^2 kP_2)^2})^{1/3}}{6 \cdot 2^{1/3} \Psi}$$

Нам подходит действительный корень:

$$x = \frac{1}{3\Psi} + \frac{2^{1/3}}{3\Psi(2-27\Psi^2 kP_2 + \sqrt{-4+(2-27\Psi^2 kP_2)^2})^{1/3}} + \frac{(2-27\Psi^2 kP_2 + \sqrt{-4+(2-27\Psi^2 kP_2)^2})^{1/3}}{3 \cdot 2^{1/3} \Psi} \quad (49)$$

Разложим это решение в ряд по параметру k до шестого порядка, получим:

$$x = \frac{1}{\Psi} - \Psi P_2 k - 2 \cdot \Psi^3 P_2^2 k^2 - 7\Psi^5 P_2^3 k^3 - 30\Psi^7 P_2^4 k^4 - 143\Psi^9 P_2^5 k^5 - 728\Psi^{11} P_2^6 k^6 + O(k)^{13/2} \quad (50)$$

Данное уравнение (50) описывает форму поверхности капли.

Параметр k лежит в пределах $k \in (-0.14; 0.28)$. В противном случае поверхность имеет разрывы.

$$\text{Объем исходной сферической капли } V_0 = (4/3)\pi r_0^3 \quad (51)$$

Выведем формулу для объёма фигуры вращения:

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{r(\theta)} r^2 dr = -2\pi \int_0^{\pi} d\cos\theta \frac{1}{3} r^3(\theta)$$

Обозначим $\cos\theta = \nu$

$$\text{Тогда имеем } V = \frac{2}{3} \pi \int_{-1}^1 r^3 d\nu$$

Объем полученного сфероида $V = \frac{2}{3} \pi \int_{-1}^1 r^3 d\nu = \frac{2}{3} \pi \cdot \frac{r_0^3}{\Psi} \int_{-1}^1 x^2(\nu, k) d\nu \equiv \frac{4}{3} \pi r_0^3$, так как объем несжимаемой жидкости сохраняется.

$$\text{Отсюда } \int_{-1}^1 x^2(\nu, k) d\nu = 2\Psi \quad (52)$$

Из этого уравнения можно найти методом простой итерации зависимость $\Psi(k)$ в виде ряда по переменной k , и подставив эту зависимость в уравнение для формы поверхности получить решение уравнения по переменной x в виде разложения в ряд по переменной k .

Проделаем этот процесс:

$$\int_{-1}^1 x^2(\nu, k) d\nu = \frac{2}{\Psi^2} - \frac{6\Psi^2 k^2}{5} - \frac{8\Psi^4 k^3}{7} - \frac{36\Psi^6 k^4}{5} - \frac{144\Psi^8 k^5}{7} - 106\Psi^{10} k^6 + O(k^7) \quad (53)$$

Преобразуем это уравнение:

$$2\Psi = \frac{2}{\Psi^2} - \frac{6\Psi^2 k^2}{5} - \frac{8\Psi^4 k^3}{7} - \frac{36\Psi^6 k^4}{5} - \frac{144\Psi^8 k^5}{7} - 106\Psi^{10} k^6 + O(k^7)$$

$$\Psi^3 = 1 - \frac{3}{5} \Psi^4 k^2 - \frac{4}{7} \Psi^6 k^3 - \frac{18}{5} \Psi^8 k^4 - \frac{72}{7} \Psi^{10} k^5 - 53\Psi^{12} k^6 \quad (54)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Psi &= \left(1 - \frac{3}{5} \Psi^4 k^2 - \frac{4}{7} \Psi^6 k^3 - \frac{18}{5} \Psi^8 k^4 - \frac{72}{7} \Psi^{10} k^5 - 53\Psi^{12} k^6\right)^{\frac{1}{3}} \\ &\approx 1 - \frac{1}{5} \Psi^4 k^2 - \frac{4}{21} \Psi^6 k^3 - \frac{6}{5} \Psi^8 k^4 - \frac{72}{21} \Psi^{10} k^5 - \frac{53}{3} \Psi^{12} k^6 \end{aligned}$$

Применим метод простой итерации:

Полагаем $\Psi_0 = 1$

Подставим Ψ_0 в предыдущую формулу, получим:

$$\Psi_1 = 1 - \frac{1}{5} k^2 - \frac{4}{21} k^3 - \frac{6}{5} k^4 - \frac{72}{21} k^5 - \frac{53}{3} k^6 \quad (55)$$

Подставим выражение (55) в формулу для формы поверхности (50) и разложим в ряд по переменной k до шестого порядка:

$$\begin{aligned}
x(v, k) = & 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{3v^2}{2}\right)k + \left(-\frac{3}{10} + 3v^2 - \frac{9v^4}{2}\right)k^2 + \frac{1}{840}(811 - 6363v^2 + 19845v^4 - 19845v^6)k^3 + \\
& \frac{(-1807 + 88140v^2 - 413910v^4 + 850500v^6 - 637875v^8)}{4200}k^4 + \\
& \frac{(22795 - 198477v^2 + 1280610v^4 - 3974670v^6 + 6081075v^8 - 3648645v^{10})}{3360}k^5 + \\
& \frac{(3807298 + 77374710v^2 - 617715315v^4 + 2593741500v^6 - 6001128000v^8 + 7313874750v^{10} - 3656937375v^{12})}{441000}k^6 + \\
& + O(k)^7
\end{aligned}
\tag{56}$$

На рисунке 13 построен график зависимости $x(v), v = \cos \theta, v \in (-1, 1)$ при значении параметра $k=0.2$ на плоскости.

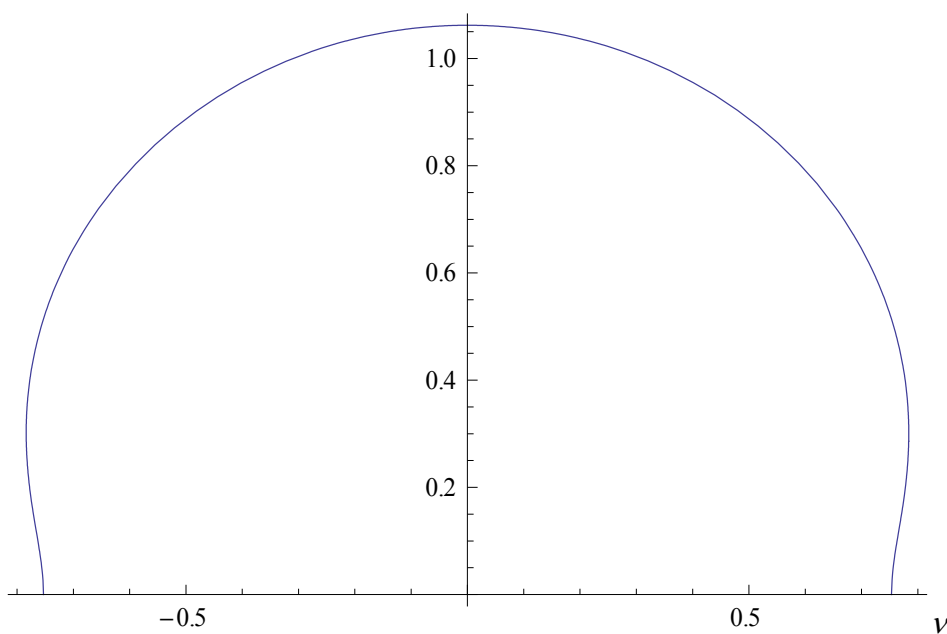


Рисунок 13

На рисунках 14а,14б,14в показана форма поверхности капли в трёхмерном пространстве при $k \in (-0.14; 0.28)$.

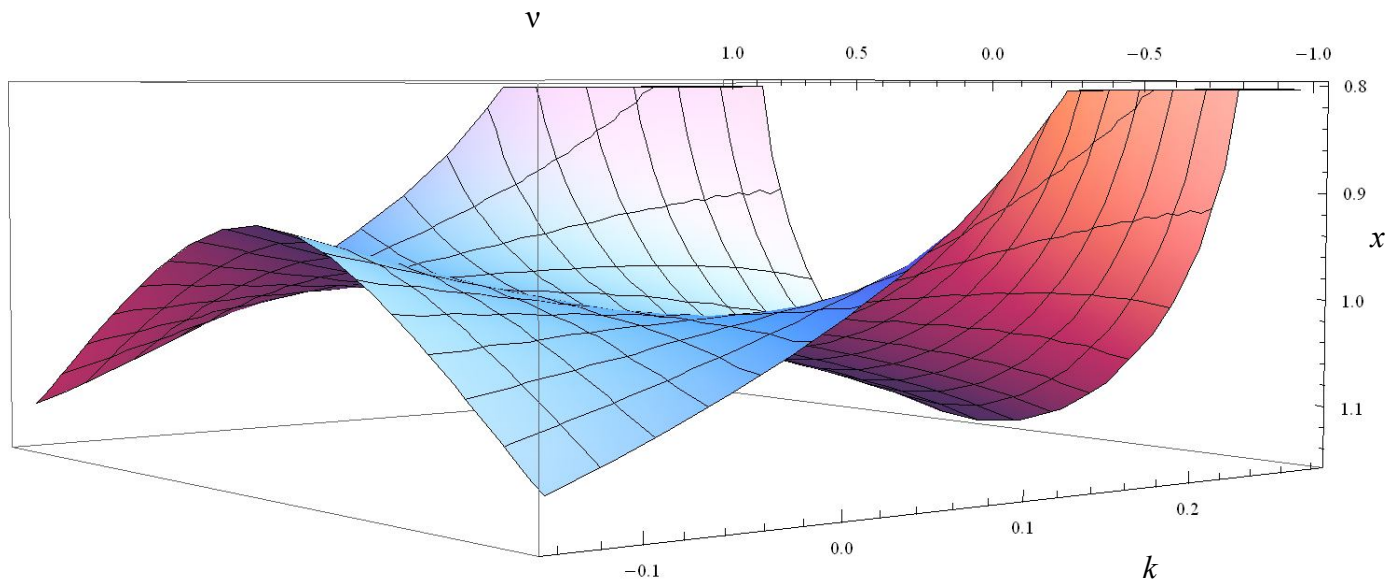


Рисунок 14а

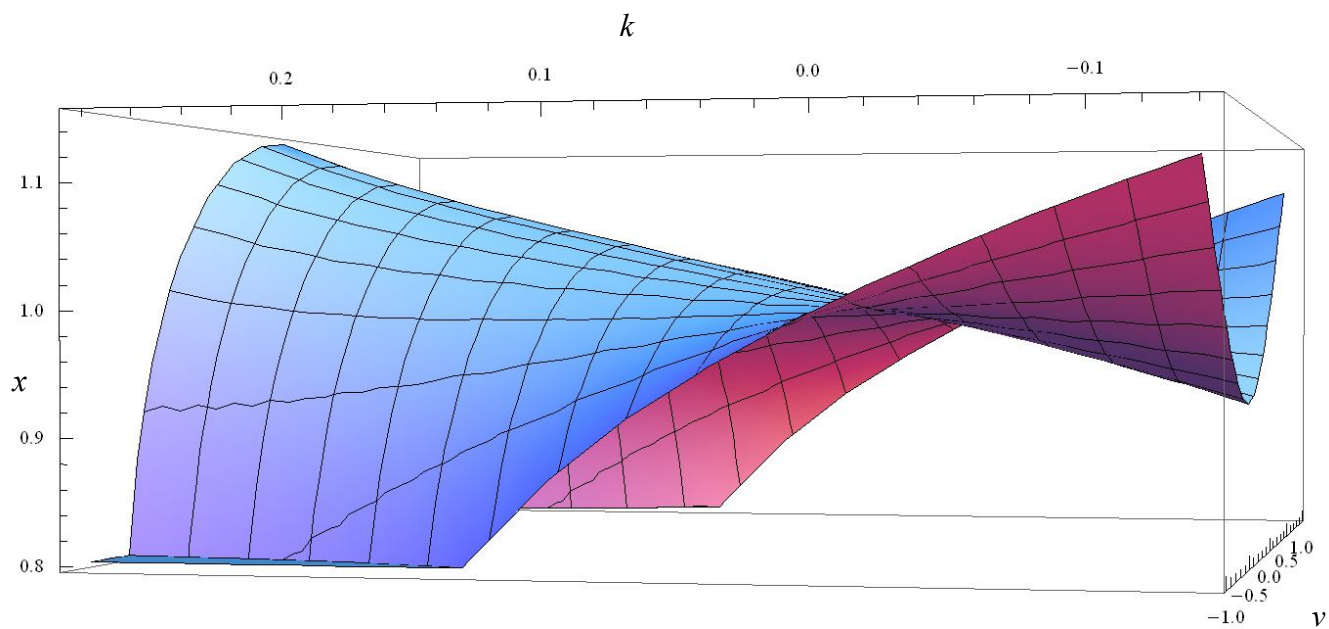


Рисунок 14б

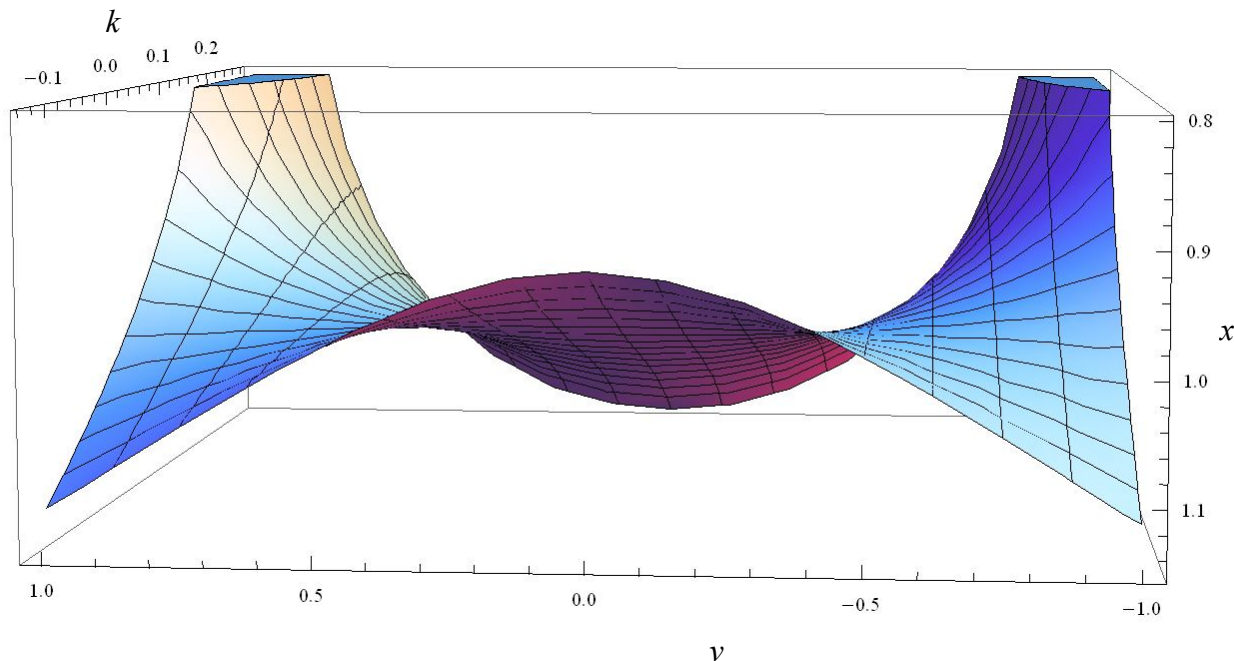


Рисунок 14в

Энергия поверхностного натяжения капли $W_S = \alpha \cdot S$.

Площадь поверхности сфероидальной капли описывается формулой

$$S = 2\pi \int_0^\pi \frac{r^2 \sin \theta |\nabla F|}{\nabla F \cdot \vec{U}_r} d\theta, \quad (57)$$

где $F(r, \theta, \phi) = a_0 r^2 + a_2 P_2(v) - \varphi \cdot r^2 = \varphi \cdot r^3 - a_0 r^2 - a_2 P_2(v) = 0$ — уравнение поверхности, \vec{U}_r — орт радиус-вектора, а $\nabla F \cdot \vec{U}_r / |\nabla F|$ — косинус угла между нормалью к поверхности сфероида и радиус-вектором в точке (r, θ, ϕ) .

Преобразуем формулу для площади поверхности:

$$S = 2\pi \int_{+1}^{-1} \frac{r^2 |\nabla F|}{\nabla F \vec{U}_r} (-d \cos \theta) = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{r^2 |\nabla F(v)|}{\nabla F \vec{U}_r} dv$$

$$v = \cos \theta$$

Обезразмерим уравнение поверхности. Параметр a_0 имеет размерность В•м, размерность параметра a_2 В•м³, F имеет размерность В•м³. Следовательно:

$$\frac{F}{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0^3}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{\varphi \cdot r^3 - a_0 r^2 - a_2 P_2(v)}{q \cdot r_0^2} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{\varphi}{q} \cdot \frac{r^3}{r_0^3} - \frac{a_0}{q} \cdot \frac{r^2}{r_0^2} + \frac{a_2}{q \cdot r_0^2} P_2(v) \right)$$

Обозначим $\frac{F}{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0^3}} = \bar{F}$

$$\bar{F} = \Psi \cdot x^3 - x^2 + \frac{a_2}{a_0 r_0^2} P(v).$$

Перепишем формулу для площади поверхности капли, в которую будут входить безразмерные параметры:

$$S = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{r^2 |\nabla_x \bar{F}(v)|}{\nabla \bar{F} \cdot \vec{u}_x} dv = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{r_0^2 \cdot x^2 |\nabla_x \bar{F}(v)|}{\nabla \bar{F} \cdot \vec{u}_x} dv = 2\pi r_0^2 \int_{-1}^1 x^2 \frac{|\nabla_x \bar{F}(v)|}{\nabla \bar{F} \cdot \vec{u}_x} dv$$

$$S = 2\pi r_0^2 \int_{-1}^1 s_1 dv, \text{ где } s_1 = x^2 \frac{|\nabla_x \bar{F}(v)|}{\nabla \bar{F} \cdot \vec{u}_x}.$$

$$s_1 = x^2 \frac{\left((3\Psi x^2 - 2x)^2 + \frac{1}{x^2} k^2 9v^2 (1-v^2) \right)^{1/2}}{3\Psi x^2 - 2x}, \quad v = \cos \theta \quad (58)$$

После разложения выражения для s_1 в ряд по параметру k , получим:

$$\begin{aligned} s_1 = & 1 + (1-3v^2)k + \frac{(-7+180v^2-225v^4)}{20}k^2 + \frac{(137-2457v^2+8883v^4-7371v^6)}{84}k^3 + \\ & + \frac{3(-13-6210v^2+40275v^4-85500v^6+54000v^8)}{200}k^4 + \\ & + \frac{(7033-169311v^2+1603104v^4-5778108v^6+8700615v^8-4465125v^{10})}{560}k^5 + \\ & + \frac{(9894539+377376720v^2-4837414575v^4+25089781500v^6-62465610375v^8+73198282500v^{10}-31724713125v^{12})}{39200}k^6 + \\ & + O(k^7) \end{aligned} \quad (59)$$

Подставим выражение (59) в формулу для площади поверхности:

$$S = 2\pi r_0^2 \left(2 + \frac{4k^2}{5} + \frac{104k^3}{105} + \frac{1272k^4}{175} + \frac{45288k^5}{1925} + \frac{115560736k^6}{875875} \right) \quad (60)$$

Энергия проводящей капли несферической формы определяется выражением:

$$W = \frac{q\varphi}{2} + \alpha S, \text{ где}$$

$$\varphi = \Psi \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0} = \frac{\left(1 - \frac{k^2}{5} - \frac{4k^3}{21} - \frac{6k^4}{5} - \frac{24k^5}{7} - \frac{53k^6}{3} \right)}{4\pi\epsilon_0 r_0} q \quad (61)$$

-потенциал заряженной капли.

Следовательно,

$$W = \frac{\left(1 - \frac{k^2}{5} - \frac{4k^3}{21} - \frac{6k^4}{5} - \frac{24k^5}{7} - \frac{53k^6}{3}\right)}{8\pi\epsilon_0 r_0} q^2 + 2\alpha \left(2 + \frac{4k^2}{5} + \frac{104k^3}{105} + \frac{1272k^4}{175} + \frac{45288k^5}{1925} + \frac{115560736k^6}{875875}\right) \pi r_0^2 \quad (62)$$

Введем безразмерный параметр Рэлея $T = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 \alpha r_0^3}$. Тогда энергия сфероидальной

капли, выраженная через T и k , имеет вид:

$$W = 1 - \frac{k^2}{5} - \frac{4k^3}{21} - \frac{6k^4}{5} - \frac{24k^5}{7} - \frac{53k^6}{3} + \frac{2 \cdot \left(1 + \frac{2k^2}{5} + \frac{52k^3}{105} + \frac{636k^4}{175} + \frac{22644k^5}{1925} + \frac{57784868k^6}{875875}\right)}{T} \quad (63)$$

Найдём экстремальные точки выражения (63): $\frac{\partial W}{\partial k} = 0$.

$$2 \cdot \frac{1}{5} k - 3 \cdot \frac{4}{21} k^2 - 4 \cdot \frac{6}{5} k^3 - 5 \cdot \frac{24}{7} k^4 - 6 \cdot \frac{53}{3} k^5 + \frac{2}{T} \cdot \left(2 \cdot \frac{2}{5} k + 3 \cdot \frac{52}{105} k^2 + 4 \cdot \frac{636}{175} k^3 + 5 \cdot \frac{22644}{1925} k^4 + 6 \cdot \frac{57784868}{875875} k^5\right) = 0$$

Разделим это уравнение на k ; т.к. случай $k = 0$ нам не подходит:

$$2 \cdot \frac{1}{5} - 3 \cdot \frac{4}{21} k - 4 \cdot \frac{6}{5} k^2 - 5 \cdot \frac{24}{7} k^3 - 6 \cdot \frac{53}{3} k^4 + \frac{2}{T} \cdot \left(2 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{52}{105} k + 4 \cdot \frac{636}{175} k^2 + 5 \cdot \frac{22644}{1925} k^3 + 6 \cdot \frac{57784868}{875875} k^4\right) = 0$$

Данное уравнение имеет 4 корня (см. Приложение).

Анализ для случая, в изначальном уравнении (48) перед параметром k стоит знак « \leftrightarrow » даёт выражение для энергии капли, совпадающее с формулой (63) с точностью до знака перед нечётными степенями параметра k :

$$W = 1 - \frac{k^2}{5} + \frac{4k^3}{21} - \frac{6k^4}{5} + \frac{24k^5}{7} - \frac{53k^6}{3} + \frac{2 \cdot \left(1 + \frac{2k^2}{5} - \frac{52k^3}{105} + \frac{636k^4}{175} - \frac{22644k^5}{1925} + \frac{57784868k^6}{875875}\right)}{T} \quad (64)$$

Согласно энергетическому подходу, необходимым условием изменения формы капли от шарообразной к иной является неравенство:

$$W_{\text{шар}} > W_{\text{фигуры}},$$

где выражение, стоящее в левой части неравенства, является полной энергией капли шарообразной формы

$$W_{\text{шар}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \frac{q^2}{r} + \alpha \cdot 4\pi r^2,$$

а выражение, стоящее в правой части неравенства, является полной энергией капли, изменившей свою форму:

$$W_{\text{фигуры}} = 1 - \frac{k^2}{5} \mp \frac{4k^3}{21} - \frac{6k^4}{5} \mp \frac{24k^5}{7} - \frac{53k^6}{3} + \frac{2 \cdot \left(1 + \frac{2k^2}{5} \pm \frac{52k^3}{105} + \frac{636k^4}{175} \pm \frac{22644k^5}{1925} + \frac{57784868k^6}{875875} \right)}{T}$$

Следует отметить, что при переходе из неустойчивого состояния в устойчивое движение жидкости может носить колебательный характер. Исследованию таких колебаний (в основном малых линейных колебаний) посвящено много работ (см. например [32]).

На рисунке 15 построен график зависимости энергии капли W от параметра k , лежащего в диапазоне $k \in (-0.14; 0.28)$ при значении параметра Рэлея $T = 4.6$

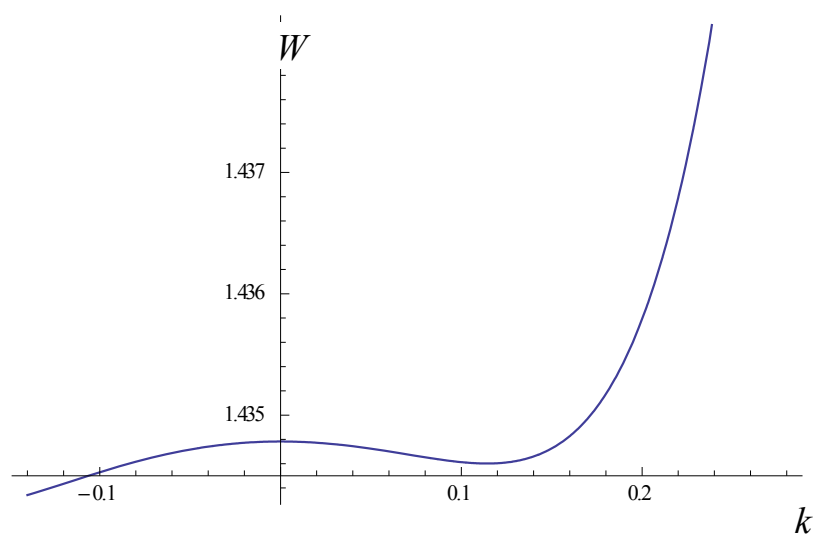


Рисунок 15

Минимум энергии достигается в диапазоне параметра $k \approx (0.1; 0.14)$, что позволяет рассчитывать на стабильность данной формы капли.

При данном подходе мы можем говорить, что сферической капле энергетически выгодно изменить свою форму и перейти в состояние (50). Данное состояние является метастабильным. При этом неизвестно, является это состояние конечным или через некоторое время произойдут дальнейшие изменения формы поверхности. Полный ответ на этот вопрос можно получить только в результате решения полной нелинейной системы уравнений гидродинамики для жидкой заряженной капли.

Результаты данной главы опубликованы в сборниках трудов конференций [34], [35].

ГЛАВА 3. НОВЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ ПРОВОДНИКОВ

Данная глава посвящена поиску точного аналитического решения, описывающего распределение зарядов по поверхности сфероида.

Общая постановка задачи:

$$\Delta\varphi = 0 \quad (65)$$

$\varphi_{\Sigma} = const$, где φ_{Σ} - потенциал на поверхности сфероида.

Хорошо известно, что уравнению Лапласа удовлетворяют сферические функции вида:

$$\sum_{n=0} \frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}} \quad (66)$$

и любая линейная комбинация этих функций.

Полином Лежандра порядка n определяется в общем виде:

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d(\cos^n\theta)} (\cos^2\theta - 1)^n \quad (67)$$

В частности, любая линейная комбинация вида:

$$a_0 \frac{P_0(\cos\theta)}{r} + a_1 \frac{P_1(\cos\theta)}{r^2} + a_2 \frac{P_2(\cos\theta)}{r^3} + a_3 \frac{P_3(\cos\theta)}{r^4} = \varphi = const \quad (68)$$

является точным решением электростатической задачи для заряженного тела с формой поверхности, определяемой уравнением $r = r(\theta)$ (69)

Т.к. решение этой задачи сводится к полиному 4-го порядка, то зависимость $r(\theta)$ может быть представлена в аналитическом виде.

В данной главе рассмотрим частные случаи симметричной и несимметричной фигур.

3.1 Расчет поверхностной плотности распределения заряда для фигуры несимметричной сфероидной формы

Рассмотрим несимметричное жёсткое проводящее тело.

Запишем потенциал тела такой формы

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{a_0}{r} \pm \frac{a_1}{r^2} P_1(v) \right) = \varphi \quad (70)$$

Параметр a_0 имеет размерность Кл, параметр a_1 имеет размерность Кл·м.

Нормируем наш потенциал на потенциал φ_0 тела сферической формы радиуса r_0 .

Введем новые параметры: $x = r/r_0$, $k = a_1/(a_0 r_0)$, $\Psi = \frac{\varphi}{q / (4\pi\epsilon_0 r_0)}$, где $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0} = \varphi_0$ -

потенциал тела сферической формы.

Умножим (70) на $\frac{4\pi\epsilon_0 r}{q}$. Тогда уравнение в безразмерных параметрах приобретет вид:

$$\frac{1}{x} \pm \frac{kP_1(v)}{x^2} = \Psi, \quad (71)$$

Следовательно, поверхность тела несимметричной формы запишется в виде:

$$\Psi x^2 - x \mp kP_1(v) = 0. \quad (72)$$

а) Рассмотрим случай со знаком “-”: $\Psi x^2 - x - kP_1(v) = 0$.

Это уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\Psi kP_1(v)}}{2\Psi}, x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\Psi kP_1(v)}}{2\Psi} \quad (73)$$

Нам подходит только корень x_2 , т.к. $x \geq 0$ по определению при $\forall \theta \in (0; \pi)$

При этом существует ограничение на параметры: $1 + 4\Psi kP_1(v) \geq 0$ (74)

На рисунке 16 построен график зависимости $x(\theta), \theta \in (0, \pi)$ при критических параметрах $\Psi = 1$ и $k = 0.25$. Если Ψ или k будут превышать данные значения, то фигура будет разрывной. Для всех последующих рисунков также примем $\Psi = 1, k = 0.25$.

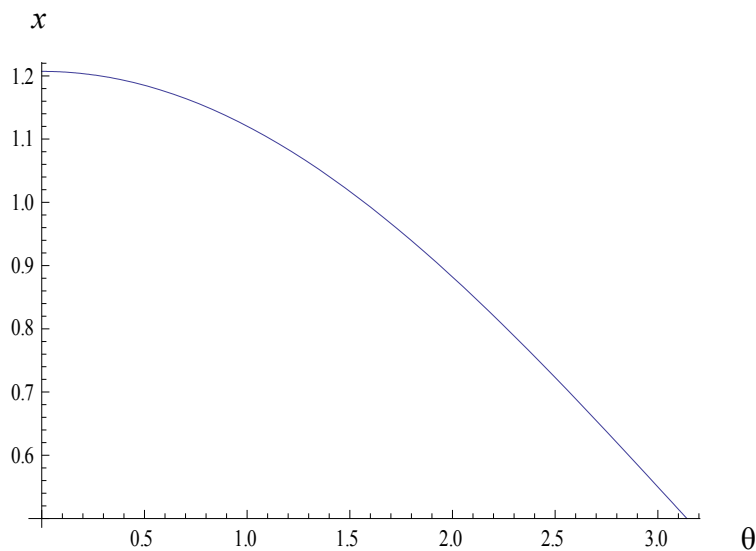


Рисунок 16

На рисунке 17 показана форма поверхности тела на плоскости:

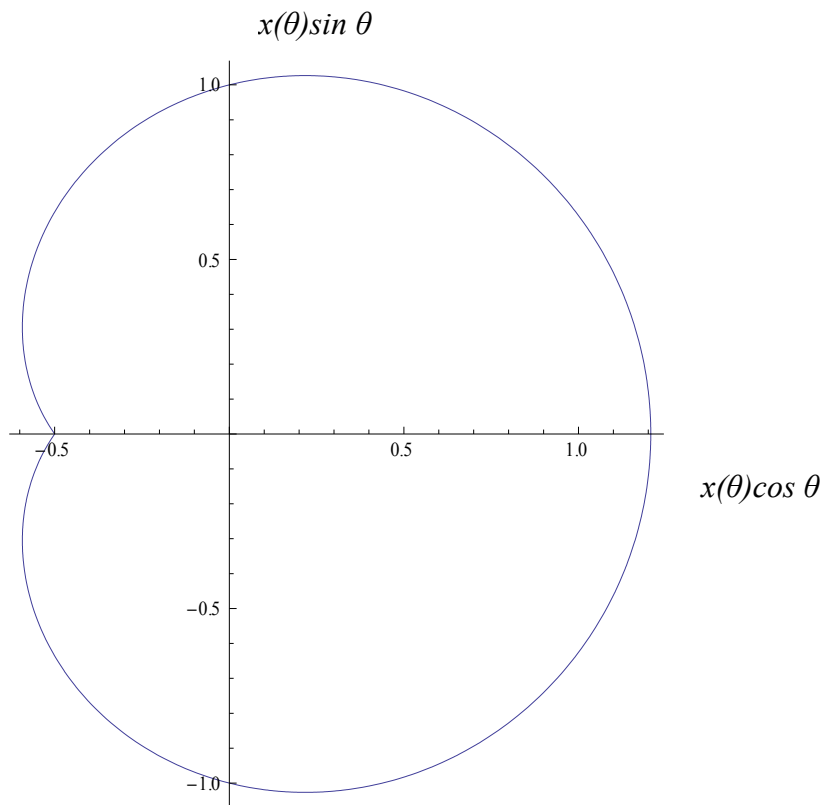


Рисунок 17

На рисунке 18 показан вид твёрдого тела в трехмерном изображении:

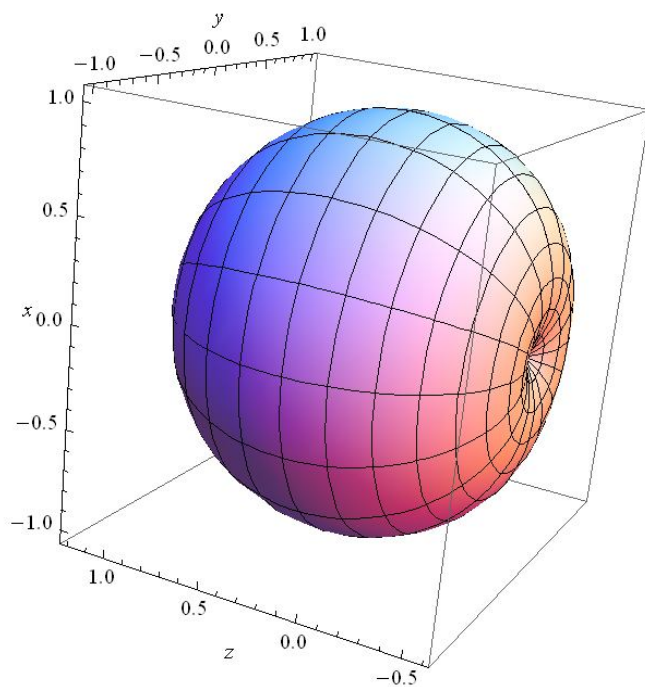


Рисунок 18

Напряженность электрического поля описывается формулой:

$$\vec{E} = \frac{-\vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}F}{|\vec{\nabla}F|} \cdot \vec{e}_r, \quad (75)$$

где φ - потенциал тела, $\vec{e}_r \parallel \vec{n}$ - единичный вектор внешней нормали к поверхности,

$\frac{\vec{\nabla}F}{|\vec{\nabla}F|}$ - уравнение нормали к поверхности, $\frac{\vec{\nabla}F}{|\vec{\nabla}F|} \cdot \vec{e}_r$ - косинус угла между $\vec{\nabla}\varphi$ и \vec{r} .

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = |\vec{\nabla}\varphi|, \quad (76)$$

где σ - плотность распределения зарядов по поверхности, ε_0 - электрическая постоянная.

$$\sigma = \varepsilon_0 \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)^2} \quad (77)$$

Перепишем формулу (78) в безразмерных параметрах:

$$\sigma = \varepsilon_0 \sqrt{\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{r_0^2} \cdot \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\right)^2 \cdot \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)^2}$$

Произведя расчеты, получим:

$$\sigma = \frac{q}{4\pi r_0^2} \sqrt{\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{2k \cos\theta}{x^3}\right)^2 + \frac{1}{x^2} \left(-\frac{k \sin\theta}{x^2}\right)^2}$$

Обозначим через $\sigma_0 = \frac{q}{4\pi r_0^2}$ поверхностную плотность заряда сферического тела,

$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_0}$ - безразмерная величина, характеризующая плотность распределения заряда по

поверхности:

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2k \cos\theta}{x^3}\right)^2 + \left(\frac{k \sin\theta}{x^2}\right)^2} \quad (78)$$

При подстановке $x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\Psi k P_1}}{2\Psi}$ в формулу (78) получим:

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{64\Psi^6 k^2 \sin^2\theta}{(1 + \sqrt{1 + 4\Psi k \cos\theta})^6} + \left(\frac{16\Psi^3 k \cos\theta}{(1 + \sqrt{1 + 4\Psi k \cos\theta})^3} + \frac{4\Psi^2}{(1 + \sqrt{1 + 4\Psi k \cos\theta})^2}\right)^2} \quad (79)$$

На рисунке 19 показана зависимость $\tilde{\sigma}(\theta), \theta \in (0; \pi)$

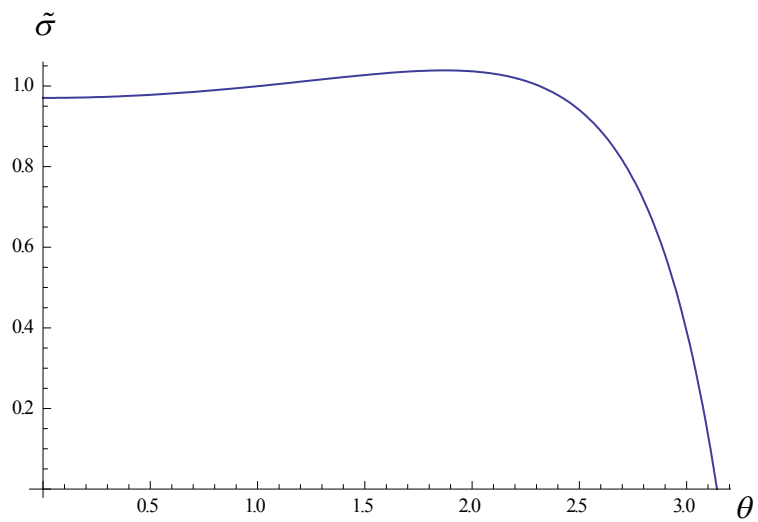


Рисунок 19

На рисунке 20 показано распределение заряда по поверхности тела на плоскости:

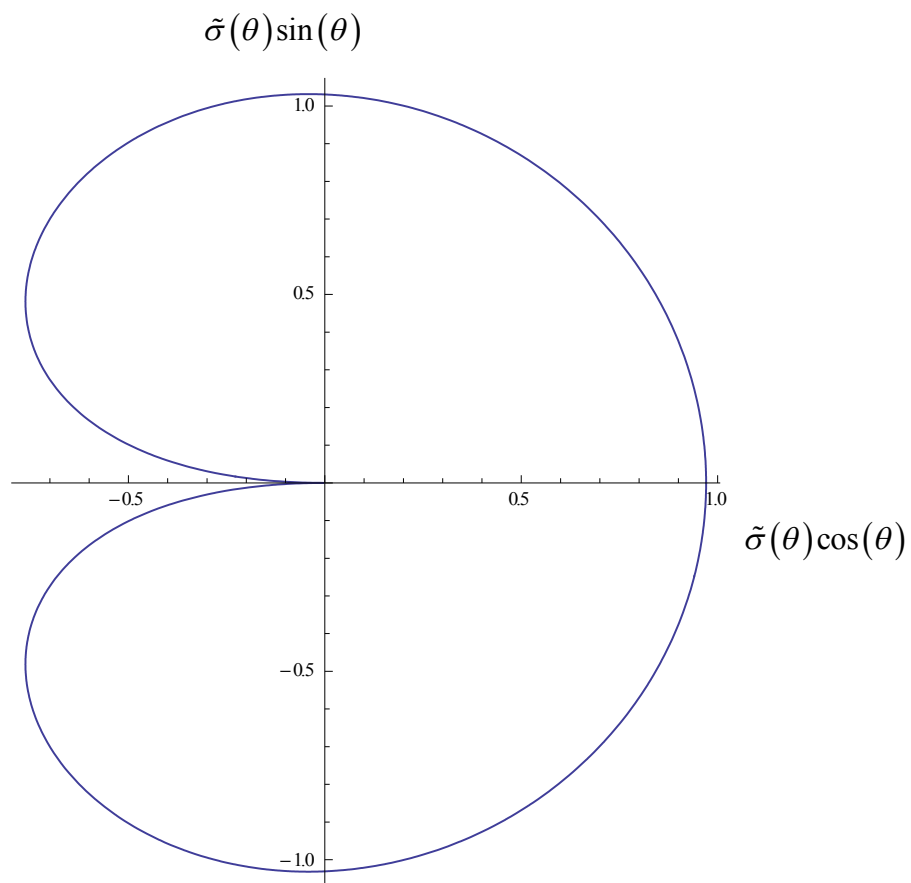


Рисунок 20

На рисунке 21а показан вид плотности распределения заряда по фигуре:

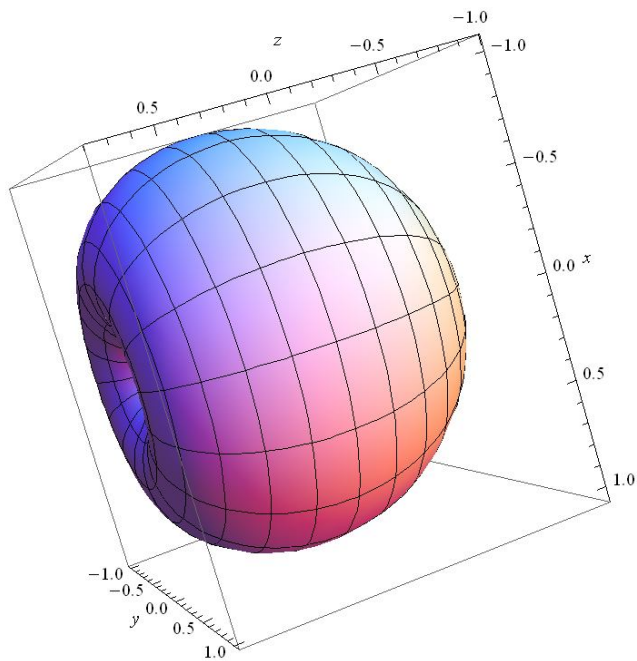


Рисунок 21а

На рисунке 21б показан вид плотности распределения заряда в разрезе:

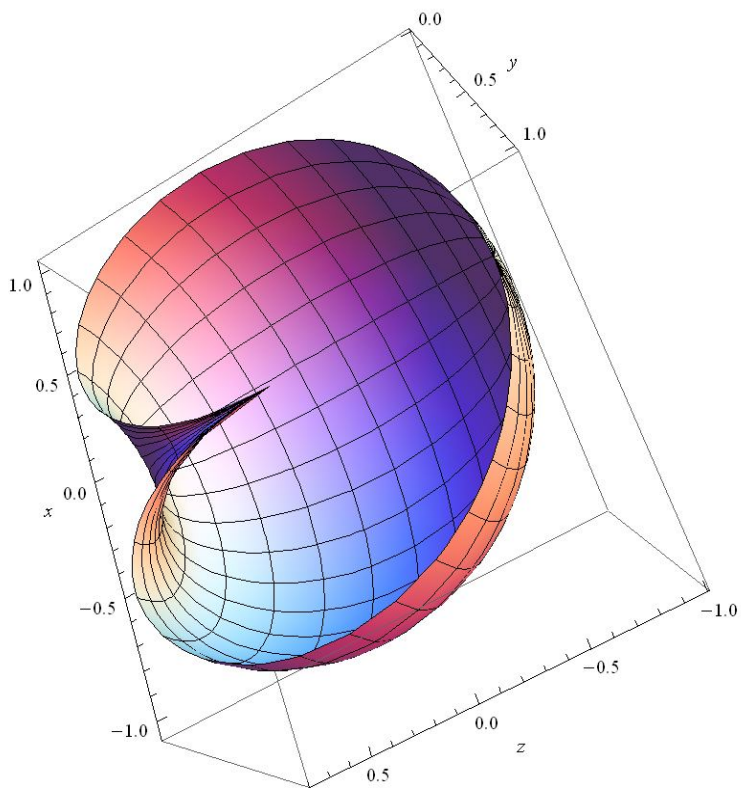


Рисунок 21б

б) Рассмотрим случай, когда в уравнении (72) перед параметром k

стоит знак "+": $\Psi x^2 - x + kP_1(v) = 0$

Данное уравнение имеет 2 корня: $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\Psi k P_1(v)}}{2\Psi}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\Psi k P_1(v)}}{2\Psi}$.

Подходящим является только корень x_2 , т.к. $x \geq 0$ по определению при $\forall \theta \in (0; \pi)$.

Проводя аналогичную процедуру вычислений, получим формулу для поверхностной плотности заряда:

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{64\Psi^6 k^2 \sin^2 \theta}{(1 + \sqrt{1 - 4\Psi k \cos \theta})^6} + \left(\frac{16\Psi^3 k \cos \theta}{(1 + \sqrt{1 - 4\Psi k \cos \theta})^3} - \frac{4\Psi^2}{(1 + \sqrt{1 - 4\Psi k \cos \theta})^2} \right)^2}.$$

Данное распределение заряда по поверхности совпадает с распределением в пункте а). На рисунках 22 - 23 показаны графики плотности распределения заряда на плоскости и в трехмерном пространстве соответственно.

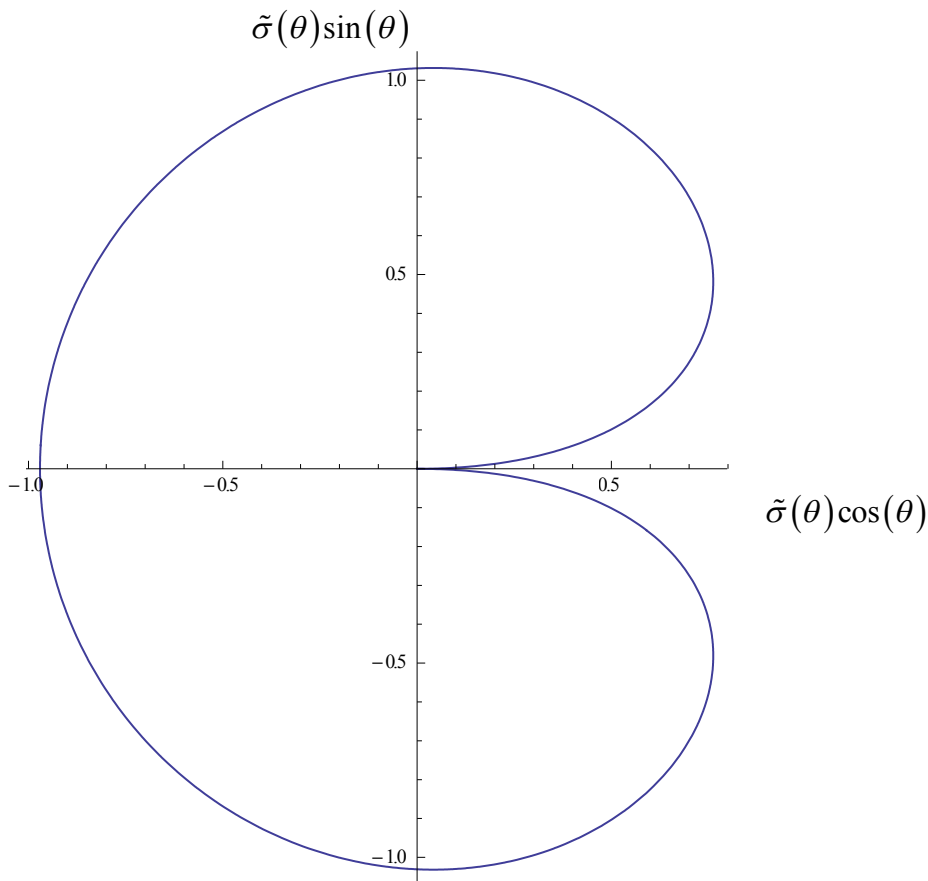


Рисунок 22

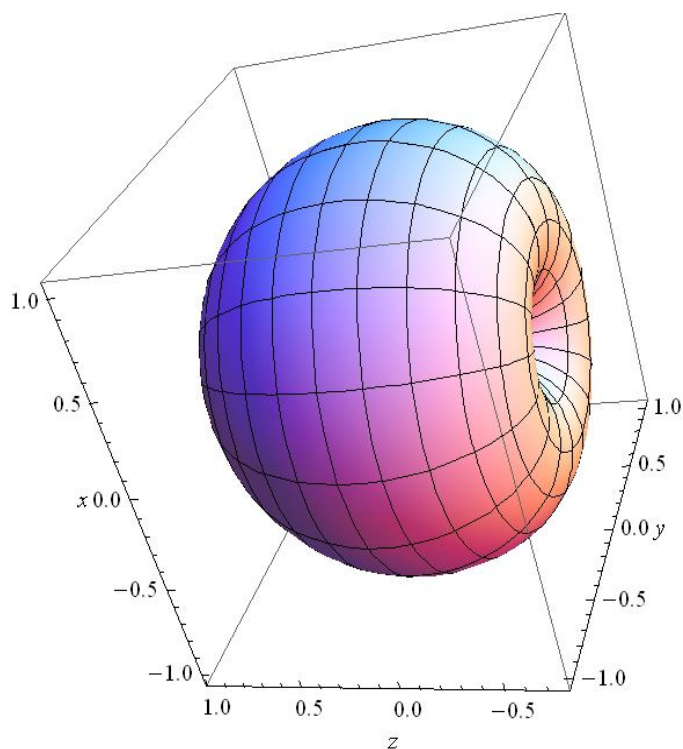


Рисунок 23

Таким образом, найдена точная формула (79), описывающая распределение заряда по поверхности тела несимметричной формы (73).

$$\text{При этом существует ограничение на параметры } \Psi \text{ и } k : |\Psi k| \leq \frac{1}{4} \quad (80)$$

3.2 Расчет поверхностной плотности распределения заряда для фигуры симметричной сфероидной формы

Рассмотрим теперь фигуру симметричной формы.

Запишем потенциал заряженного жёсткого тела:

$$\frac{a_0}{r} \pm \frac{a_2}{r^3} P_2(\cos \theta) = \varphi, \quad (81)$$

Где $P_2(\cos \theta)$ -полином Лежандра 2-го порядка $P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2} \cdot (3 \cos^2 \theta - 1)$

Нормируем наш потенциал на потенциал φ_0 тела сферической формы радиуса r_0 .

Уравнение приобретет вид:

$$\frac{1}{x} \pm \frac{k P_2(\cos \theta)}{x^3} = \Psi, \quad (82)$$

где $x = r/r_0$, $k = \varepsilon/r_0^2$, $\varepsilon = a_2/a_0$, $\Psi = \frac{\varphi}{q/r_0}$ — нормированный потенциал.

Тогда поверхность тела новой формы запишется в виде

$$\Psi x^3 - x^2 \mp kP_2(\cos \theta) = 0. \quad (83)$$

а) Рассмотрим случай со знаком “+”:

$$\Psi x^3 - x^2 + kP_2(\cos \theta) = 0.$$

Данное уравнение имеет три корня, два из которых мнимые:

$$x_1 = \frac{1}{3\Psi} + \frac{2^{1/3}}{3\Psi(2-27\Psi^2kP_2 + \sqrt{-4+(2-27\Psi^2kP_2)^2})^{1/3}} + \frac{(2-27\Psi^2kP_2 + \sqrt{-4+(2-27\Psi^2kP_2)^2})^{1/3}}{3 \cdot 2^{1/3}\Psi}$$

$$x_2 = \frac{1}{3\Psi} - \frac{1+i\sqrt{3}}{3 \cdot 2^{2/3}\Psi(2-27\Psi^2kP_2 + \sqrt{-4+(2-27\Psi^2kP_2)^2})^{1/3}} - \frac{(1-i\sqrt{3})(2-27\Psi^2kP_2 + \sqrt{-4+(2-27\Psi^2kP_2)^2})^{1/3}}{6 \cdot 2^{1/3}\Psi}$$

$$x_3 = \frac{1}{3\Psi} - \frac{1-i\sqrt{3}}{3 \cdot 2^{2/3}\Psi(2-27\Psi^2kP_2 + \sqrt{-4+(2-27\Psi^2kP_2)^2})^{1/3}} - \frac{(1+i\sqrt{3})(2-27\Psi^2kP_2 + \sqrt{-4+(2-27\Psi^2kP_2)^2})^{1/3}}{6 \cdot 2^{1/3}\Psi}$$

Нам подходит действительный корень:

$$x = \frac{1}{3\Psi} + \frac{2^{1/3}}{3\Psi(2-27\Psi^2kP_2 + \sqrt{-4+(2-27\Psi^2kP_2)^2})^{1/3}} + \frac{(2-27\Psi^2kP_2 + \sqrt{-4+(2-27\Psi^2kP_2)^2})^{1/3}}{3 \cdot 2^{1/3}\Psi} \quad (84)$$

При этом существует ограничение на параметры Ψ и k :

$$-4 + (2 - 27\Psi^2kP_2)^2 \geq 0 \quad (85)$$

На рисунке 24 показана форма поверхности фигуры при критических значениях параметров: $k=0.25$, $\Psi=0.76$ на плоскости. Если Ψ или k будут превышать данные значения, то фигура будет разрывной. Для всех последующих рисунков также примем $\Psi = 0.76$, $k = 0.25$.

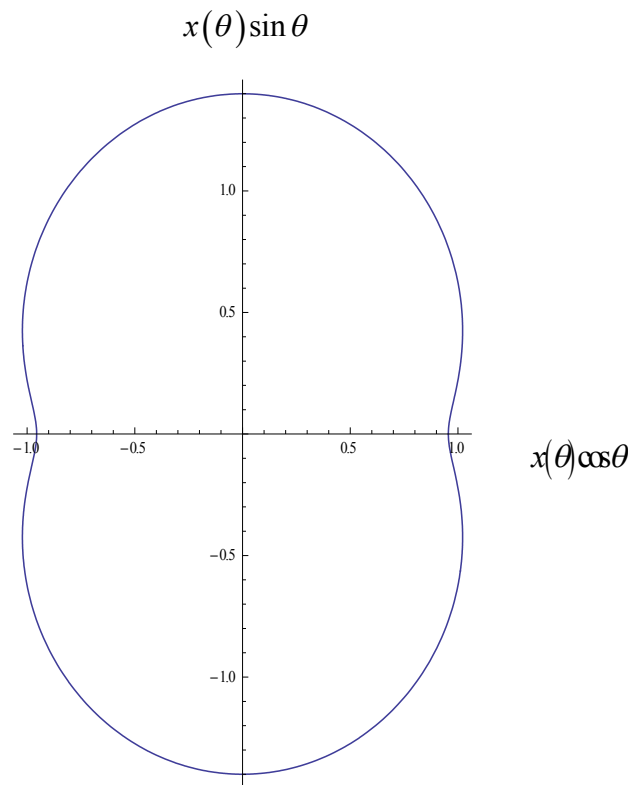


Рисунок 24

На рисунке 25 показан вид сфероида в трехмерном изображении:

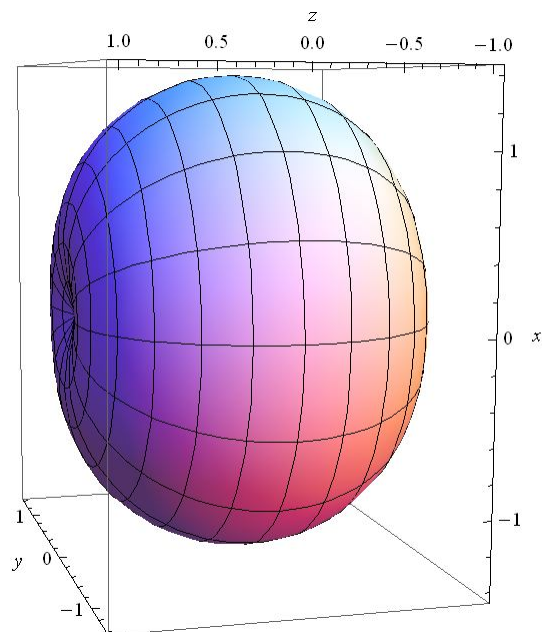


Рисунок 25

Плотность распределения заряда по поверхности сфероида описывается формулой

$$\sigma = \varepsilon_0 \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)^2} \quad (86)$$

Перепишем формулу (86) в безразмерных параметрах:

$$\sigma = \varepsilon_0 \sqrt{\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{r_0^2} \cdot \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\right)^2 \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\right)^2}$$

Произведя расчеты, получим:

$$\sigma = \frac{q}{4\pi r_0^2} \sqrt{\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{3kP_2(\cos \theta)}{x^4}\right)^2 + \frac{1}{x^2} \left(\frac{3k \cos \theta \sin \theta}{x^3}\right)^2}$$

Обозначим через $\sigma_0 = \frac{q}{4\pi r_0^2}$ поверхностную плотность заряда сферического тела,

$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_0}$ - безразмерная величина, характеризующая плотность распределения заряда по

поверхности:

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{3kP_2(\cos \theta)}{x^4}\right)^2 + \frac{1}{x^2} \left(\frac{3k \cos \theta \sin \theta}{x^3}\right)^2} \quad (87)$$

При подстановке

$$x = \frac{1}{3\Psi} + \frac{2^{1/3}}{3\Psi(2-27\Psi^2 kP_2 + \sqrt{-4+(2-27\Psi^2 kP_2)^2})^{1/3}} + \frac{(2-27\Psi^2 kP_2 + \sqrt{-4+(2-27\Psi^2 kP_2)^2})^{1/3}}{3 \cdot 2^{1/3} \Psi}$$

в формулу (87) получим:

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma} = & \sqrt{\left(\frac{3k(-1+3\cos^2\theta)}{2\left(\frac{1}{3\Psi} + \frac{2^{1/3}}{3\Psi\left(2-\frac{27}{2}\Psi^2k(-1+3\cos^2\theta) + \sqrt{-4+(2-\frac{27}{2}\Psi^2k(-1+3\cos^2\theta))^2}\right)^{1/3}} + \frac{\left(2-\frac{27}{2}\Psi^2k(-1+3\cos^2\theta) + \sqrt{-4+(2-\frac{27}{2}\Psi^2k(-1+3\cos^2\theta))^2}\right)^{1/3}}{32^{1/3}\Psi}\right)^2 + \right.} \\
& \left. \frac{1}{\left(\frac{1}{3\Psi} + \frac{2^{1/3}}{3\Psi\left(2-\frac{27}{2}\Psi^2k(-1+3\cos^2\theta) + \sqrt{-4+(2-\frac{27}{2}\Psi^2k(-1+3\cos^2\theta))^2}\right)^{1/3}} + \frac{\left(2-\frac{27}{2}\Psi^2k(-1+3\cos^2\theta) + \sqrt{-4+(2-\frac{27}{2}\Psi^2k(-1+3\cos^2\theta))^2}\right)^{1/3}}{32^{1/3}\Psi}\right)^2} + \right. \\
& \left. \frac{9k^2\cos^2\theta\sin^2\theta}{\left(\frac{1}{3\Psi} + \frac{2^{1/3}}{3\Psi\left(2-\frac{27}{2}\Psi^2k(-1+3\cos^2\theta) + \sqrt{-4+(2-\frac{27}{2}\Psi^2k(-1+3\cos^2\theta))^2}\right)^{1/3}} + \frac{\left(2-\frac{27}{2}\Psi^2k(-1+3\cos^2\theta) + \sqrt{-4+(2-\frac{27}{2}\Psi^2k(-1+3\cos^2\theta))^2}\right)^{1/3}}{32^{1/3}\Psi}\right)^8} \right) \quad (88)
\end{aligned}$$

На рисунке 26 показана зависимость $\tilde{\sigma}(\theta), \theta \in (0; \pi)$

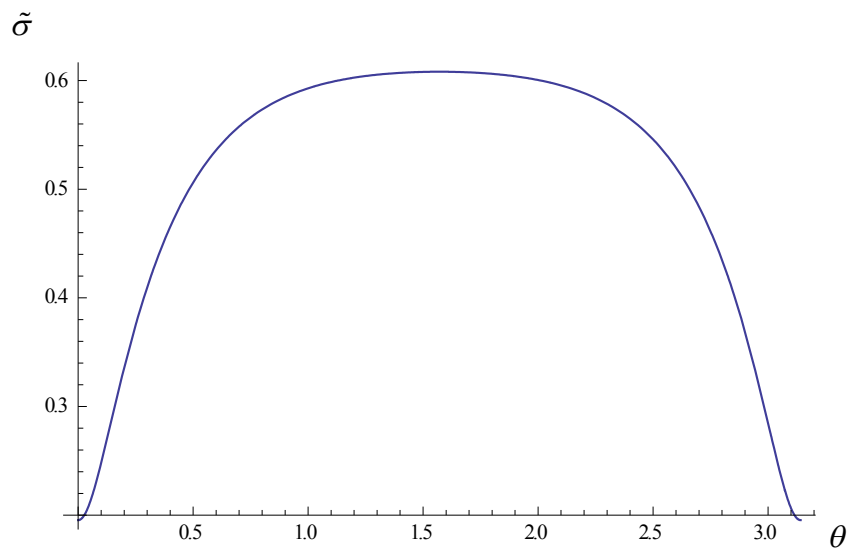


Рисунок 26

На рисунке 27 показано распределение заряда по поверхности тела на плоскости:

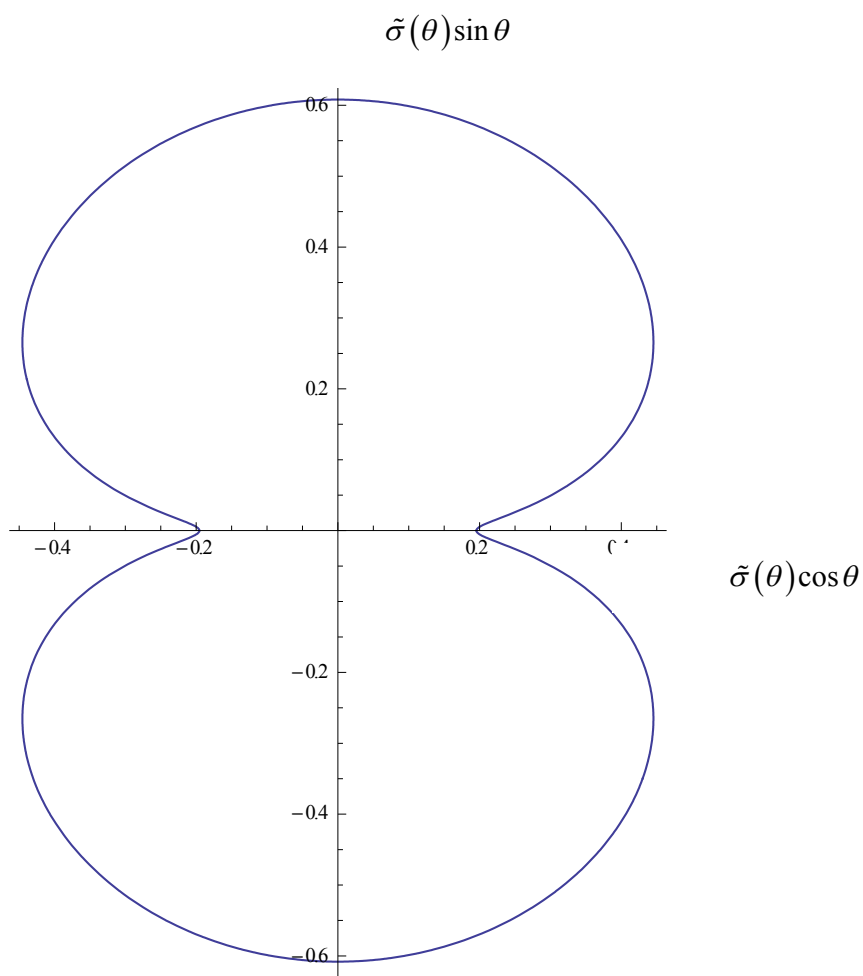


Рисунок 27

На рисунке 28а показан вид плотности распределения заряда по фигуре:

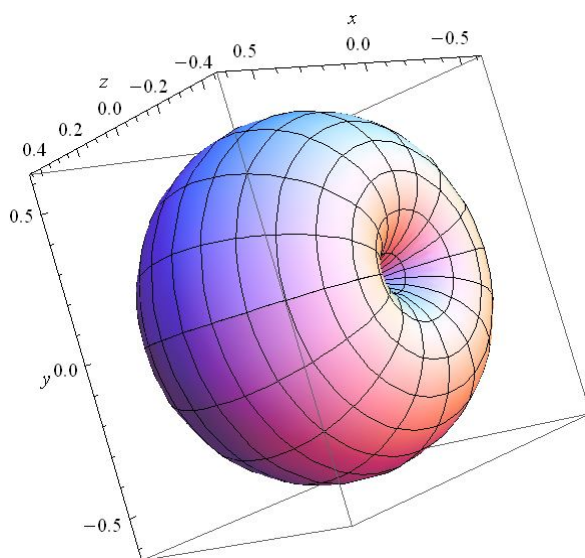


Рисунок 28а

На рисунке 286 показан вид плотности распределения заряда в разрезе:

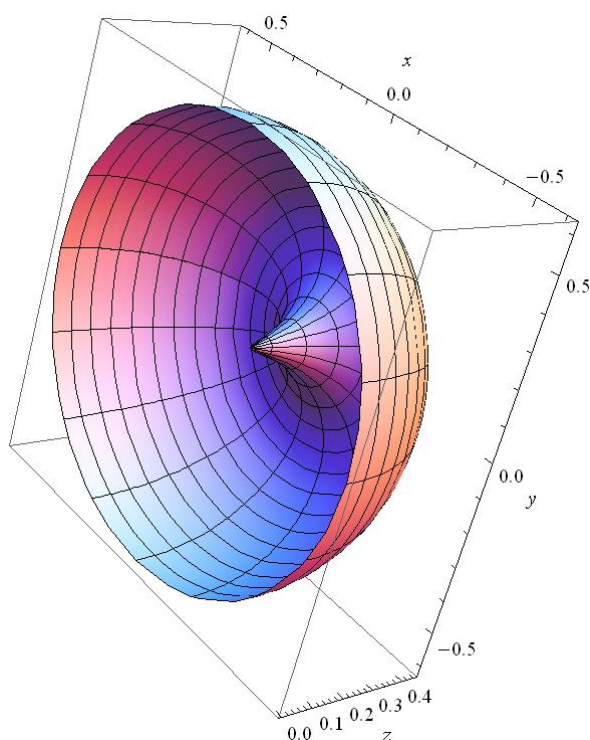


Рисунок 286

б) Рассмотрим случай, когда в уравнении (83) перед параметром k стоит знак ”-” :

$$\Psi x^3 - x^2 - kP_2(\cos \theta) = 0$$

Данное уравнение имеет 3 корня, два из которых мнимые. Действительный корень:

$$x = \frac{1}{3\Psi} + \frac{2^{1/3}}{3\Psi(2 + 27\Psi^2 kP_2 + \sqrt{-4 + (2 + 27\Psi^2 kP_2)^2})^{1/3}} + \frac{(2 + 27\Psi^2 kP_2 + \sqrt{-4 + (2 + 27\Psi^2 kP_2)^2})^{1/3}}{3 \cdot 2^{1/3} \Psi} \quad (89)$$

На рисунках 29 - 30 показаны графики формы поверхности фигуры на плоскости и в трехмерном пространстве соответственно.

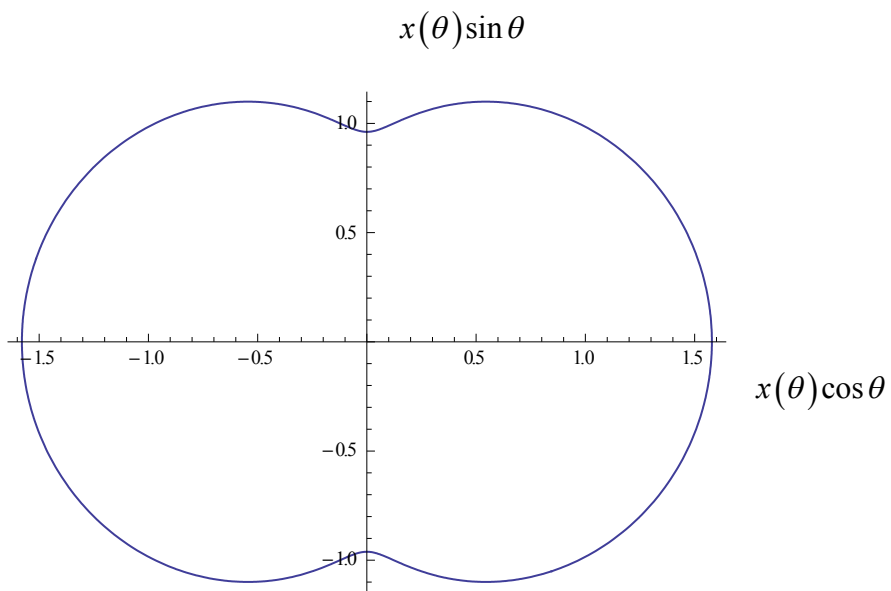


Рисунок 29

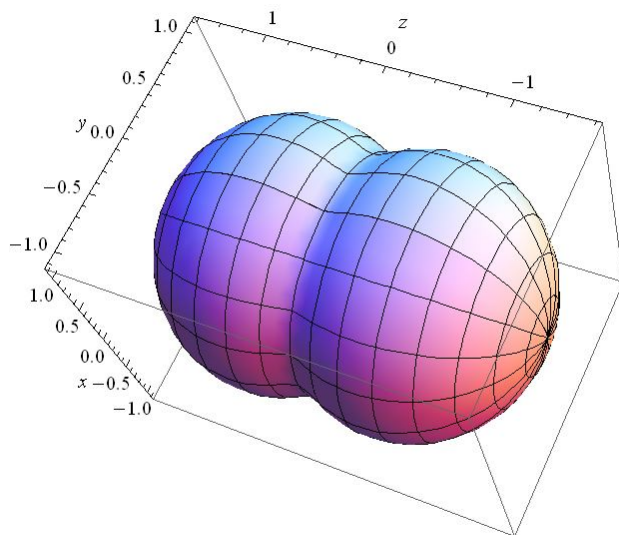


Рисунок 30

Проводя аналогичную процедуру вычислений (см. пункт а)), получим формулу для поверхностной плотности заряда:

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma} = \sqrt{ & \left(\frac{3k(-1+3\cos^2\theta)}{2\left(\frac{1}{3\Psi} + \frac{2^{1/3}}{3\Psi\left(2+\frac{27}{2}\Psi^2k(-1+3\cos^2\theta)+\sqrt{-4+\left(2+\frac{27}{2}\Psi^2k(-1+3\cos^2\theta)\right)^2}\right)^{1/3}} + \frac{\left(2+\frac{27}{2}\Psi^2k(-1+3\cos^2\theta)+\sqrt{-4+\left(2+\frac{27}{2}\Psi^2k(-1+3\cos^2\theta)\right)^2}\right)^{1/3}}{32^{1/3}\Psi}\right)^4} \right. \\
& \left. - \frac{1}{\left(\frac{1}{3\Psi} + \frac{2^{1/3}}{3\Psi\left(2+\frac{27}{2}\Psi^2k(-1+3\cos^2\theta)+\sqrt{-4+\left(2+\frac{27}{2}\Psi^2k(-1+3\cos^2\theta)\right)^2}\right)^{1/3}} + \frac{\left(2+\frac{27}{2}\Psi^2k(-1+3\cos^2\theta)+\sqrt{-4+\left(2+\frac{27}{2}\Psi^2k(-1+3\cos^2\theta)\right)^2}\right)^{1/3}}{32^{1/3}\Psi}\right)^2} \right) + \\
& \left. + \frac{9k^2\cos^2\theta\sin^2\theta}{\left(\frac{1}{3\Psi} + \frac{2^{1/3}}{3\Psi\left(2+\frac{27}{2}\Psi^2k(-1+3\cos^2\theta)+\sqrt{-4+\left(2+\frac{27}{2}\Psi^2k(-1+3\cos^2\theta)\right)^2}\right)^{1/3}} + \frac{\left(2+\frac{27}{2}\Psi^2k(-1+3\cos^2\theta)+\sqrt{-4+\left(2+\frac{27}{2}\Psi^2k(-1+3\cos^2\theta)\right)^2}\right)^{1/3}}{32^{1/3}\Psi}\right)^8} \right) \quad (90)
\end{aligned}$$

На рисунках 31 - 32 показаны графики плотности распределения заряда по поверхности сфероида на плоскости и в трехмерном пространстве соответственно.

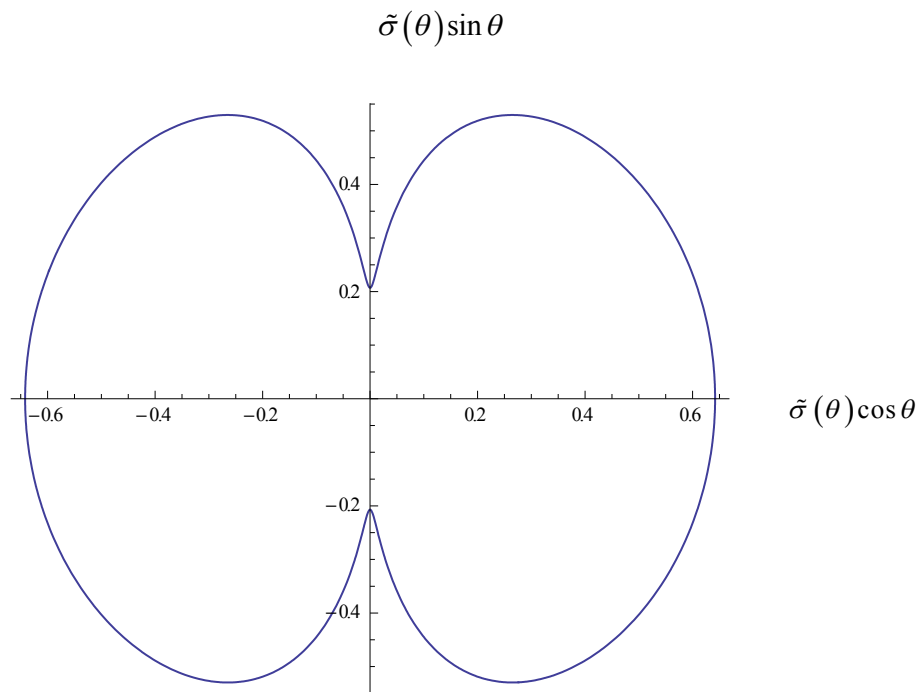


Рисунок 31

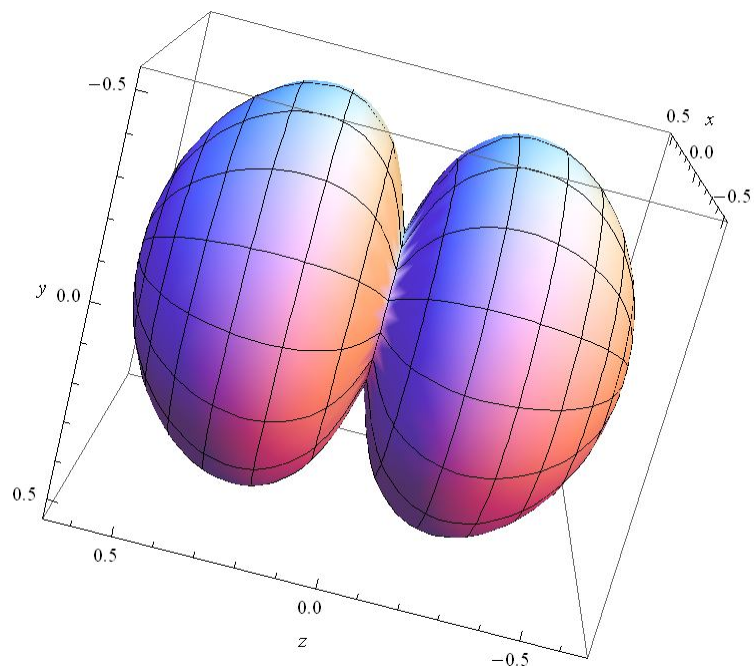


Рисунок 32

Таким образом, получены точные формулы (88),(90) для расчёта плотности распределения заряда по поверхности тела симметричной сферической формы (83).

ГЛАВА 4. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ДИСКРЕТНЫХ ЗАРЯДОВ НА ОБОЛОЧКЕ ЖЕСТКОГО ПРОВОДЯЩЕГО ШАРА.

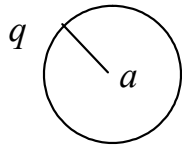


Рисунок 33

Согласно критерию Рэлея максимально возможный заряд шарообразной капли проводящей несжимаемой жидкости, при котором не возникает зарядовая неустойчивость, равен

$$q = \sqrt{64\pi^2 \varepsilon_0 a^3} \quad (91)$$

Распределение заряда по поверхности жидкой капли непрерывное. Реально заряженная частица является дискретной, и континуальная модель является приближенной. Если рассмотреть дискретную модель взаимодействия проводящего шара с заряженными частицами или ионами, то механизм удержания заряда будет иным, и условие устойчивости зарядов на поверхности жесткого шара будет принципиально отличаться от критерия Рэлея.

Окружим проводящий шар радиуса a прочной диэлектрической оболочкой толщиной $\delta \ll a$. Представим дискретную заряженную частицу в виде малой крупинки, несущей заряд q . Будем пренебрегать поляризационными зарядами этой оболочки и силами молекулярного притяжения частицы к данной поверхности. Учет молекулярного притяжения только усилит условие устойчивости. Каким будет максимальный заряд (максимальное количество заряженных частиц), который можно удерживать на поверхности шара.

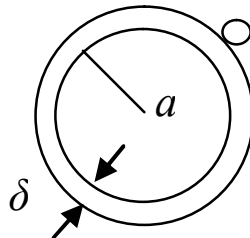


Рисунок 34

Проведем исследование для случая трех малых частиц, каждая из которых несет положительный заряд $+q$. Взаимодействие зарядов с индуцированными зарядами эквивалентно взаимодействию зарядов с их изображениями (Рисунок 35)

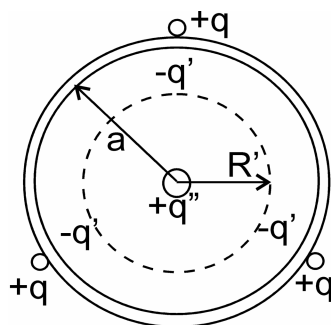


Рисунок 35

$$q'' = \frac{3q \cdot a}{a + \delta} \quad (92)$$

$$q' = -\frac{q \cdot a}{a + \delta} \quad (93)$$

Введем следующие обозначения для расстояний между зарядами и электростатическими изображениями: R' — расстояние между q' и q'' , ρ — расстояние между зарядом $+q$ и его изображением $-q'$, ξ — расстояние между $+q$ и изображением другого заряда $-q'$.

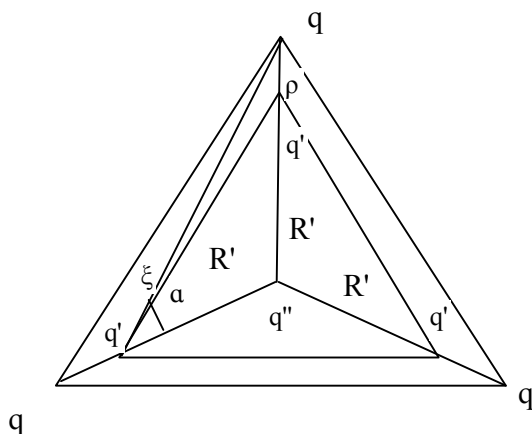


Рисунок 36

Используя метод электростатических изображений получим $(a + \delta)R' = a^2$.

Следовательно,

$$R' = \frac{a^2}{a + \delta} \quad (94)$$

$$\rho = a + \delta - R' = a + \delta - \frac{a^2}{a + \delta} = \frac{2a\delta + \delta^2}{a + \delta} \quad (95)$$

Сила взаимодействия q и q''

$$F' = \frac{qq''}{(a + \delta)^2} = \frac{3q^2a}{(a + \delta)^3}$$

Сила взаимодействия между зарядами $+q$:

$$F = 2 \frac{q^2}{(a\sqrt{3})^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Следовательно:

$$F = \frac{q^2}{\sqrt{3}(a + \delta)^2}$$

$$F_1' = \frac{-qq'(a + \delta)^2}{\delta^2(2a + \delta)^2} = \frac{-q^2a(a + \delta)}{\delta^2(2a + \delta)^2}$$

По теореме косинусов:

$$\begin{aligned} \xi^2 &= R'^2 + (a + \delta)^2 - 2R'(a + \delta) \cdot \cos 120 = \frac{a^4}{(a + \delta)^2} + (a + \delta)^2 + \frac{a^2}{a + \delta}(a + \delta) = \\ &= \frac{3a^4 + 4a\delta^3 + 7a^2\delta^2 + 6a^3\delta + \delta^4}{(a + \delta)^2} \end{aligned}$$

Обозначим угол между ξ и расстоянием между q и q'' через α .

По теореме косинусов:

$$(R')^2 = \xi^2 + (a + \delta)^2 - 2\xi(a + \delta) \cdot \cos \alpha$$

$$2\xi(a + \delta) \cos \alpha = \xi^2 + (a + \delta)^2 - \frac{a^4}{(a + \delta)^2} = 2(a + \delta)^2 + a^2$$

$$\cos \alpha = \frac{2(a + \delta)^2 + a^2}{2\xi(a + \delta)}$$

$$F'_2 = -2 \frac{qq'}{\xi^2} \cos \alpha = \frac{-q^2 a}{(a+\delta)} \frac{1}{\xi^2} \cdot \frac{2(a+\delta)^2 + a^2}{\xi(a+\delta)} = -q^2 \left(\frac{(2(a+\delta)^2 + a^2)a}{\xi^3(a+\delta)^2} \right) \quad (96)$$

$$F = \frac{3q^2 a}{(a+\delta)^3} - q^2 a \frac{2(a+\delta)^2 + a^2}{\xi^3(a+\delta)^2} + \frac{q^2}{\sqrt{3}(a+\delta)^2} - \frac{q^2 a(a+\delta)}{\delta^2(2a+\delta)^2} \quad (97)$$

$$\delta \rightarrow 0 \quad F \approx \frac{3q^2}{a^2} - \frac{q^2}{4\delta^2} \quad (98)$$

Критерий устойчивости

$$\delta^2 < \frac{a^2}{12} \quad (99)$$

Обобщим для случая N частиц :

$$F_q \approx -\frac{q^2}{\delta^2} + N \frac{q^2}{a^2} \quad (100)$$

Следовательно, при

$$N > \left(\frac{a}{\delta} \right)^2 \quad (101)$$

возникает зарядовая неустойчивость, т.е. заряженные крупинки не смогут удерживаться на поверхности диэлектрической оболочки.

Условие устойчивости напрямую не зависит от заряда. Оценим величину поверхностного заряда, при которой возникает зарядовая неустойчивость по механизму Рэлея и по механизму, рассмотренному в данной работе. Рассмотрим проводящий шар радиусом 1 мм, покрытый тонким слоем диэлектрика толщины 10 нм. Согласно критерию Рэлея для жидкой проводящей водяной капли, рэлеевская неустойчивость возникает при полном заряде $6,4 \cdot 10^{-10}$ Кл. ($N=4 \cdot 10^9$ частиц). Неустойчивость для твердого проводящего шара, покрытого тонким слоем диэлектрика возникает при $N=10^{10}$ и заряде в 2,5 раза больше.

Мы получили, что для жесткого шара условие зарядовой устойчивости отлично от условия Рэлея, так как модель Рэлея континуально приближенная, а в дискретном случае мы имеем другой механизм устойчивости зарядов на поверхности твердого шара.

Рассмотрим случай 4 частиц.

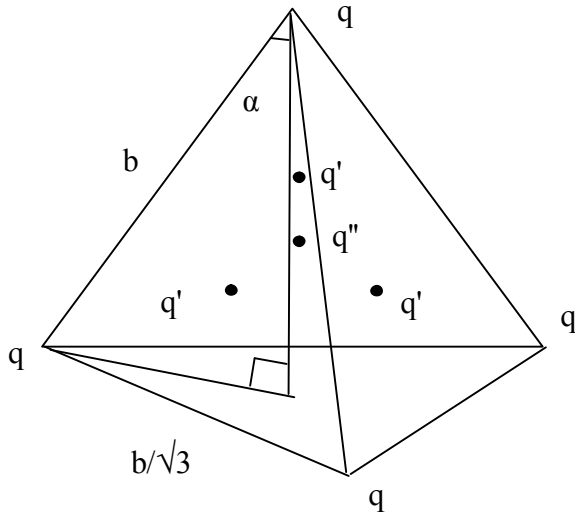


Рисунок 37

$b = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot a$, где a радиус описанной окружности.

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{3} \cdot b} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$F \approx 3 \frac{q^2}{b^2} \cos \alpha + 4 \frac{qq'}{a^2} - \frac{qq'}{4\delta^2} - 3 \frac{q'q}{b^2} \cos \alpha$$

$$q' = \frac{-qa}{a + \delta}; q'' = \frac{3qa}{a + \delta}$$

$$F \approx 3 \frac{q^2 \cdot 16}{6a^2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} + 4 \frac{q \cdot 3qa}{(a + \delta) \cdot a^2} - \frac{q^2 a}{(a + \delta) \cdot 4\delta^2} - 3 \frac{q^2 a}{(a + \delta)} \cdot \frac{16}{6a^2} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\delta \rightarrow 0; F \approx \frac{12q^2}{a^2} - \frac{q^2 a}{a \cdot 4\delta^2}$$

$$\text{Критерий устойчивости: } \delta^2 < \frac{a^2}{12 \cdot 4}$$

Результаты данной главы были опубликованы в сборниках трудов конференций [36], [37].

Заключение

Основные выводы, полученные в работе:

1. Рассмотрена задача о зарядовой неустойчивости капли проводящей жидкости. Установлено, что при значениях параметров Рэлея $3,7 < \Gamma < 3,9$ наиболее неустойчивыми участками поверхности являются области не вдоль главных осей эллипсоида.

2. Показано, что при параметрах Рэлея, превышающих критическое значение, может существовать стабильная форма, отличная от сферической для рассмотренного закона изменения формы.

3. Получено 3 новых точных аналитических решения, определяющих распределение заряда по поверхности твёрдых проводящих тел.

4. Показано, что зарядовая неустойчивость ансамбля дискретных заряженных частиц на сфере отличается от закона Рэлея. Получен новый критерий неустойчивости для таких систем.

Приложение

$$\begin{aligned}
 k_1 = & \frac{6825(-1887+275T)}{-346709208+46421375T} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{186322500(-1887+275T)^2}{(-346709208+46421375T)^2} - \frac{40040(-212+35T)}{-346709208+46421375T} + (7007002^{1/3}(1368289836+167899018T-47000525T^2) \right.} \\
 & (-41676969080573374007526912+16740560959252358332104000T-2241416841746566609125000T^2+100035466168941037109375T^3)^{1/3} \Big/ \\
 & \left. \left((-346709208+46421375T)^2(160210310340431719368000-2428866775740308904000T-10228156928878518630000) \cdot \right. \right. \\
 & \cdot T^2 + 1025714562140831062500T^3 + \sqrt{(-69514565424666205007296266506482012943040000000 - \\
 & -35816776335780033213295376197628405514240000000T + 2237556099455340970508480277560112840288000000T^2 + \\
 & +2609621084217814879819088571863598056232000000T^3 - 89599612861824141426099993598856400900000000T^4 - \\
 & -62324667834874496953733824748029023750000000T^5 + 4909788445564538894018647436234941406250000T^6) \Big)^{1/3} \Big) + \\
 & + (160210310340431719368000 - 2428866775740308904000T - 10228156928878518630000T^2 + 1025714562140831062500T^3 + \\
 & + \sqrt{(-69514565424666205007296266506482012943040000000 - \\
 & -35816776335780033213295376197628405514240000000T + 2237556099455340970508480277560112840288000000T^2 + \\
 & +2609621084217814879819088571863598056232000000T^3 - 89599612861824141426099993598856400900000000T^4 - \\
 & -62324667834874496953733824748029023750000000T^5 + 4909788445564538894018647436234941406250000T^6) \Big)^{1/3} \Big/ \\
 & \left. (32^{1/3}(-41676969080573374007526912+16740560959252358332104000T-2241416841746566609125000T^2+100035466168941037109375T^3)^{1/3}) - \right. \\
 & - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{372645000(-1887+275T)^2}{(-346709208+46421375T)^2} - \frac{80080(-212+35T)}{-346709208+46421375T} - (7007002^{1/3}(1368289836+167899018T-47000525T^2) \right.} \\
 & \cdot (-41676969080573374007526912+16740560959252358332104000T-2241416841746566609125000T^2+100035466168941037109375T^3)^{1/3} \Big/ \\
 & \left. \left((-346709208+46421375T)^2(160210310340431719368000-2428866775740308904000T-10228156928878518630000) \cdot \right. \right. \\
 & \cdot T^2 + 1025714562140831062500T^3 + \sqrt{(-69514565424666205007296266506482012943040000000 - \\
 & -35816776335780033213295376197628405514240000000T + 2237556099455340970508480277560112840288000000T^2 + \\
 & +2609621084217814879819088571863598056232000000T^3 - 89599612861824141426099993598856400900000000T^4 - \\
 & -62324667834874496953733824748029023750000000T^5 + 4909788445564538894018647436234941406250000T^6) \Big)^{1/3} \Big) - \\
 & - (160210310340431719368000 - 2428866775740308904000T - 10228156928878518630000T^2 + 1025714562140831062500T^3 + \\
 & + \sqrt{(-69514565424666205007296266506482012943040000000 - \\
 & -35816776335780033213295376197628405514240000000T + 2237556099455340970508480277560112840288000000T^2 + \\
 & +2609621084217814879819088571863598056232000000T^3 - 89599612861824141426099993598856400900000000T^4 - \\
 & -62324667834874496953733824748029023750000000T^5 + 4909788445564538894018647436234941406250000T^6) \Big)^{1/3} \Big/ \\
 & \left. (32^{1/3}(-41676969080573374007526912+16740560959252358332104000T-2241416841746566609125000T^2+100035466168941037109375T^3)^{1/3}) - \right. \\
 & - \left(\frac{20346417000000(-1887+275T)^3}{(-346709208+46421375T)^3} + \frac{6558552000(-212+35T)(-1887+275T)}{(-346709208+46421375T)^2} - \frac{400400(-26+5T)}{-346709208+46421375T} \right) \Big/
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (4\sqrt{\left(\frac{186322500(-1887+275T)^2}{(-346709208+46421375T)^2} - \frac{40040(-212+35T)}{-346709208+46421375T}\right) + (7007002^{1/3}(1368289836+167899018T-47000525T^2) \cdot \\
& (-41676969080573374007526912+16740560959252358332104000T-2241416841746566609125000T^2+100035466168941037109375T^3)^{1/3}} / \\
& ((-346709208+46421375T)^2(160210310340431719368000-2428866775740308904000T-10228156928878518630000T^2+1025714562140831062500T^3+ \\
& +\sqrt{(-69514565424666205007296266506482012943040000000-35816776335780033213295376197628405514240000000T+ \\
& +2237556099455340970508480277560112840288000000T^2+2609621084217814879819088571863598056232000000T^3- \\
& -89599612861824141426099993598856400900000000T^4-62324667834874496953733824748029023750000000T^5+ \\
& +4909788445564538894018647436234941406250000T^6)^{1/3}}) + \\
& +(160210310340431719368000-2428866775740308904000T- \\
& -10228156928878518630000T^2+1025714562140831062500T^3+\sqrt{(-69514565424666205007296266506482012943040000000- \\
& -35816776335780033213295376197628405514240000000T+2237556099455340970508480277560112840288000000T^2+ \\
& +2609621084217814879819088571863598056232000000T^3-89599612861824141426099993598856400900000000T^4- \\
& -62324667834874496953733824748029023750000000T^5+4909788445564538894018647436234941406250000T^6)^{1/3}} / (3 \cdot 2^{1/3} \cdot \\
& (-41676969080573374007526912+16740560959252358332104000T-2241416841746566609125000T^2+100035466168941037109375T^3)^{1/3})))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_2 = & -\frac{6825(-1887+275T)}{-346709208+46421375T} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{186322500(-1887+275T)^2}{(-346709208+46421375T)^2} - \frac{40040(-212+35T)}{-346709208+46421375T}\right) + (700700 \cdot 2^{1/3}(1368289836+167899018T-47000525T^2) \cdot \\
& (-41676969080573374007526912+16740560959252358332104000T-2241416841746566609125000T^2+100035466168941037109375T^3)^{1/3}} / \\
& ((-346709208+46421375T)^2(160210310340431719368000-2428866775740308904000T-10228156928878518630000 \cdot \\
& T^2+1025714562140831062500T^3+\sqrt{(-69514565424666205007296266506482012943040000000- \\
& -35816776335780033213295376197628405514240000000T+2237556099455340970508480277560112840288000000T^2+ \\
& +2609621084217814879819088571863598056232000000T^3-89599612861824141426099993598856400900000000T^4- \\
& -62324667834874496953733824748029023750000000T^5+4909788445564538894018647436234941406250000T^6)^{1/3}}) + \\
& +(160210310340431719368000-2428866775740308904000T-10228156928878518630000T^2+1025714562140831062500T^3+ \\
& +\sqrt{(-69514565424666205007296266506482012943040000000- \\
& -35816776335780033213295376197628405514240000000T+2237556099455340970508480277560112840288000000T^2+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2609621084217814879819088571863598056232000000T^3 - 89599612861824141426099993598856400900000000T^4 - \\
& -62324667834874496953733824748029023750000000T^5 + 4909788445564538894018647436234941406250000T^6)^{\frac{1}{3}} / \\
& (3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}(-41676969080573374007526912 + 16740560959252358332104000T - 2241416841746566609125000T^2 + 100035466168941037109375T^3)^{\frac{1}{3}}) + \\
& + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{372645000(-1887 + 275T)^2}{(-346709208 + 46421375T)^2} - \frac{80080(-212 + 35T)}{-346709208 + 46421375T} - (7007002^{\frac{1}{3}}(1368289836 + 167899018T - 47000525T^2) \cdot \right. \\
& \left. (-41676969080573374007526912 + 16740560959252358332104000T - 2241416841746566609125000T^2 + 100035466168941037109375T^3)^{\frac{1}{3}} \right) / \\
& ((-346709208 + 46421375T)^2(160210310340431719368000 - 2428866775740308904000T - 10228156928878518630000 \cdot \\
& \cdot T^2 + 1025714562140831062500T^3 + \sqrt{(-69514565424666205007296266506482012943040000000 - \\
& -35816776335780033213295376197628405514240000000T + 2237556099455340970508480277560112840288000000T^2 + \\
& +2609621084217814879819088571863598056232000000T^3 - 89599612861824141426099993598856400900000000T^4 - \\
& -62324667834874496953733824748029023750000000T^5 + 4909788445564538894018647436234941406250000T^6)^{\frac{1}{3}}) - \\
& -(160210310340431719368000 - 2428866775740308904000T - 10228156928878518630000T^2 + 1025714562140831062500T^3 + \\
& + \sqrt{(-69514565424666205007296266506482012943040000000 - \\
& -35816776335780033213295376197628405514240000000T + 2237556099455340970508480277560112840288000000T^2 + \\
& +2609621084217814879819088571863598056232000000T^3 - 89599612861824141426099993598856400900000000T^4 - \\
& -62324667834874496953733824748029023750000000T^5 + 4909788445564538894018647436234941406250000T^6)^{\frac{1}{3}}) / \\
& (3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}(-41676969080573374007526912 + 16740560959252358332104000T - 2241416841746566609125000T^2 + 100035466168941037109375T^3)^{\frac{1}{3}}) - \\
& - \left(\frac{20346417000000(-1887 + 275T)^3}{(-346709208 + 46421375T)^3} + \frac{6558552000(-212 + 35T)(-1887 + 275T)}{(-346709208 + 46421375T)^2} - \frac{400400(-26 + 5T)}{-346709208 + 46421375T} \right) / \\
& (4 \sqrt{\left(\frac{186322500(-1887 + 275T)^2}{(-346709208 + 46421375T)^2} - \frac{40040(-212 + 35T)}{-346709208 + 46421375T} + (7007002^{\frac{1}{3}}(1368289836 + 167899018T - 47000525T^2) \cdot \right. \\
& \left. (-41676969080573374007526912 + 16740560959252358332104000T - 2241416841746566609125000T^2 + 100035466168941037109375T^3)^{\frac{1}{3}} \right) / \\
& ((-346709208 + 46421375T)^2(160210310340431719368000 - 2428866775740308904000T - 10228156928878518630000T^2 + 1025714562140831062500T^3 + \\
& + \sqrt{(-69514565424666205007296266506482012943040000000 - 35816776335780033213295376197628405514240000000T + \\
& +2237556099455340970508480277560112840288000000T^2 + 2609621084217814879819088571863598056232000000T^3 - \\
& -89599612861824141426099993598856400900000000T^4 - 62324667834874496953733824748029023750000000T^5 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4909788445564538894018647436234941406250000T^6)^{\frac{1}{3}}) + \\
& +(160210310340431719368000 - 2428866775740308904000T - \\
& -10228156928878518630000T^2 + 1025714562140831062500T^3 + \sqrt{(-69514565424666205007296266506482012943040000000 - \\
& -35816776335780033213295376197628405514240000000T + 2237556099455340970508480277560112840288000000T^2 + \\
& +2609621084217814879819088571863598056232000000T^3 - 89599612861824141426099993598856400900000000T^4 - \\
& -62324667834874496953733824748029023750000000T^5 + 4909788445564538894018647436234941406250000T^6)^{\frac{1}{3}} / (3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot \\
& (-41676969080573374007526912 + 16740560959252358332104000T - 2241416841746566609125000T^2 + 100035466168941037109375T^3)^{\frac{1}{3}})) \\
\\
k_3 = & -\frac{6825(-1887 + 275T)}{-346709208 + 46421375T} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{186322500(-1887 + 275T)^2}{(-346709208 + 46421375T)^2} - \frac{40040(-212 + 35T)}{-346709208 + 46421375T} + (7007002^{\frac{1}{3}}(1368289836 + 167899018T - 47000525T^2) \cdot \right. \\
& (-41676969080573374007526912 + 16740560959252358332104000T - 2241416841746566609125000T^2 + 100035466168941037109375T^3)^{\frac{1}{3}}) / \\
& ((-346709208 + 46421375T)^2(160210310340431719368000 - 2428866775740308904000T - 10228156928878518630000 \cdot \\
& \cdot T^2 + 1025714562140831062500T^3 + \sqrt{(-69514565424666205007296266506482012943040000000 - \\
& -35816776335780033213295376197628405514240000000T + 2237556099455340970508480277560112840288000000T^2 + \\
& +2609621084217814879819088571863598056232000000T^3 - 89599612861824141426099993598856400900000000T^4 - \\
& -62324667834874496953733824748029023750000000T^5 + 4909788445564538894018647436234941406250000T^6)^{\frac{1}{3}}) + \\
& +(160210310340431719368000 - 2428866775740308904000T - 10228156928878518630000T^2 + 1025714562140831062500T^3 + \\
& + \sqrt{(-69514565424666205007296266506482012943040000000 - \\
& -35816776335780033213295376197628405514240000000T + 2237556099455340970508480277560112840288000000T^2 + \\
& +2609621084217814879819088571863598056232000000T^3 - 89599612861824141426099993598856400900000000T^4 - \\
& -62324667834874496953733824748029023750000000T^5 + 4909788445564538894018647436234941406250000T^6)^{\frac{1}{3}} / \\
& (3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} (-41676969080573374007526912 + 16740560959252358332104000T - 2241416841746566609125000T^2 + 100035466168941037109375T^3)^{\frac{1}{3}}) - \\
& -\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{372645000(-1887 + 275T)^2}{(-346709208 + 46421375T)^2} - \frac{80080(-212 + 35T)}{-346709208 + 46421375T} - (7007002^{\frac{1}{3}}(1368289836 + 167899018T - 47000525T^2) \cdot \right. \\
& (-41676969080573374007526912 + 16740560959252358332104000T - 2241416841746566609125000T^2 + 100035466168941037109375T^3)^{\frac{1}{3}}) /
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&((-346709208 + 46421375T)^2(160210310340431719368000 - 2428866775740308904000T - 10228156928878518630000 \cdot \\
&T^2 + 1025714562140831062500T^3 + \sqrt{(-69514565424666205007296266506482012943040000000 - \\
&-35816776335780033213295376197628405514240000000T + 2237556099455340970508480277560112840288000000T^2 + \\
&+2609621084217814879819088571863598056232000000T^3 - 89599612861824141426099993598856400900000000T^4 - \\
&-62324667834874496953733824748029023750000000T^5 + 4909788445564538894018647436234941406250000T^6)^{1/3}) - \\
&-(160210310340431719368000 - 2428866775740308904000T - 10228156928878518630000T^2 + 1025714562140831062500T^3 + \\
&+ \sqrt{(-69514565424666205007296266506482012943040000000 - \\
&-35816776335780033213295376197628405514240000000T + 2237556099455340970508480277560112840288000000T^2 + \\
&+2609621084217814879819088571863598056232000000T^3 - 89599612861824141426099993598856400900000000T^4 - \\
&-62324667834874496953733824748029023750000000T^5 + 4909788445564538894018647436234941406250000T^6)^{1/3} / \\
&(3 \cdot 2^{1/3}(-41676969080573374007526912 + 16740560959252358332104000T - 2241416841746566609125000T^2 + 100035466168941037109375T^3)^{1/3}) + \\
&+ (-\frac{20346417000000(-1887 + 275T)^3}{(-346709208 + 46421375T)^3} + \frac{6558552000(-212 + 35T)(-1887 + 275T)}{(-346709208 + 46421375T)^2} - \frac{400400(-26 + 5T)}{-346709208 + 46421375T}) / \\
&(4\sqrt{(\frac{186322500(-1887 + 275T)^2}{(-346709208 + 46421375T)^2} - \frac{40040(-212 + 35T)}{-346709208 + 46421375T} + (7007002^{1/3}(1368289836 + 167899018T - 47000525T^2) \cdot \\
&-(-41676969080573374007526912 + 16740560959252358332104000T - 2241416841746566609125000T^2 + 100035466168941037109375T^3)^{1/3}) / \\
&((-346709208 + 46421375T)^2(160210310340431719368000 - 2428866775740308904000T - 10228156928878518630000T^2 + 1025714562140831062500T^3 + \\
&+ \sqrt{(-69514565424666205007296266506482012943040000000 - 35816776335780033213295376197628405514240000000T + \\
&+2237556099455340970508480277560112840288000000T^2 + 2609621084217814879819088571863598056232000000T^3 - \\
&-89599612861824141426099993598856400900000000T^4 - 62324667834874496953733824748029023750000000T^5 + \\
&+4909788445564538894018647436234941406250000T^6)^{1/3}) + \\
&+(160210310340431719368000 - 2428866775740308904000T - \\
&-10228156928878518630000T^2 + 1025714562140831062500T^3 + \sqrt{(-69514565424666205007296266506482012943040000000 - \\
&-35816776335780033213295376197628405514240000000T + 2237556099455340970508480277560112840288000000T^2 + \\
&+2609621084217814879819088571863598056232000000T^3 - 89599612861824141426099993598856400900000000T^4 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -62324667834874496953733824748029023750000000T^5 + 4909788445564538894018647436234941406250000T^6) \Big)^{\frac{1}{3}} / (3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot \\
& (-41676969080573374007526912 + 16740560959252358332104000T - 2241416841746566609125000T^2 + 100035466168941037109375T^3)^{\frac{1}{3}}) \Big) \Big) \\
& \\
& k_4 = \frac{6825(-1887+275T)}{-346709208+46421375T} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{186322500(-1887+275T)^2}{(-346709208+46421375T)^2} - \frac{40040(-212+35T)}{-346709208+46421375T} + (7007002^{\frac{1}{3}}(1368289836+167899018T-47000525T^2) \cdot \right.} \\
& (-41676969080573374007526912 + 16740560959252358332104000T - 2241416841746566609125000T^2 + 100035466168941037109375T^3)^{\frac{1}{3}} \Big) / \\
& ((-346709208 + 46421375T)^2 (160210310340431719368000 - 2428866775740308904000T - 10228156928878518630000 \cdot \\
& T^2 + 1025714562140831062500T^3 + \sqrt{(-69514565424666205007296266506482012943040000000 - \\
& -35816776335780033213295376197628405514240000000T + 2237556099455340970508480277560112840288000000T^2 + \\
& +2609621084217814879819088571863598056232000000T^3 - 89599612861824141426099993598856400900000000T^4 - \\
& -62324667834874496953733824748029023750000000T^5 + 4909788445564538894018647436234941406250000T^6) \Big)^{\frac{1}{3}} \Big) + \\
& + (160210310340431719368000 - 2428866775740308904000T - 10228156928878518630000T^2 + 1025714562140831062500T^3 + \\
& + \sqrt{(-69514565424666205007296266506482012943040000000 - \\
& -35816776335780033213295376197628405514240000000T + 2237556099455340970508480277560112840288000000T^2 + \\
& +2609621084217814879819088571863598056232000000T^3 - 89599612861824141426099993598856400900000000T^4 - \\
& -62324667834874496953733824748029023750000000T^5 + 4909788445564538894018647436234941406250000T^6) \Big)^{\frac{1}{3}} / \\
& (3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} (-41676969080573374007526912 + 16740560959252358332104000T - 2241416841746566609125000T^2 + 100035466168941037109375T^3)^{\frac{1}{3}}) \Big) + \\
& + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{372645000(-1887+275T)^2}{(-346709208+46421375T)^2} - \frac{80080(-212+35T)}{-346709208+46421375T} - (7007002^{\frac{1}{3}}(1368289836+167899018T-47000525T^2) \cdot \right.} \\
& (-41676969080573374007526912 + 16740560959252358332104000T - 2241416841746566609125000T^2 + 100035466168941037109375T^3)^{\frac{1}{3}} \Big) / \\
& ((-346709208 + 46421375T)^2 (160210310340431719368000 - 2428866775740308904000T - 10228156928878518630000 \cdot \\
& \cdot T^2 + 1025714562140831062500T^3 + \sqrt{(-69514565424666205007296266506482012943040000000 - \\
& -35816776335780033213295376197628405514240000000T + 2237556099455340970508480277560112840288000000T^2 + \\
& +2609621084217814879819088571863598056232000000T^3 - 89599612861824141426099993598856400900000000T^4 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -62324667834874496953733824748029023750000000T^5 + 4909788445564538894018647436234941406250000T^6)^{\frac{1}{3}}) - \\
& -(160210310340431719368000 - 2428866775740308904000T - 10228156928878518630000T^2 + 1025714562140831062500T^3 + \\
& + \sqrt{(-69514565424666205007296266506482012943040000000 - \\
& -35816776335780033213295376197628405514240000000T + 2237556099455340970508480277560112840288000000T^2 + \\
& + 2609621084217814879819088571863598056232000000T^3 - 89599612861824141426099993598856400900000000T^4 - \\
& + 62324667834874496953733824748029023750000000T^5 + 4909788445564538894018647436234941406250000T^6)^{\frac{1}{3}} / \\
& (3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}(-41676969080573374007526912 + 16740560959252358332104000T - 2241416841746566609125000T^2 + 100035466168941037109375T^3)^{\frac{1}{3}}) + \\
& + \left(-\frac{20346417000000(-1887 + 275T)^3}{(-346709208 + 46421375T)^3} + \frac{6558552000(-212 + 35T)(-1887 + 275T)}{(-346709208 + 46421375T)^2} - \frac{400400(-26 + 5T)}{-346709208 + 46421375T} \right) / \\
& (4 \sqrt{\left(\frac{186322500(-1887 + 275T)^2}{(-346709208 + 46421375T)^2} - \frac{40040(-212 + 35T)}{-346709208 + 46421375T} + (7007002^{\frac{1}{3}}(1368289836 + 167899018T - 47000525T^2) \cdot \right. \\
& \left. - (-41676969080573374007526912 + 16740560959252358332104000T - 2241416841746566609125000T^2 + 100035466168941037109375T^3)^{\frac{1}{3}} \right) / \\
& ((-346709208 + 46421375T)^2(160210310340431719368000 - 2428866775740308904000T - 10228156928878518630000T^2 + 1025714562140831062500T^3 + \\
& + \sqrt{(-69514565424666205007296266506482012943040000000 - 35816776335780033213295376197628405514240000000T + \\
& + 2237556099455340970508480277560112840288000000T^2 + 2609621084217814879819088571863598056232000000T^3 - \\
& - 89599612861824141426099993598856400900000000T^4 - 62324667834874496953733824748029023750000000T^5 + \\
& + 4909788445564538894018647436234941406250000T^6)^{\frac{1}{3}}) + \\
& + (160210310340431719368000 - 2428866775740308904000T - \\
& - 10228156928878518630000T^2 + 1025714562140831062500T^3 + \sqrt{(-69514565424666205007296266506482012943040000000 - \\
& - 35816776335780033213295376197628405514240000000T + 2237556099455340970508480277560112840288000000T^2 + \\
& + 2609621084217814879819088571863598056232000000T^3 - 89599612861824141426099993598856400900000000T^4 - \\
& - 62324667834874496953733824748029023750000000T^5 + 4909788445564538894018647436234941406250000T^6)^{\frac{1}{3}} / (3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot \\
& (-41676969080573374007526912 + 16740560959252358332104000T - 2241416841746566609125000T^2 + 100035466168941037109375T^3)^{\frac{1}{3}}))
\end{aligned}$$

Литература

1. Lord Rayleigh. // Philosophical Magazine, Ser. 5. 1882, Vol. 14. P. 184–186.
2. Bailey A. G. Electrostatic atomization of liquids// Sci. Prog. 1974. V. 61. № 244. P. 555-581
3. Коженков В. И., Фукс Н. А. Электродинамическое распыление жидкости.// Успехи химии. 1976. Т. 45. № 12. С. 2274-2284.
4. Дудников В. Г., Шабалин А. Л. Электродинамические источники ионных пучков (обзор): Препринт № 87-63. Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР. 1987.
5. Д. Ф. Белоножко, А. И. Григорьев. Нелинейные капиллярные колебания заряженной капли //ЖТФ. 2000, Т. 70, вып. 8, с. 45-52
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.//Теоретическая физика. Электродинамика сплошных сред. Т. 8. М.: Наука, 1982, 620 с.
7. А. Н. Матвеев. Электричество и магнетизм: Учеб. пособие. М.: Высш. школа, 1983. 463 с.
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.//Теоретическая физика. Гидродинамика. Т. 6. М.: Наука, 1986, 733 с.
9. С. И. Щукин, А. И. Григорьев. Энергетический анализ возможных каналов распада заряженной капли на две части. //ЖТФ. 2000, Т. 70, вып. 4, с. 1-7.
10. А. И. Григорьев. Капиллярные электростатические неустойчивости.// Соровский образовательный журнал. 2000, Т. 6, № 7, с. 37-43.
11. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1978.
12. С. И. Щукин, А. И. Григорьев. Устойчивость заряженной капли, имеющей форму трехосного эллипсоида. //ЖТФ. 1998, Т. 68, вып. 11, с. 48-51.
13. 18-ая Международная конференция Электромагнитное поле и материалы (2010 г.): Электростатическая неустойчивость Рэлея заряженной проводящей капли эллипсоидной формы. С.237-251.
14. 18-ая Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов-2011”: Электростатическая неустойчивость заряженной проводящей капли эллипсоидной формы.
15. Taylor G. Disintegration of water drops in an electric field//Proc. Roy. Soc. A. 1964. V. 280. № 1382. P. 383-397.
16. English W. N. Corona from water drop//Phys. Rev. 1948. V. 74. № 2. P. 179-189.

17. Macky W. A. Deformation of soap bubbles in electric fields//Proc. Camb. Phil. Soc. 1930. V. 26. № 3. P. 421-428
18. Matthews J. B. Mass loss and distortion of freely falling water drops in an electric field//J. Geophys. Res. 1967. V. 72. № 12. P.3007-3013.
19. Barreto E. Electrically produced submicroscopic aerosols//Aerosol Sci. 1971. V. 2 № 2. P. 219-228.
20. Garton C. G., Krasucki Z., Dubbles in insulating liquids: stability in an electric field//Proc. Roy. Soc. London. A. 1964. V. 280 № 138. P. 211-226.
21. Inculet I. I., Kromann R. Breakup of large water droplets by electric fields//IEEE Trans. Ind. Appl. 1989. V. 25. № 5. P. 945-948.
22. Ryce S. A., Patriarche D. A. Energy considerations in the electrostatic dispersion of liquids//Canad. J. Phys. 1965. V. 43 № 12. P. 2192-2199.
23. Inculet I. I., Floryan J. M., Haywood R. G. Dynamics of water droplets breakup in electric fields//IEEE Trans. Ind. Appl. 1992. V. 28 № 5. P. 1203-1209.
24. Richards C. N., Dawson G. A. The hydrodynamic instability of water drops falling at terminal velocity in vertical electric fields//J. Geophys. Res. 1971. V. 76. № 15. P. 3445-3455.
25. Harbich W., Helfrich W. Alignment and opening of giant lecithin vesicles by electric fields// Z. Naturforsch. A. 1979. V. 34. № 9. P. 1063-1065.
26. Мучник В.М. Физика грозы. Гидрометеоиздат. 1974. С.166-199.
27. Войцеховский Б. В., Войцеховский Б. Б.//Письма в ЖЭТФ. 1976. Т. 23, № 1. С. 37-39.
28. Yarin A. L., Brenn G., Kastner O.//J. Fluid. Mech. 1999. Vol. 399, P. 151-204
29. Dupac M., Beale D. G., Overflat R. A.//Nonlinear Dinamic. 2005. Vol. 42. P. 25-42.
30. Ширяева С. О.//ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 3. С. 93-95
31. Григорьев А. И., Жаров А. Н., Ширяева С.О.//ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 8. С. 44-53
32. Ширяева С. О.//ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 10. С. 32-40
33. Hendricks C. D., Schneider J. M. Stability of Conducting Droplet under the Influence of Surface Tension and Electrostatic Forces// American Journal of Physics. 1963, Vol. 1(No. 6). P. 450-453.
34. 19-ая Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов-2012”: Метастабильное состояние равновесия заряженной проводящей капли.
35. 20-ая Международная конференция Электромагнитное поле и материалы (2012 г.): Электростатическая задача о возмущении капли проводящей жидкости.

36. 19-ая Международная конференция Электромагнитное поле и материалы (2011 г.): Electrostatic instability criteria of a conductive sphere with continuous and discrete charge distribution.
37. Mathematics and Natural sciences 2011: Electrostatic instability of a conductive charged drop and a conductive solid sphere. P. 361-366